数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 142-150

Choquet 期待効用とその単純化

(Choquet expected utility and its simplification)

桐朋学園　成川康男 (Yasuo NARUKAWA)
Toho Gakuen ,
東工大・総理工　室伏俊明 (Toshiaki MUROFUSHI) ,

Dept. Comp. Intell. & Syst. Sci., Tokyo Inst. Tech.

1 はじめに

不確実性の下での決定の理論については、単純な期待値を用いるものから始まり、von Neumann and Morgenstern [5] の期待効用の理論などが良く知られている。その一方で、人間の決定が古典的な期待効用理論に従わないという反例が様々な文献により報告されている。

非加法的な集合関数（非加法的測度）に関する Choquet 積分は、確率測度に関する積分すなわち期待値の自然な拡張として、リスクや不確実性の下での意思決定のモデル化に対する基本的な道具として知られている。例えば、リスク下における意思決定のパラドックスである Allais のパラドックス [1] や不確実性の下でのパラドックスである Ellsberg のパラドックス [6] などは Choquet 期待効用モデルによって説明することができる。具体的には、Allais のパラドックスについては、Quiggin [9] がランク依存型モデルを提唱し、Ellsberg のパラドックスについては Schmeidler[12] が Choquet 期待効用モデルを提唱している。その後、Chateauneuf[2] は、効用関数を用いない単純化を提案している。

本論文は、Choquet-Stieltjes 積分を新たに定義し、Choquet-Stieltjes 積分に対しある非加法的測度が存在し、Choquet-Stieltjes 積分が通常の Choquet 積分で表されることを見る。また、その応用として、Choquet 期待効用モデル（ランク依存型モデル）が本質的にその単純化と同じであることを示し、また、この単純化でも Choquet 積分の記述能力は変わらないこと、すなわち、種々のパラドックスの説明が充分にできることも示す。

この論文の構成は以下のようである。第２章では非加法的測度と Choquet 積分に関する基本的な定義と性質を示す。ここで、ある条件を満たす汎関数の Choquet 積分表現の定理を紹介する。

第３章で古典的な期待効用理論に反する反例を紹介し、単純化された Choquet 期待効用モデルによりこれらの反例が説明できることをみる。

第４章では Choquet-Stieltjes 積分を導入し、第２章で紹介した表現定理を用いて Choquet-Stieltjes 積分が別の非加法的測度に関する Choquet 積分で表されることをみる。

ここで、その証明は紙面の都合で省略し、方針のみ示すことにする。

第5章で第3章で紹介されたパラドックスの解決の一例を紹介する。

2 非加法的測度と Choquet 積分

ここでは、非加法的測度と Choquet 積分に関する基本的定義と性質を紹介する。ここで S は全体集合とし、$\mathcal{S}$ は S の $\sigma-$ algebra とする。すなわち、$(S,\mathcal{S})$ は可測空間である。

非加法的測度はその研究分野により様々な名前で呼ばれてきた。たとえば、ファジィ測度 [14]、協力ゲーム、容量、非加法的主観確率 [12] などである。ここでは、Denneberg [?] のモノグラフに従い、非加法的測度と呼ぶことにする。

定義 2.1.

$(S,\mathcal{S})$ を可測空間とする。非加法的測度 μ とは実数値集合関数 $\mu:\mathcal{S}\longrightarrow R^+$ で以下の条件を満たすものである。

(1) $\mu(\emptyset)=0$

(2) $A\subset B,\ A,B\in\mathcal{S}$ であるとき $\mu(A)\le\mu(B)$.

$\mathcal{F}(S)$ を非負値可測関数の集合とする。すなわち、

$$\mathcal{F}(S)=\{f|f:S\to R^+, f:\text{measurable}\}$$

である。以下に $\mathcal{F}(S)$ 上の汎関数である Choquet 積分を定義しよう。

定義 2.2. [3, 7] μ を $(S,\mathcal{S})$ 上の非加法的測度とする。$f\in\mathcal{F}(S)$ の μ に関する Choquet 積分は以下の式で定義される。

