数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 202-207

Existence of rapidly varying solutions of second order half-linear differential equations

(2 階半分線形微分方程式の急変動解の存在について)

富山工業高専　谷川 智幸 (Tomoyuki TANIGAWA)
Toyama National College of Technology
e-mail: tanigawa@toyama-nct.ac.jp

0. 序

セルビアの数学者 V. Marić, M. Tomić 等は, Karamata 関数を 2 階の線形, 非線形微分方程式の非振動解の漸近挙動の解析に応用し, 微分方程式の定性的理論の研究に一石を投じた.

彼等の成果のうちで代表的なものは, 2 階線形微分方程式

$$y'' + q(t)y = 0, \quad q : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \text{連続} \tag{L}$$

の非振動解の無限遠における漸近挙動を正則変動関数, 急変動関数の枠組みの中で考察した論文 [1,3] である.

非線形微分方程式と半分線形微分方程式の定性的類似に注目すると, 半分線形微分方程式

$$(|y'|^{\alpha-1}y')' + q(t)|y|^{\alpha-1}y = 0, \quad \alpha > 0, \ q : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \text{連続} \tag{HL}$$

の非振動解も (L) の解と同様に Karamata 関数の範疇で解析されることが予想される.

我々は, (HL) の正則変動関数解についてはこの予想が正しいことを, (L) に関する [1] の結果を完全な形で (HL) に拡張することによって示した. (論文 [2]) . この論文では, (L) の急変動関数解の存在に関する [3] の結果を (HL) に拡張することを試み, 急変動関数解についても (L) と (HL) の間に注目すべき類似性があることを指摘する.

1. Karamata 関数

この節では Karamata 関数の内代表的なもの, 緩変動関数, 正則変動関数, 急変動関数の定義を述べ, その例を挙げる.

定義 1.1. (緩変動関数)

可測関数 $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ が緩変動関数 (slowly varying function) であるとは, 任意の $\lambda > 0$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = 1$$

が成立することである. 緩変動関数の全体集合を SV と書く.

次の定理は緩変動関数の特徴付けを与える重要なものである.

定理 1.2. (表現定理)

$f \in \mathrm{SV}$ であるための必要十分条件はある $t_0 > 0$ に対して

$$f(t) = c(t) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds\right\}, \quad t \geq t_0 \tag{1.1}$$

の形に表されることである．ここで，$c(t)$ と $\varepsilon(t)$ は可測関数で，

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = c > 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$$

を満たす．

定理 1.3. $f \in \mathrm{SV}$ ならば，任意の $\alpha > 0$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha} f(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} f(t) = 0$$

が成立つ．

注意. (1.1) において $c(t) \equiv \mathrm{const} > 0$ の場合，f を正規化された緩変動関数 ($f \in$ n-SV) と呼ぶ．

定義 1.4. (正則変動関数)
可測関数 $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ が ρ 次の正則変動関数 (regularly varying function of index ρ) であるとは，任意の $\lambda > 0$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^{\rho}, \qquad \rho \in \mathbb{R}$$

が成立することである．ρ 次の正則変動関数の全体集合を $\mathrm{RV}(\rho)$ と書く．

注意. $\mathrm{RV}(0) = \mathrm{SV}$ である．

定理 1.5. (表現定理)
$f \in \mathrm{RV}(\rho)$ であるための必要十分条件はある $t_0 > 0$ に対して

$$f(t) = c(t) \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{\delta(s)}{s} ds \right\} \tag{1.2}$$

の形に表されることである．ここで，$c(t)$ と $\delta(t)$ は可測関数で，

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = c > 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \delta(t) = \rho$$

を満たす．

注意. $f \in \mathrm{RV}(\rho)$ と $f(t) = t^{\rho} g(t)$, $(g \in \mathrm{SV})$ は同値である．

注意. (1.2) において $c(t) \equiv \mathrm{const} > 0$ の場合，f を ρ 次の正規化された正則変動関数 ($f \in$ n-RV(ρ)) と呼ぶ．

例. (緩変動関数)

$$f(t) = c > 0, \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = c > 0$$

$$f(t) = \log_k t, \qquad \log_k t = \log(\log_{k-1} t)$$

$$f(t) = \prod_{k=1}^{n} (\log_k t)^{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = \exp\left\{ \prod_{k=1}^{n} (\log_k t)^{\beta_k} \right\}, \quad \beta_k \in (0,1)$$

定義 1.6. (急変動関数)
正値可測関数 f が ∞ 次の急変動関数 (rapidly varying function of index ∞) であるとは,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\lambda t)}{f(t)}=\begin{cases}\infty & \text{for} \quad \lambda>1\\ 0 & \text{for} \quad 0<\lambda<1,\end{cases}$$

が成立することである. また, f が $-\infty$ 次の急変動関数 (rapidly varying function of index $-\infty$) であるとは,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\lambda t)}{f(t)}=\begin{cases}0 & \text{for} \quad \lambda>1\\ \infty & \text{for} \quad 0<\lambda<1,\end{cases}$$

が成立することである. $\pm\infty$ 次の急変動関数の全体集合を $\mathrm{RV}(\pm\infty)$ と書く.

