数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 151-160

エキゾチック LIBOR デリバティブズの価格付けとそのキャリブレーション (Pricing of Exotic LIBOR Derivatives and Its Caribration)

伊藤大介 (Daisuke ITO)
大阪大学 基礎工学研究科 (Graduate School of Engineering Science, Osaka University)
大西匡光 (Masamitsu OHNISHI)
大阪大学 大学院経済学研究科 (Graduate School of Economics, Osaka University)
京都大学 大学院経済学研究科 (Graduate School of Economics, Kyoto University)
丹波靖博 (Yasuhiro TAMBA)
大阪大学 大学院経済学研究科 (Graduate School of Economics, Osaka University)

1 目的

キャプレットやフロアレットなどのシンプルな金利デリバティブの市場価格に基づいて, エキゾチック金利デリバティブ, その中でも特に Chooser–Caps と Chooser–Floors の価格付けを行う問題を考える.

2 金利に関する諸定義

- $\mathbb{T}^* := [0, T^*]$ ($T^* \in \mathbb{R}_{++}$): 有限の計画期間;
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$: フィルター付けされた確率空間, ただし, $\mathbb{F} := (\mathcal{F}(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ は通常条件を満たす 1 次元 Brown 運動フィルトレーション;
- $W := (W(t) : t \in \mathbb{T}^*)$: 1 次元標準 $(\mathbb{P}; \mathbb{F})$–Brown 運動;
- $D(t, T)$ $(: \Omega \to \mathbb{R}_+)$, $0 \le t \le T \le T^*$: (満期 T において 1 単位の貨幣を支払う) T–割引き債の時刻 t での価格 (もちろん $D(T, T) = 1$, $T \in \mathbb{T}^*$);

- $0 \le t \le S < T \le T^*$ に対して, 時刻 t で評価される, 時間区間 $(S, T]$ をカバーする (連続複利に基づく) フォワード・レートを,

$$R(t; S, T) := -\frac{\ln D(t,T) - \ln D(t,S)}{T - S} \tag{1}$$
$$\left(\Longleftrightarrow \exp\{R(t;S,T)(T-S)\} = \frac{D(t,S)}{D(t,T)}\right)$$

で定義する;

- $0 \le t < T \le T^*$ に対して, 時刻 t で評価される, 時間区間 $(t, T]$ をカバーする (連続複利に基づく) スポット・レート, あるいはイールドを,

$$Y(t,T) := R(t;t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln D(t,T) \tag{2}$$
$$\left(\Longleftrightarrow \exp\{Y(t,T)(T-t)\} = \frac{1}{D(t,T)}\right)$$

で定義する. 写像 $T \mapsto Y(t,T)$ を (時刻 t における) イールド・カーブと言う;

- $0 \le t \le T \le T^*$ に対して, 時刻 t で評価される, 満期 T における (瞬間) フォワード・レートを,

$$f(t,T) := \lim_{U \downarrow T} R(t;T,U) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln D(t,T) \tag{3}$$

で定義する. 写像 $T \mapsto f(t,T)$ を (時刻 t における) フォワード・レート・カーブと言う;

- $t \in \mathbb{T}^*$ に対して,

$$r(t) := f(t,t) = \lim_{T \downarrow t} Y(t,T) = -\left.\frac{\partial}{\partial T}\ln D(t,T)\right|_{T=t} \tag{4}$$

を, 時刻 t における (スポット・) ショート・レートと言う;

- $0 \le t \le T \le T^*$ に対して,

$$B(t,T) := \exp\left\{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\} \tag{5}$$

を, 初期時刻 t での投資資金を 1 とする無リスク預金勘定 ($B(t,t) = 1$);

- $N \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$0 \le T_0 < T_1 < \cdots < T_i < T_{i+1} < \cdots < T_{N-1} < T_N \le T^* \tag{6}$$

