

確率過程とゲーム理論による Composite Mathematical Finance Model について

早稲田大学 商学部, 理工学部 数理科学研究所

毛利 裕昭 (Hiroaki Mohri)

School of Commerce, Waseda Institute of Mathematics

Waseda University.

mohri@waseda.jp, mohri@member.ams.org

1 はじめに

1.1 研究の動機

数理ファイナンスモデルの有効性は日本でも多くのファイナンスの実務家に認知されているように思われる。しかし、確率・統計の多くの理論が誤って使用される例は枚挙にいとまがなく、確率・統計手法に通じている実務家や応用畑の研究者さえも誤って使用する例も多い。対象分野は医学のため、これから取り上げる数理モデルに直接関係しないが、浜田 [7] が統計学の誤用が鋭く指摘されてしている。明らかな誤用は避けるべきである。しかしながら、厳密性を追求するあまり、応用範囲が非常に狭くなるのも問題であると考えられる。さらに数学的にラフな議論から新しい数学が生まれることもあり得る。そのようなことが本稿執筆のきっかけになっている。

さて、数理ファイナンスの代表的な古典的数理モデルは、Markowitz[6] (1953) の二次数理計画モデルで表現されたポートフォリオ選択問題と Black and Sholes [1](1973) そして Merton[4](1973) によってオプションの評価に用いられた確率微分方程式モデルであることには異論を唱える人はいないであろう。

本稿で取り上げるのは後者の確率微分方程式モデルを含む確率過程モデルである。確率微分方程式に関する理論は、精緻に構築されている。Ito Calculus を、数理科学を学ぶものであればその美しい性質を利用したくなるのは当然といえよう。しかし、ファイナンスという文脈でそれをとらえた時、それが実際に「役に立つ数学」になりうるかは、それを使用する状況に依存することは言うまでもない。ここでは、確率微分方程式モデルが上手く機能しない日本金融市場の例を挙げ、それをラフな数学的議論で解決するための数理的分析の枠組みについて提案する。

尚、本稿は既存理論の組合せによる応用の次元にとどまっている。しかしながら、筆者はここから新たな理論が生まれる可能性が高いと考える。そのため、本稿は「見逃されているのでは」と筆者が考える問題提起論の色彩が強く、一般的な論文の形式をとっていない。

1.2 日本の金融市場の一断面と確率微分方程式モデルの限界

数理ファイナンスモデルの理論と実証は主に欧米で進展してきた。私のようなファイナンスの素人であっても、欧米の金融市場には多くの一般投資家が参加していることは知っている。一方、日本の金融市場はどうであろうか？ 日本でも一般投資家が増加してきたとはいえ、欧米ほどには至っていないというのが一般論であろう。詳細な議論は日本経済史、日本経営史の専門の研究者に任せるが、日本の金融市場を考察する時、日本企業の欧米にはあまりない特徴を考えざる得ない状況が歴史的に存在する。つまり、日本の戦前には財閥が存在し、戦後すぐに財閥解体が行われた。しかし、財閥そのものが幾つかの大きな企業に分かれただけで、実態は殆どそのままであることは現在の日本社会を考察すれば一般的な事実である。近年のビッグバンク等、金融再編成への動きは重要であるが本稿での論点からそれるのでこのことは考慮しない。

さて、旧財閥の代表的な財閥グループ内の会社が、共同出資で子会社的な会社を作るとは日本ではよくある現象である。必ずしも、旧財閥に関わることだけではないであろう。こうして作られた子会社の株はその幾つかの複数の親会社によってほぼ占められている状態や非上場であることも珍しくない。このような小会社は少数の親会社によってその会社に関わる金融商品の価値がほぼ決定されていると言ってよいであろう。

このような状況下で数理ファイナンスの分野において主として研究されてきた確率微分方程式は上手く機能しない。その何が問題点なのであろうか？ 数理ファイナンスのモデルでよく見られる線形確率微分方程式を挙げてその理由を説明してみよう。

$$dX(t) = (\mu(t)X(t) + \xi(t))dt + \sigma(t)dB(t) \quad (1)$$

(1)は $t \geq 0$ で定義されるものとし、 $X(0) = x$ とする。なお、 $\mu(t), \xi(t), \sigma(t)$ は、確定されている関数で、 $\{B(t), t \geq 0\}$ は標準ブラウン運動であるとする。

ここで問題になるのは、上記のような少数の親会社によって価格決定がされる事態では $\{B(t), t \geq 0\}$ の標準ブラウン運動を使うべきではないからである。投資家が少数の市場であればそでの金融商品の価値の決定には、ブラウン運動を考えるべきではない。少数だと相互作用の影響があるそれを分析するにはゲーム理論は強力な武器である。そこでゲーム理論を使うことがアイデアとして浮かぶ。以下、ゲーム理論の用語を使用し、上記の親会社のことをプレイヤーと呼ぶことにする。