$$(C)\int f d\mu=\int_0^\infty \mu_f(r)dr,$$

ここで、 $\mu_f(r)$ は分布関数 $\mu_f(r)=\mu(\{x|f(x)\ge r\})$ である。

S が有限の時、すなわち $S=\{1,2,\ldots,n\}$ と仮定できるとき i–th order statistic $x^{(i)}$ [15] とは $[0,1]^n$ 上の汎関数で要素 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$ を小さいものから順に並べたものとして定義される。すなわち、

$$x^{(1)}\le\cdots\le x^{(i)}\le\cdots\le x^{(n)}$$

である。

i–th order statistics をつかうと, Choquet 積分は $x^{(0)}:=0$ と定義すると

$$(C)\int x d\mu=\sum_{i=1}^n (x^{(i)}-x^{(i-1)})\mu(\{(i)\cdots(n)\}),$$

と書ける。

定義 2.3. [4] $f, g \in \mathcal{F}(S)$ とする。

f と g が 共単調 (*comonotonic*) であるとは、$x, x' \in S$ に対して

$$f(x) < f(x') \Rightarrow g(x) \leq g(x')$$

であるときを言う。

定義 2.4. I は $\mathcal{F}(S)$ 上の汎関数とする。I が共単調加法的 (*comonotonically additive*) とは、共単調な関数 $f, g \in \mathcal{F}(S)$ に対して加法性：$I(f+g) = I(f) + I(g)$ が成り立つ時をいう。

また、I が単調 (*monotone*) であるとは、$f, g \in \mathcal{F}(S)$ に対して $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$ が成り立つことをいう。

Choquet 積分が $\mathcal{F}(S)$ 上の単調で共単調加法的な汎関数であることはよく知られている。さて、次に単調性をやや弱めた性質である共単調限定単調性を紹介しよう。

定義 2.5. *[8]* $\mathcal{F}(S)$ 上の汎関数 I が共単調限定単調であるとは、互いに共単調な $f, g \in \mathcal{F}(S)$ に対して $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$ が成り立つことをいう。

以下では、$\mathcal{F}(S)$ 上の汎関数 I は互いに共単調な可測関数の集合上で加法的で単調、すなわち、共単調加法的かつ共単調限定単調 (comonotonically additive and comonotonic monotone) であるとき省略して c.a.c.m. と言うことにする。

次の定理は Schmeidler の有名な表現定理の条件をやや弱めたものとなっている。

定理 2.6. I が $\mathcal{F}$ 上の *c.a.c.m.* 汎関数であるための必要十分条件は非加法的測度 μ が存在してすべての $f \in \mathcal{F}(S)$ に対して

$$I(f) = (C)\int f d\mu$$

と表されることである.

3 不確実性下およびリスク下における意思決定

はじめに、意思決定問題を定式化していくことにする。全体集合 S は状態の集合、すなわち、起こりうる可能性全体の集合とする。また、集合 X は結果の集合とし、たとえば、これは金銭で計るとして、これは実数の部分集合であるとする。S から X への関数 f の集合を $\mathcal{F}$ とおき、これを行為の集合という。S から X への関数 f の集合を $\mathcal{F}$ とおき、これを行為の集合という。また、この行為の集合上に弱順序である選好関係 $\prec$ が入っているものとする。不確実性下における意思決定問題とは、S 上に客観的な確率が与えられて

いないような決定問題をいい、4 項組 $(S, X, \mathcal{F}, \prec)$ を不確実性下における意思決定問題の枠という。一方リスク下における意思決定問題とは、S 上に客観的な確率 $\mathcal{P}$ が与えられてる決定問題をいい行為の集合 $\mathcal{F}$ は確率変数であり、5 項組 $(S, X, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \prec)$ をリスク下における意思決定問題の枠という。

リスク下の意思決定において最も基本的な規範は単純な期待値を考える単純期待値規範であろう。すなわち期待金額の大小で行為 $\mathcal{F}$ 上の $\prec$ を定めるものである。しかし、それに対しては以下に示す St. Petersburg の賭のパラドックスが良く知られている。

例 1. *(St. Petersburg の賭)* 硬貨を投げて「表」が出る限り次にまた硬貨を投げることができるとともに、終了時にそれまで投げた回数 n に対し 2^n 円受け取れる賭けがある。