を変動利息 (クーポン) の設定時刻と利払い時刻の列, すなわち, $i = 0, \cdots, N-1$ に対して, 時間区間 $(T_i, T_{i+1}]$ をカバーする利息は時刻 T_i において設定される. 簡単のため,

$$T_{i+1} - T_i = \alpha \ (= \text{constant} \in \mathbb{R}_{++}), \quad 0, \cdots, N-1; \tag{7}$$

- $i = 0, \cdots, N-1$ に対して, 時刻 T_i において設定される, 時間区間 $(T_i, T_{i+1}]$ をカバーする利息を, (スポット) LIBOR (London Inter–Bank Offered Rate):

$$L(T_i, T_{i+1}) := \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{D(T_i, T_{i+1})} - 1\right\}; \tag{8}$$

- $i = 0, \cdots, N-1$ に対して, 時刻 t $(\in [0, T_i])$ において評価される, 時間区間 $(T_i, T_{i+1}]$ をカバーする利息を, フォワード LIBOR:

$$L(t; T_i, T_{i+1}) := \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{D(t, T_i)}{D(t, T_{i+1})} - 1\right\}, \tag{9}$$

このとき,

$$L(T_i; T_i, T_{i+1}) = L(T_i, T_{i+1}); \tag{10}$$

- i–キャプレット (Caplet): 時間区間 $(T_i, T_{i+1}]$ をカバーする LIBOR $L(T_i, T_{i+1})$ が, 予め定められた上限金利レート (行使レート) K $(\in \mathbb{R})$ を上回った場合に, 時刻 T_{i+1} において, その差に相当する金額

$$\alpha[L(T_i, T_{i+1}) - K]_+ \ \ (= \alpha \max\{L(T_i, T_{i+1}) - K, 0\}) \tag{11}$$

を, 売り手が買い手に支払う契約;

- i–フロアレット (floorlet): 時間区間 $(T_i, T_{i+1}]$ をカバーする LIBOR $L(T_i, T_{i+1})$ が, 予め定められた下限金利レート (行使レート) K $(\in \mathbb{R})$ を下回った場合に, 時刻 T_{i+1} において, その差に相当する金額

$$\alpha[K - L(T_i, T_{i+1})]_+ \ \ (= \alpha \max\{K - L(T_i, T_{i+1}), 0\}) \tag{12}$$

を, 売り手が買い手に支払う契約.

3 リスク中立評価法

- 市場で取引可能な資産の価格 $S = (S(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ が確率微分方程式:

$$\mathrm{d}S(t) = \mu(t)S(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)S(t)\mathrm{d}W(t), \quad t \in \mathbb{T}^* \tag{13}$$

に従うものとする;

- $B = (B(0,t) : t \in \mathbb{T}^*)$ をニューメレールとする $S = (S(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ の相対価格過程を

$$S^*(t) = \frac{S(t)}{B(0,t)}, \quad t \in \mathbb{T}^* \tag{14}$$

で定義すると, $S^* = (S^*(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ の満たす確率微分方程式は

$$\mathrm{d}S^*(t) = \{\mu(t) - r(t)\}S^*(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)S^*(t)\mathrm{d}W(t), \quad t \in \mathbb{T}^*; \tag{15}$$

- もとの確率測度 $\mathbb{P}$ のもとで, ドリフトを持つ Brown 運動を

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \left\{\frac{\mu(s) - r(s)}{\sigma(s)}\right\} \mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{T}^* \tag{16}$$

と定義することにより, (14) 式は

$$\mathrm{d}S^*(t) = \sigma(t)S^*(t)\mathrm{d}W^*(t), \quad t \in \mathbb{T}^* \tag{17}$$

を満たす;

- (16) 式で定義される $W^* = (W^*(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ を (ドリフトを持たない) 1 次元標準ブラウン運動にする, 確率測度 $\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{P}^*$ に関して, 相対価格過程 S^* はマルチンゲールとなる;