2 少数のプレイヤーで決定される価格決定の枠組み

2.1 ゲーム理論の適用

では、具体的に少数のプレイヤーによって支配される企業に関わる金融商品はどのように分析すべきであろうか？ 静的な決定であれば、少数プレイヤーの非協力ゲーム理論を用いるのが適当であろう。さらに言えばこの少数プレイヤーが幾つかの派閥を形成する場合は提携形成がどのようになされるかを考慮し、派閥をプレイヤーと見なして非協力ゲームの解を用いることが考えられる。本来ならば、提携形成に関して詳細な議論が必要であるが、ここでは単純なモデルだけを考えることとする。もし、その派閥と戦略が変化しないのであれば繰り返しゲームで分析可能な面もあろう。Stochastic Game もほぼ繰り返しゲームからの拡張として研究されているという側面をもつ (Mertens[3], Vielle[5] 参照)。本稿で述べるファイナンスへの応用も Stochastic Game と呼んでよいのかも知れないが、これから述べるモデルは数学的に厳密な視点からはラフである。近年の Stochastic Game の研究と関係がないとはいえないものの、ここでは実際に応用するための数値計算での分析を可能にすることが主眼になっており、重点がこれまでの Stochastic Game の研究の流れと異なる。

2.2 隠れマルコフ連鎖の利用

さて、確率過程はこういった場面ではまったく役に立たないのであるか？ 確率微分方程式での定式化はこのような場合は無意味であろうが、確率過程の様々な道具をここでうまく使えないものであるか？

筆者は、近似的に隠れマルコフ過程を利用することを提案する。ここで用いる近似的という言葉は大変乱暴な使い方であり、数学的な厳密な用語として捉えるのには甚だ不備がある。しかしながら、連続マルコフ過程をここで導入することやセミマルコフ過程を考えてその上に価格決定モデルを乗せることもかなり厳しいと筆者は考えており、そのことについては後述する。

それでは筆者が考える隠れマルコフ点はどのようなものか。ここでプレイヤーをすべて非協力的な関係にあるとして議論する。時間を追ってプレイヤーがなんらかの形で、アクションを起こす時を隠れマルコフ点としてとるのである。ここではプレイヤーの対象となる子会社に対する影響力や他のプレイヤーとの相互関係の分析は出来ていると仮定している。つまり、利得行列も共有知識である。ただし、マクロな経済変化による価格決定部分は分離でき除去されていると仮定する。典型的なプレイヤーと考えている財閥系企業のアクションはいつでも同じような動きになる可能性が極めて高いと考えられる。これは、以前のアクションの行動を忘れているのと同様と言えよう。勿論、これはマルコフの無記憶性の仮定を満たすという話ではなく、どちらかというとき斉時性を満たすモデルである根拠として考えている。具体的には株主企業としての各プレイヤーの立場が変わらないので、同じような行動形態をとるということである。森村・高橋 [8] には、ブランド転移

(銘柄転移)モデルにおいて斉時性の仮定が評判が悪く、非斉時的なモデルが時系列的に変化する外生変数を導入するモデルが提案されていることが示されている。しかし、ファイナンスを議論する際に大きな経済変動の要因は現在ではあまりにも把握しきれない面があることと本稿では均衡の状態変化のみに着目するため、この議論はここではしない。

2.3 ゲーム理論と確率過程の Composite

非協力ゲームの前提を満たす状態であるとする。この隠れマルコフ点において各プレイヤーが可算有限個な純戦略集合しかもたず、かつ、各プレイヤーは混合戦略をその上で考えることができるとする。このようなゲームには均衡点が必ず存在することは、どのゲーム論の教科書にも現在では触れられていることである。(一般には、角谷の不動点定理より導くが、Brouwerの不動点定理でも導ける)それを Scarf 等による不動点アルゴリズムにそれは計算することが可能である。不動点アルゴリズムについては、このテーマのみで深い研究がなされているので専門書を参照されたい。本稿で考察対象とする隠れマルコフ点の前後の均衡点が考察できることになる。均衡点は確率分布の組になっていることに注意する。

ここで隠れマルコフ過程による解析を用いるために状態を改めて定義する。かつ、可算有限の状態で現象を近似し直すものとする。このマルコフ解析のための状態の再定義に関する注意に関しては後述する。

各状態の均衡点が求められ、斉時性を仮定して推移行列を用いることを考える。このゲーム論と確率過程を組み合わせた分析により、少数企業により価格決定される企業に関わる金融商品の分析がラフに可能である。