$S := \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ で賭けの行われる回数、X はもらえる金額で行為 f として n 回目に 2^n 円受け取る、すなわち、$f(n) = 2^n$ とする。このとき、n 回で終了する確率 P は $P(n) = 1/(2^n)$ でこのときの期待金額 $E_P(f)$ は

$$E_P(f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \times (1/2^n) = \infty$$

である。単純期待値規範ではこの賭けの参加量が有限であればこの賭けにであれば、この賭けに参加すべしと言う結論になる。

D.Bernoulli は期待値は金額そのものについて求めるられるべきではなく、金銭のもつ主観的な価値について期待値が求められるべきであると主張した。これが期待効用理論である。すなわち、結果の集合 X から実数の集合 R への関数 u を考え,確率変数 $u(f(x))$ の期待値を考えるのである。この関数を X 上の効用関数といい、期待値 $E_P(u(f))$ を期待効用 (Expected utility) という。

リスク下における意思決定の選好が期待効用で表現されるための公理系は von Neumann-Morgenstern [5] によって作り上げられた。

一方、リスク下における期待効用理論の反例として Allais [1] は以下のパラドックスを発表した。

例 2. *(Allais paradox [1])* 状態空間を $S := \{1, 2, \ldots, 100\}$ として、結果の集合を $X := \{0, 100, 200\}$ とする。確率変数 f_1, f_2, f_3, f_4 を $f_1(x) := 100$ *for all* $x \in S$, $f_2(x) := \begin{cases} 200 & 1 \leq x \leq 70 \\ 0 & 71 \leq x \leq 100, \end{cases}$,

$f_3(x) := \begin{cases} 100 & 1 \leq x \leq 15 \\ 0 & 16 \leq x \leq 100 \end{cases}$

$f_4(x) := \begin{cases} 200 & 1 \leq x \leq 10 \\ 0 & 11 \leq x \leq 100. \end{cases}$ で定義する。

f_1 は常に *100* ドルもらえる事を表し、f_2 は *1* から *70* までの番号をひいたら *200* ドルもらえ、*71* から *100* までの番号をひいたら何ももらえないことを表している。

少なからぬ数の人々が f_1 を選ぶことが知られている。すなわち、$f_2 \prec f_1$ である。同様にして f_3 は 1 から *15* までの番号をひいたら *100* ドルもらえ残りの番号がはずれ、f_4 は 1 から *10* までの番号をひいたら *200* ドルもらえ残りの番号がはずれということを意味する。このときは、今度は f_4 を選択する人々が多い。すなわち、$f_3 \prec f_4$ である。もし、各番号の出現する確率が同じであるとする、すなわち、全ての $i \in S$ について $P(i) = \frac{1}{100}$ であるとすると、この選好はもはや期待効用では表せない。

実際、もし効用関数 u が存在して $f \prec g \Leftrightarrow E_P(u(f)) < E_P(u(g))$, となったとする。$f_2 \prec f_1$ であるから、$0.7u(200) < u(100)$ である。一方、$f_3 \prec f_4$ より $0.15u(100) \prec 0.1u(200)$ となる。したがって $1.05u(100) < 0.7u(200) < u(100)$ であり、これは矛盾である。

確率が与えられていない不確実下における意思決定についてはSavege [11] が公理系を提唱し、選好関係がその公理系を満たすなら主観確率が存在して、その選好を期待効用で表現できることを示した。不確実性下における期待効用理論の反例としては、次の Ellesberg [6] の反例がある。

例 3. 赤と黒と白の玉が入っている壷を考える。赤玉の個数は *30* 個, 黒と白はあわせて *60* 個　あ　　黒、白それぞれ個別の個数は分らない　ここ　、この壷の中から玉を取り出すことを考える。f_R は赤玉を取り出した時のみ *100* ドルもらえ f_B が黒玉を取り出したときのみ *100* ドルもらえることを表すものとする。このとき、少なからぬ数の人々が f_R を選ぶ。それは、黒玉がほとんど入っていないかもしれないからである。すなわち、$f_B \prec f_R$. 次に、f_{RW} は赤玉か白玉を取ったときのみ *100* ドルもらえ、f_{BW} は黒か白の玉を取り出したとき *100* ドルもらえるものとする。今度は、白玉の個数が少ないかもしれないので、多くの人が f_{BW} を選ぶ。すなわち、$f_{RW} \prec f_{BW}$ である。