例. (急変動関数)

$$\mathrm{RV}(\infty):\quad f(t)=e^{kt},\ (k>0),\quad f(t)=\exp\{t^m\},\ (m>0),\quad f(t)=\exp\{e^t\};$$

$$\mathrm{RV}(-\infty):\ f(t)=e^{-kt},\ (k>0),\ f(t)=\exp\{-t^m\},\ (m>0),\quad f(t)=\exp\{-e^t\}.$$

2. Karamata 関数と微分方程式

この節では, V. Marić, M. Tomić 等の線形方程式に対する代表的な結果を述べた後, 半分線形方程式に対して知られている結果を紹介する.

定理 A. (V. Marić and M. Tomić [3], 1990)
方程式 (L) において $q(t)<0,\ t\in[0,\infty)$ と仮定する.
(i) (L) の全ての正値減少解が

$$\text{(a)}\quad \text{緩変動関数,}\qquad \text{(b)}\quad -\rho\ \text{次の正則変動関数,}\quad \rho=\frac{\sqrt{1-4c}-1}{2}$$

であるための必要十分条件は,

$$\text{(a)}\quad \lim_{t\to\infty} t\int_t^\infty q(s)ds=0,\qquad \text{(b)}\quad \lim_{t\to\infty} t\int_t^\infty q(s)ds=c,\quad c\in(-\infty,0)$$

が成立つことである.
(ii) 方程式 (L) の正値減少解が全て $-\infty$ 次の急変動関数であるための必要十分条件は, 任意の $\lambda>1$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} t\int_t^{\lambda t} q(s)ds=-\infty$$

が成立つことである.

定理 B. (H. Howard and V. Marić [1], 1997)
方程式 (L) において $q(t)$ は $[0,\infty)$ で条件付き可積分とする. 任意に $c\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$ をとり, 2 次方程式

$$\lambda^2-\lambda+c=0$$

の2実根を λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ とする.

方程式 (L) が非振動で, 2つの1次独立解 $y_i \in$ n-RV(λ_i), $i = 1,\ 2$ をもつための必要十分条件は

$$\lim_{t\to\infty} t \int_t^\infty q(s)ds = c$$

が成立つことである.

定理 B を方程式 (HL) に一般化して得られた結果が次の定理である,

定理 C. (J. Jaros, T. Kusano and T. [2], 2003)

方程式 (HL) において $q(t)$ は $[0, \infty)$ で条件付き可積分とする. 任意に $c \in \left(-\infty, \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\right)$ をとり, 方程式

$$|\lambda|^{1+\frac{1}{\alpha}} - \lambda + c = 0$$

の2実根を λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ とする.

方程式 (HL) が非振動で, 2つの解 $y_i \in$ n-RV$(\lambda_i^{\frac{1}{\alpha}*})$, $i = 1,\ 2$ をもつための必要十分条件は

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \int_t^\infty q(s)ds = c$$

である. ここで, 記号 $*$ は

$$\xi^{\gamma*} = |\xi|^{\gamma-1}\xi = |\xi|^\gamma \operatorname{sgn}\xi, \quad \xi \in \mathbb{R},\ \ \gamma > 0$$

の意味で用いられる.

3. 主結果

V. Marić と M. Tomić は, 線形方程式 (L) の急変動解の存在に関して次の結果を得ている (論文 [3]).

定理 D. 方程式 (L) において $q(t) < 0$, $t \in [0, \infty)$ とする. (L) の正値減少解は全て $-\infty$ 次の急変動関数であり, 正値増大解は全て ∞ 次の急変動関数であるための必要十分条件は, 任意の $\lambda > 1$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} t \int_t^{\lambda t} q(s)ds = -\infty$$

が成立つことである.

定理 D は (L) が急変動関数解をもつ状況を特徴付けるものである. 我々は同様な結果が半分線形微分方程式 (HL) に対しても成立つと予想しているが, 今日まで得られたのは, 急変動関数解の存在のための十分条件の方だけである. それを以下に定理 3.1 として述べる. 問題の条件が必要であるか否かの吟味は今後の課題である.

定理 3.1. 方程式 (HL) において $q(t) < 0$, $t \in [0, \infty)$ と仮定する. 任意の $\lambda > 1$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \int_t^{\lambda t} q(s)ds = -\infty$$

ならば, 方程式 (HL) の正値減少解は全て $-\infty$ 次の急変動関数で, 正値増大解は全て ∞ 次の急変動関数である.

方程式 (HL) に対する正値減少解と正値増大解の存在は次の補題で保証されている.

補題. (M. Mizukami, M. Naito and H. Usami [4], 2002)
方程式 (HL) は, α, β の大小に関係なく, $[0.\infty)$ 上で正値減少解, 正値増大解をもつ.