- 満期 T $(\in \mathbb{T}^*)$ において, $\mathcal{F}(T)$–可測な確率変数 $G(T)$ で表されるペイオフを支払う条件付き請求権 (Contingent Claim) の, 時刻 t $(\in [0,T])$ における適正価格 $G(t)$ は, その複製可能性を仮定すれば,

$$\frac{G(t)}{B(0,t)} = \mathbb{E}^*\left[\left.\frac{G(T)}{B(0,T)}\right|\mathcal{F}(t)\right], \tag{18}$$

あるいは,

$$G(t) = \mathbb{E}^*\left[\left.\frac{G(T)}{B(t,T)}\right|\mathcal{F}(t)\right] \tag{19}$$

と評価される;

- 市場に無裁定条件を仮定した上で, 市場で取引きされるすべての資産の相対価格を, 同時にマルチンゲールにする (リスク中立確率測度と呼ばれる) 確率測度 $\mathbb{P}^*$ を利用して, 条件付き請求権の価格付けを行う方法を, リスク中立評価法 (Risk Neutral Evaluation Method) という.

4 割引き債の無裁定価格

- リスク中立確率測度 $\mathbb{P}^*$ の下で, ショート・レート過程 $r = (r(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ が, 拡散過程型 (Markov 的) 確率微分方程式

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(r(t), t)\mathrm{d}t + \sigma(r(t), t)\mathrm{d}W^*(t), \quad t \in \mathbb{T}^* \tag{20}$$

に従うものとする, ただし, ドリフト係数 $\mu(r,t)$ と拡散係数 $\sigma(r,t)$ は, 適当な正則条件を満たす, r と t の確定的な関数である;

- ショート・レート過程 $r = (r(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ は Markov 過程となるので, リスク中立評価法によれば,

$$\begin{aligned} D(t,T) &= \mathbb{E}^*\left[\left.\frac{1}{B(t,T)}\right|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= \mathbb{E}^*\left[\left.\exp\left\{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}\right| r(t)\right] \\ &=: D(t,T;r(t)), \quad 0 \le t \le T \le T^*; \end{aligned} \tag{21}$$

- (20) 式において, ドリフト係数関数 $\mu(r,t)$ と拡散係数関数 $\sigma(r,t)$ が,

$$\mu(r,t) = m_0(t) + m_1(t)r; \tag{22}$$

$$\frac{\sigma^2(r,t)}{2} = s_0(t) + s_1(t)r \tag{23}$$

の形を持つものとする. このとき, T–割引き債の時刻 t での価格 $D(t,T;r(t))$ は次式 (アフィン期間構造 (Affine Term Structure: ATS) で与えられる:

$$D(t,T;r(t)) = \exp\{-a(t,T) - b(t,T)r(t)\}, \quad 0 \le t \le T \le T^*. \tag{24}$$

ただし, $a(t,T)$ と $b(t,T)$ は, 終端条件:

$$a(T,T) = 0; \tag{25}$$

$$b(T,T) = 0 \tag{26}$$

の下での連立微分方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}a(t,T) = -m_0(t)b(t,T) + s_0(t)\{b(t,T)\}^2; \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}b(t,T) = 1 - m_1(t)b(t,T) + s_1(t)\{b(t,T)\}^2 \tag{28}$$

の解である;

- このとき, フォワードレートは

$$\begin{aligned} f(t,T;r(t)) &:= -\frac{\partial}{\partial T}\ln D(t,T;r(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial T}a(t,T) + r(t)\frac{\partial}{\partial T}b(t,T), \quad 0 \le t \le T \le T^*. \end{aligned} \tag{29}$$

4.1 Hull–White モデル

- ショート・レート過程 $r = (r(t) : t \in \mathbb{T}^*)$ が, リスク中立確率測度 $\mathbb{P}^*$ の下でアフィン期間構造型の確率微分方程式:

$$\mathrm{d}r(t) = \{\alpha(t) - \beta r(t)\}\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W^*(t), \quad t \in \mathbb{T}^* \tag{30}$$