この選好は期待効用で表現することはできない。実際、状態空間を $S := \{R, B, W\}$ 、結果の集合を $X := \{0, 100\}$ とし、行為 f_R, f_B, f_{RW} , f_{BW} は下の表のように表すことができる。

主観確率 P が存在して $f \prec g \Leftrightarrow E_P(u(f)) < E_P(u(g))$. とする。このとき、$f_{RW} \prec f_{BW}$ から $u(100)P(B) = u(100)(P(BW) - P(W)) > u(100)(P(RW) - P(W)) = u(100)P(R)$ が得られるが、これは $f_B \prec f_R$ と矛盾する。

これらのパラドックスを解決するためにChoquet積分を用いたモデルが提唱されてきた。

	30	60	
	Red	Black	White
f_R	\$ 100	0	0
f_B	0	\$ 100	0
f_{RW}	\$ 100	0	\$ 100
f_{BW}	0	\$ 100	\$ 100

定義 3.1. *[13].* 不確実性下における枠を考える。*Choquet* 期待効用モデル *(CEU)* とは行為を変換する連続で単調増加な効用関数 $u : R \to R$ と非加法的測度 μ があって, 行為 f の選好が以下で定義される $C_{u,\mu}$ で表されるものをいう。

$$C_{u,\mu}(f) := (C)\int u(f)d\mu,$$

すなわち

$$f \prec g \Leftrightarrow C_{u,\mu}(f) < C_{u,\mu}(g)$$

である。

つぎに、リスク下における Quiggin[9] によるランク依存型期待効用を以下に定義しよう。

定義 3.2. リスク下における意思決定問題の枠を考える。意思決定者がランク依存型期待効用モデル *(RDEU)* に従うとは意思決定者の選好 $\prec$ に対して連続で単調な効用関数 u と確率歪化関数 $w : [0,1] \to [0,1]$ が存在し、$J(h) := (C)\int u(h)d(w \circ P)$ とおくと、$f \succ g \Leftrightarrow J(f) > J(g)$ とできることをいう。

4 Choquet-Stieltjes 積分

この章では Choquet-Stieltjes 積分を定義し、Choquet-Stieltjes 積分が 通常の Choquet 積分で表現が可能であることを示す.

この定理の応用として CEU と RDEU が Chateauneuf [2] によるそれらの単純化と同じであることを示す。

定義 4.1. $(S, \mathcal{S})$ を可測空間とし、μ をその上の非加法的測度、$\varphi : R^+ \to R^+$ は非減少関数とする。このとき、以下の式で *Lebesgue-Stieltjes* 測度 ν_φ *[10]* を定義することができる。

$$\nu_\varphi([a,b]) := \varphi(b+0) - \varphi(a-0)$$

$$\nu_\varphi((a,b)) := \varphi(b-0) - \varphi(a+0).$$

このとき μ に関する *Choquet-Stieltles* 積分 $CS_{\mu,\varphi}(f)$ を

$$CS_{\mu,\varphi}(f) := \int_0^\infty \mu_f(r) d\nu_\varphi(r),$$

で定義する。ここで $\mu_f(r) = \mu(\{x|f(x) \geq r\})$. とする。

もしも、全空間が $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ であるとき、i−th order statistics を使って Choquet-Stieltjes 積分は以下の形にかける。

$$CS_{\mu,\varphi}(f) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x^{(i)}) - \varphi(x^{(i-1)}) \mu(\{(i) \cdots (n)\}).$$

Choquet-Stieltjes 積分は共単調加法的で単調であるから, 定理 2.6 の表現定理を応用して, 以下の定理が得られる。

定理 4.2. $(S, \mathcal{S})$ を可測空間として μ を非加法的測度とする。また、$\varphi : R^+ \to R^+$ は非減少関数であるとする。

このとき、非加法的測度 $\nu_{\mu,\varphi}$ が存在し

$$CS_{\mu,\varphi}(f) = (C) \int f d\nu_{\mu,\varphi},$$

が成り立つ。すなわち、*Choquet-Stieltjes* 積分は *Choquet* 積分で表される。

φ が狭義単調増加であるとする。
$\{x|f(x) > \varphi^{-1}(\alpha)\} = \{x|\varphi(f(x)) > \alpha\}$ であるから,

$$(C) \int \varphi(f) d\mu = CS_{\mu,\varphi}(f).$$

それゆえ、以下の系が成り立つ。

系 4.3. μ は可測空間 $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度とし、$\varphi : R^+ \to R^+$ は狭義単調増加であるとする。このとき、非加法的測度 $\nu_{\mu,\varphi}$ が存在して

$$(C) \int \varphi(f) d\mu = (C) \int f d\nu_{\mu,\varphi}.$$

が成り立つ.