定理 3.1 の証明の概略: 先ず, 方程式 (HL) の正値減少解 $y_1(t)$ を考える. $\mu > 1$ とする. $y = y_1$ として方程式 (HL) を t から μt まで積分する.

$$(y_1'(\mu t))^{\alpha *} - (y_1'(t))^{\alpha *} = -\int_t^{\mu t} q(s)(y_1(s))^{\alpha} ds.$$

$y_1'(t) < 0$ であるから,

$$y_1'(t) \leq \left[\int_t^{\mu t} q(s)(y_1(s))^{\alpha} ds\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

が成立つ. この不等式を t から μt まで積分する.

$$y_1(\mu t) - y_1(t) \leq \int_t^{\mu t} \left[\int_s^{\mu s} q(r)(y_1(r))^{\alpha} dr\right]^{\frac{1}{\alpha}} ds. \tag{3.1}$$

任意の $m > 0$ に対して,

$$\int_t^{\mu t} q(s) ds \leq -\left(\frac{m}{t}\right)^{\alpha}, \quad t \geq t_0, \tag{3.2}$$

を満たす $t_0 = t_0(m)$ が存在する. $y_1(t)$ が減少関数である性質と不等式 (3.2) を用いると, (3.1) は,

$$y_1(\mu t) - y_1(t) \leq -m y_1(\mu^2 t) \int_t^{\mu t} \frac{ds}{s} ds = -m y_1(\mu^2 t) \log \mu$$

となる. このことから

$$\frac{y_1(t)}{y_1(\mu^2 t)} \geq m \log \mu, \quad t \geq t_0$$

が得られ, $m > 0$ は任意により, 上の不等式は

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y_1(t)}{y_1(\mu^2 t)} = \infty \quad \text{for } \mu > 1$$

が成立つ. これは明らかに

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \lambda > 1 \\ \infty & \text{for} \quad 0 < \lambda < 1, \end{cases}$$

と同値である. ゆえに, $y_1(t) \in \mathrm{RV}(-\infty)$ である.
次に, 方程式 (HL) の正値増大解 $y_2(t)$ を考える. 先程と同じ議論によって,

$$(y_2'(\mu t))^{\alpha} - (y_2'(t))^{\alpha} = -\int_t^{\mu t} q(s)(y_2(s))^{\alpha} ds,$$

が得られ, $y_2'(t) > 0$ であるから,

$$y_2'(\mu t) \geq -\left[\int_t^{\mu t} q(s)(y_2(s))^{\alpha} ds\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

が成立つ. これを t から μt まで積分する.

$$\int_t^{\mu t} y_2'(\mu s)ds \geq -\int_t^{\mu t}\left[\int_s^{\mu s} q(r)(y_2(r))^\alpha dr\right]^{\frac{1}{\alpha}} ds.$$

上の不等式の左辺は

$$\frac{1}{\mu}\int_{\mu t}^{\mu^2 t} y_2'(w)dw = \frac{1}{\mu}\{y_2(\mu^2 t) - y_2(\mu t)\}$$

となり, 右辺は $y_2(t)$ が増加関数であるという性質と不等式 (3.2) を用いて下から評価される.

$$-\int_t^{\mu t}\left[\int_s^{\mu s} q(r)(y_2(r))^\alpha dr\right] ds \geq -y_2(t)\int_t^{\mu t}\left[\int_s^{\mu s} q(r)dr\right]^{\frac{1}{\alpha}} ds \geq m y_2(t)\log\mu.$$

従って,

$$\frac{1}{\mu}\{y_2(\mu^2 t) - y_2(\mu t)\} \geq m y_2(t)\log\mu,$$

が得られ,

$$\frac{y_2(\mu^2 t)}{y_2(t)} \geq m\mu\log\mu, \quad t \geq t_0$$

が成立つ. これは

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_2(\mu^2 t)}{y_2(t)} = \infty \quad \text{for } \mu > 1$$

となり,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \begin{cases} \infty & \text{for} \quad \lambda > 1 \\ 0 & \text{for} \quad 0 < \lambda < 1, \end{cases}$$

が示される. ∎

References

[1] H. C. Howard and V. Marić, Regularity and nonoscillation of solutions of second order linear differential equations, Bull. T. CXIV de Acad. Serbe Sci. et Arts, Classe Sci. Mat. Nat. Sci. Math. **22** (1997), 85–98.

[2] J. Jaroš, T. Kusano and T. Tanigawa, Nonoscillation theory for second order half-linear differential equations in the framework of regular variation, Results Math. **43** (2003), 129–149.

[3] V. Marić and M. Tomić, A classification of solutions of second order linear differential equations by means of regularly varying functions, Publ. Inst. Math. (Beograd) **48** (62) (1990), 199–207.

[4] M. Mizukami, M. Naito and H. Usami, Asymptotic behavior of solutions of a class of second order quasilinear ordinary differential equations, Hiroshima Math. J. **32** (2002), 51–78.