に従うものと仮定する, すなわち,

$$m_0(t) = \alpha(t), \qquad m_1(t) = -\beta; \tag{31}$$

$$s_0(t) = \frac{\sigma^2}{2}, \qquad s_1(t) = 0 \tag{32}$$

のとき, このショート・レート過程モデルは Hull–White モデルと呼ばれる;

- T–割引き債の時刻 t における価格は

$$D(t,T;r(t)) = \exp\{-a(t,T) - b(t,T)r(t)\}, \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*, \tag{33}$$

ただし,

$$a(t,T) = -\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T \{b(s,T)\}^2 \mathrm{d}s + \int_t^T \alpha(s)b(s,T)\mathrm{d}s; \tag{34}$$

$$b(t,T) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\beta(T-t)}}{\beta}; \tag{35}$$

- このとき, フォワードレートは

$$\begin{aligned} f(t,T;r(t)) &= \frac{\partial}{\partial T}a(t,T) + r(t)\frac{\partial}{\partial T}b(t,T) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}\{b(t,T)\}^2 + \int_t^T \alpha(s)\frac{\partial}{\partial T}b(s,T)\mathrm{d}s + r(t)\frac{\partial}{\partial T}b(t,T) \\ &\quad 0 \leq t \leq T \leq T^*. \end{aligned} \tag{36}$$

5 Chooser–Caps の価格付け

- Chooser–Caps とは, 設定時刻 T_i, 支払い時刻 T_{i+1} を持つ LIBOR に書かれた i–キャプレット $(i = 0, \cdots, N-1)$ N 個のうち, ℓ 個 $(1 \leq \ell \leq N)$ のみ行使可能であるデリバティブ, ただし, その選択はダイナミック, かつ適合的に意思決定して良い;

- $W(T_i, r(T_i), \ell)$: 時刻 T_i において行使可能回数が ℓ の Chooser–Caps の適正価格;

5.1 最適性方程式

(i) $i = N-1$ のとき (終端条件):

$$W(T_{N-1}, r(T_{N-1}), \ell) = D(T_{N-1}, T_N)\alpha[L(T_{N-1}, T_N) - K]_+, \quad \ell = 1, \cdots, N; \tag{37}$$

(ii) $i = N-2, \cdots, 0$ のとき:

$$\begin{aligned} &W(T_i, r(T_i), \ell) \\ &= \max\left\{\begin{array}{l} D(T_i, T_{i+1})\alpha[L(T_i, T_{i+1}) - K]_+ + \mathbb{E}^*\left[\left.\dfrac{W(T_{i+1}, r(T_{i+1}), \ell-1)}{B(T_i, T_{i+1})}\right| r(T_i)\right], \\ \mathbb{E}^*\left[\left.\dfrac{W(T_{i+1}, r(T_{i+1}), \ell)}{B(T_i, T_{i+1})}\right| r(T_i)\right] \end{array}\right., \\ &\quad \ell = 1, \cdots, N, \end{aligned} \tag{38}$$

ただし,

$$W(T_i, r(T_i), 0) = 0, \quad i = 0, \cdots, N-1. \tag{39}$$

6 Chooser–Floors の価格付け

- Chooser–Floors とは, 設定時刻 T_i, 支払い時刻 T_{i+1} を持つ LIBOR に書かれた i–フロアレット ($i = 0, \cdots, N-1$) N 個のうち, ℓ 個 ($1 \le \ell \le N$) のみ行使可能であるデリバティブ, ただし, その選択はダイナミック, かつ適合的に意思決定して良い; ;
- $V(T_i, r(T_i), \ell)$: 時刻 T_i において行使可能回数が ℓ の Chooser–Floors の適正価格;

6.1 最適性方程式

(i) $i = N-1$ のとき (終端条件):

$$V(T_{N-1}, r(T_{N-1}), \ell) = D(T_{N-1}, T_N)\alpha[K - L(T_{N-1}, T_N)]_+, \quad \ell = 1, \cdots, N; \tag{40}$$