CEU(または RDEU) において効用関数 $u : R \to R$ が恒等写像すなわち $u(x) = x$ であるとき、CEU(または RDEU) の単純化という。上の系は CEU (または RDEU) がその単純化と本質的に等しいことを示している。

5 パラドックスの解決

この章では、単純化されたCEU(またはRDEU)によって、3章で紹介したパラドックスは全て解決できることを示す。

例 4.

(1) *(St. Petersburg の賭)*

確率歪化関数 $w : [0,1] \to [0,1]$ で $w(p_1+\cdots+p_n) - w(p_1+\cdots+p_{n-1}) < (p_n)^a, (a > 1)$ となるものをとる。このとき非加法的測度 $\mu := w \circ P$ に関する *Choquet* 積分 C_μ は

$$C_\mu(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n(w(p_1 + \cdots + p_n) - w(p_1 + \cdots + p_{n-1})) < \infty$$

となり、期待値が無限大になるのを防ぐことができる。

(2) *(Allais paradox)*

確率歪化関数 $w : [0,1] \to [0,1]$ を $w(0.1) = 0.08$, $w(0.15) = 0.1$, $w(0.7) = 0.45$ *and* $w(1) = 1$ となるように定義できる。このとき非加法的測度 $\mu := w \circ P$ に関する *Choquet* 積分 C_μ は $C_\mu(f_1) = 100 > C_\mu(f_2) = 90$, $C_\mu(f_3) = 10 < C_\mu(f_4) = 16$ となる。

(3) *(Ellsberg's paradox)*

以下のように非加法的測度 μ を定義することができる:

$\mu(\{R\}) := 1/3$, $\mu(\{B\}) = \mu(\{W\}) := 2/9$,

$\mu(\{R, W\}) := 5/9$,

$\mu(\{B, W\}) = \mu(\{R, B\}) := 2/3$,$\mu(\{R, B, W\}) = 1$. このとき, μ に関する f_* の *Choquet* 積分 C_μ は下の表のようになる。

f_*	f_R	f_B	f_{RW}	f_{BW}
$C_\mu(f_*)$	1/3	2/9	5/9	2/3

この表によれば, $C_\mu(f_B) < C_\mu(f_R)$, $C_\mu(f_{RW}) < C_\mu(f_{BW})$. となり、矛盾はなくなる。

参考文献

[1] M. Allais, Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine, Econometrica 21, (1953), 503-546.

[2] A. Chateauneuf, Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral, *Annals of Operation Research*, 52, (1994), 3–20.

[3] G.Choquet . Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 5, (1955), 131-295.

[4] C. Dellacherie, Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, *Séminaire de Probabilités 1969/1970, Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics,* 191, Springer, 1971, 77- 81.

[5] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.

[6] D. Ellsberg, "Risk ambiguity and the Savage axioms", *Quarterly Journal of Economics*, 75 (1961) 643-669

[7] T. Murofushi and M. Sugeno, "An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure," *Fuzzy Sets and Systems*, 29 , (1989), 201-227.

[8] Yasuo Narukawa and Toshiaki Murofushi, Choquet integral representation and preference, Proc. 9th Intern. Conf. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU 2002) Annecy, (2002) 747-753.

[9] J. Quiggin, "A Theory of Anticipated Utility," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, 1982, pp 323-343.

[10] F. Riesz, & B. Nagy, *Functional analysis*, Frederick Unger Publishing, New York, 1955.

[11] L. J. Savage, *The Founfation of Statistics,* Wiley (1954).

[12] D. Schmeidler, "Integral representation without additivity," *Proceedings of the American Mathematical Society,* 97 , (1986), 253-261.

[13] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, 57, (1989), 517-587.

[14] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, (1974).

[15] B. L. van der Waerden, *Mathematical statistics*, Springer, Berlin, 1969.