(ii) $i = N-2, \cdots, 0$ のとき:

$$\begin{aligned} &V(T_i, r(T_i), \ell) \\ &= \max\left\{\begin{array}{l} D(T_i, T_{i+1})\alpha[K - L(T_i, T_{i+1})]_+ + \mathbb{E}^*\left[\left.\dfrac{V(T_{i+1}, r(T_{i+1}), \ell-1)}{B(T_i, T_{i+1})}\right| r(T_i)\right], \\ \mathbb{E}^*\left[\left.\dfrac{V(T_{i+1}, r(T_{i+1}), \ell)}{B(T_i, T_{i+1})}\right| r(T_i)\right] \end{array}\right., \\ &\quad \ell = 1, \cdots, N, \end{aligned} \tag{41}$$

ただし,

$$V(T_i, r(T_i), 0) = 0, \quad i = 0, \cdots, N-1. \tag{42}$$

7 キャプレットとフロアレットの理論価格

- i—キャプレットの時刻 t $(\in [0, T_i])$ における適正な理論価格 $Cpl(t, T_i)$ は, リスク中立評価法により, リスク中立確率測度 $\mathbb{P}^*$ の下での期待値計算に帰着され,

$$Cpl(t, T_i) = \mathbb{E}^* \left[\left. \frac{\alpha[L(T_i, T_{i+1}) - K]_+}{B(t, T_{i+1})} \right| \mathcal{F}(t) \right], \quad 0 \le t \le T_i, \tag{43}$$

したがって,

$$Cpl(t, T_i) = \alpha D(t, T_{i+1}) \left[\overline{L}(t, T_i) \Phi(d(t, T_i)) - \overline{K} \Phi(d(t, T_i) - \nu(t, T_i)) \right], \tag{44}$$

ここで, $\overline{L}(t, T_i)$, $\Phi(d)$, $\overline{K}$, $d(t, T_i)$, $\nu(t, T_i)$ は, それぞれ以下で与えられる:

$$\overline{L}(t, T_i) := L(t, T_i) + \frac{1}{\alpha}, \tag{45}$$

$$\Phi(d) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x, \tag{46}$$

$$\overline{K} := K + \frac{1}{\alpha}, \tag{47}$$

$$d(t, T_i) := \frac{\ln \left(\overline{L}(t, T_i) / \overline{K} \right)}{\nu(t, T_i)} + \frac{\nu(t, T_i)}{2}, \tag{48}$$

$$\{\nu(t, T_i)\}^2 := \frac{\sigma^2}{\beta^2} \left\{ -4t - \frac{7}{2\beta} - \frac{5}{2\beta} \mathrm{e}^{-\beta(T_{i+1} - T_i)} + \frac{1}{2\beta} \mathrm{e}^{-2\beta(T_{i+1} - T_i)} - \frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{-2\beta(T_i - t)} + \frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{-\beta(T_i + T_{i+1} - 2t)} \right\} \tag{49}$$

- 同様に i–フロアレットの時刻 t $(\in [0, T_i])$ における適正な理論価格 $Fll(t, T_i)$ は, リスク中立評価法により,

$$Fll(t, T_i) = \mathbb{E}^* \left[\left. \frac{\alpha[K - L(T_i, T_{i+1})]_+}{B(t, T_{i+1})} \right| \mathcal{F}(t) \right], \quad 0 \le t \le T_i, \tag{50}$$

したがって,

$$Fll(t, T_i) = \alpha D(t, T_{i+1}) \left[-\overline{L}(t, T_i) \Phi(-d(t, T_i)) + \overline{K} \Phi(\nu(t, T_i) - d(t, T_i)) \right]. \tag{51}$$

8 キャリブレーション

Hull–White モデルのパラメータ (関数) $\alpha(\cdot)$, β, σ の推定・同定は, 以下通りに実行することができる:

- フォワード・レートの理論式:

$$\begin{aligned} f(t,T;r(t)) &= \frac{\partial}{\partial T}a(t,T) + r(t)\frac{\partial}{\partial T}b(t,T) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}\{b(t,T)\}^2 + \int_t^T \alpha(s)\frac{\partial}{\partial T}b(s,T)\mathrm{d}s + r(t)\frac{\partial}{\partial T}b(t,T) \\ &\quad 0 \le t \le T \le T^* \end{aligned} \tag{52}$$

を $\alpha(\cdot)$ について解けば,

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= \frac{\partial}{\partial T}\left[f(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\{b(t,T)\}^2\right] - \beta\left[f(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\{b(t,T)\}^2\right] \\ &\quad 0 \le t \le T \le T^*; \end{aligned} \tag{53}$$

- 現在の時刻 t_0 $(\in [0,T^*])$ において市場において観測されるフォワード・レート・カーブを

$$f_{\mathrm{mkt}}(t_0,T), \quad t_0 \le T \le T^* \tag{54}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathrm{mkt}}(T) &:= \frac{\partial}{\partial T}\left[f_{\mathrm{mkt}}(t_0,T) + \frac{\sigma^2}{2}\{b(t_0,T)\}^2\right] - \beta\left[f_{\mathrm{mkt}}(t_0,T) + \frac{\sigma^2}{2}\{b(t_0,T)\}^2\right] \\ &\quad t_0 \le T \le T^* \end{aligned} \tag{55}$$

と, 決定すべき未知パラメータ β, σ を用いて, 与えることができる;

- 残された未知パラメータ β, σ の推定・同定は, 例えば, 次の評価関数:

$$\begin{aligned} C(\beta,\sigma) &:= w_1\sum_i |D(t,T_i)_{\mathrm{mkt}} - D(t,T_i)_{\mathrm{mdl}}|^2 \\ &\quad + w_2\sum_i |Cpl(t,T_i)_{\mathrm{mkt}} - Cpl(t,T_i)_{\mathrm{mdl}}|^2 \\ &\quad + w_3\sum_i |Fll(t,T_i)_{\mathrm{mkt}} - Fll(t,T_i)_{\mathrm{mdl}}|^2 \end{aligned} \tag{56}$$

が最小化されるように決定すればよい. ここで

- $D(t,T_i)_{\mathrm{mkt}}$, $Cpl(t,T_i)_{\mathrm{mkt}}$, $Fll(t,T_i)_{\mathrm{mkt}}$: i 番目の割引き債, キャプレット, フロアレットの市場で観測される価格;
- $D(t,T_i)_{\mathrm{mdl}}$, $Cpl(t,T_i)_{\mathrm{mdl}}$, $Fll(t,T_i)_{\mathrm{mdl}}$: i 番目の割引き債, キャプレット, フロアレットの理論価格;
- w_1, w_2, w_3 $(\in \mathbb{R}_+)$ $(w_1+w_2+w_3=1)$: 重み付け係数,

である.

参考文献

[1] 木島正明, 期間構造モデルと金利デリバティブ, 朝倉書店 (1999).

[2] L. Andersen, "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaption in the Multifactor LIBOR Market," *Journal of Computational Finance*, 60–67, December (1998).

[3] P. Balland and L. P. Hughston, "Markov Market Model Consistent with Cap Smile," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3 (2), 161–181 (2000).

[4] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 1998.

[5] L. Clewlow and C. Strickland, *Implementing Derivatives Models*, John Wiley and Son Publishing (1998).

[6] D. Filipović, *Fixed Income Models*, Lecture Note ORF555/FIN555, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, Fall, 2002.

[7] J. Hull and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 87–100 (1990).

[8] J. Hull and A. White, "One Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 235–254 (1993).

[9] J. Hull and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models : Single–Factor Models," *The Journal of Derivatives*, Fall, 7–16 (1994).

[10] P. Hunt, J. Kennedy, and A. Pelsser, "Markov–Functional Interset Rate Models," *Finance and Stochastics*, 4, 391–408 (2000).

[11] F. Longstaff and E. Schwarz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least–Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1, 113–147 (1998).

[12] M. Pedersen and J. Sidenius, "Valuation of Flexible Caps," *The Journal of Derivatives*, Spring, 60–67 (1998).