厳密性はないが、現実問題の考察の上に成り立つモデルとしてはきわめて有効ではないかと考える。

3 枠組みのアルゴリズム的記述

以下のアルゴリズム的記述は森村・高橋 [8] の図 5.1 をゲーム論の議論を含めて書き直したものである。詳細なマルコフ解析の部分は原著を参照されたい。

- Step1: 対象とする金融商品の価値を決定するプレイヤーの列挙
- Step2: プレイヤー間の提携関係の整理
- Step3: プレイヤーが非協力ゲームの仮定を満たすように定義しなおす
- Step4: プレイヤーの純戦略の定義
- Step5: データを利用した各隠れマルコフ点のでの均衡点の計算
- Step6: 均衡点から状態を定義する
- Step7: Step6 では状態が多すぎる場合、工夫をして状態数を減らす
- Step8: 推移確率の推定
- Step9: 推移確率の斉時性の検討, No ならば斉時性が成立する短期に絞る, Yes ならば Step10 へ
- Step10: マルコフ性の再検討, No ならば Step6 もしくは Step7 に戻る. Yes ならば Step11 へ
- Step11: 特性量の計算, 狭義のモデル解析
- Step12: 誤差解析
- Step13: 解析結果の検討, Yes なら終了, No なら以下の通り
 - (特性量の計算結果が常識とあわない) 各ステップの再検討, Step3 から再検討
 - (マルコフ性の近似誤差が大きい) Step10 へ
 - (推移確率に推定誤差が大きい) データを多くする Step7 へ

4 提案した数理解析方法における問題点

4.1 数学的性質がもっとよい場合が期待される場合

ここまで述べた議論では、ポアソン過程の様な状態の変化間隔が同一パラメタの指数分布に従うといったことはまったく考えていないが、そのようことがないとは限らない。現象によってはこのようなラフな近似でやる価値が十分にある可能性があることを指摘しておく。それは、待ち行列過程の実際問題への応用がほとんど $M/M/1$ されることとあながち無関係ではない。

また、一步進めて非斉時ポアソン過程を当てはめてみようとする実務家がいってもおかしくはない。ただ、その場合は推移強度を $\Lambda(t)$ (ただし t は時間) を推定することが非常に難しいであろう。

マルコフ連鎖を考えると、状態の変化の間隔は同一パラメタの指数分布に従わなければならない。ここでは、意思決定少数企業に関してはむしろセミ・マルコフ過程を考える方が自然で、アクションをおこす間隔は互いに独立だが遷移の前後の状態に依存すると弱めた仮定の方があてはめやすい。

結論として本稿では、ラフな議論をしているため実際には時間間隔分布の厳密な議論は現象面から殆どできなないと考え、状態変化時点の性質だけをとらえている。その時点を隠れマルコフ点として議論してしまうのが応用上便利であると考えている。勿論、数学的には乱暴というほかない議論であることは承知であるが応用範囲が広がればその方が良いと考えてのことである。

4.2 すでに議論されている類似したモデルにおける問題点

森村・高橋 [8] においてはマルコフ過程のマーケティングへの応用例として、ブランド転移 (銘柄転移) モデルにおける斉時的マルコフ連鎖の応用を紹介している。最初に提案されたモデルの欠点が指摘され改良の努力がされた議論の経緯が詳しく紹介されている。

ここで、一番議論の対象になっているのは 推移確率に関する定常性である。しかし、本稿で対象とするような金融商品の価格決定機構は、少数プレイヤーつまり数社にすぎない持株会社同士の関係に依存する。そのため、その関係が崩れないか、最初に除去されると仮定を置いたマクロな経済状況の大きな変化がなければこのモデルを使うことに問題は生じにくい。しかし、持株会社同士の関係が大きな変化があった場合どうすればよいか？

その時点を境に仕切り直しをする。つまり同じ枠組みでもう一度最初から分析しなおせばよい。このような形で本稿で述べたモデルは適用可能であると考えられる。

仕切り直しの経済現象を考えるのはこのモデルが提案している狭い市場 (つまり、少数

の持株会社から構成される市場ことである。) に対して数理的に説明するのは難しい。むしろ、マクロな経済現象の分析からこの狭い市場参加者へのインパクトを分析するべきである。

4.3 この解析方法を提案するに当たって新たに認識した問題点

本稿では、実際の数値計算例までは挙げないが、ここで提案した枠組みを用いるために一番問題になると思われるのは推移確率の推定である。

実際に様々なマルコフ解析をするためには推移確率が計算できなければ話にならない。まず、説明に必要な最小限の記号を導入しておく。

$$\begin{aligned} N & \text{ プレイヤー集合} \\ S_i & \text{ プレイヤー } i \text{ の純戦略集合 } \quad \forall i \in N \\ S & \triangleq \prod_{i \in N} S_i \end{aligned}$$

各純戦略集合 S_i は、可算有限であると仮定する。よって、 S も可算有限となる。すると、各プレイヤー $i \in N$ に対する混合戦略 Q_i の要素を以下のように書くことにする

$$q_i = (q_{i1}^i, q_{i2}^i, \dots, q_{i|S_i|}^i) \quad \forall i \in N$$

全プレイヤーの組を考えれば、以下のようなになる。

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_{|N|})$$

だから、 $Q \triangleq \prod_{i \in N} Q_i$ 戦略を考えることになる。回りくどく書いているが、それは後での確率過程を考えるときの状態というものを考える時に直接計算の大きさの実感の為に記述した。

あと、ゲームを記述する要素としては利得関数(行列)であるがこれも確率過程になる。しかし、その詳細な分析を本稿ではせず議論をする。

隠れマルコフ点において非協力ゲームの仮定が満たされていると考えると、戦略形ゲームの均衡点が少なくとも一つ存在する。複数均衡がある場合の Refinement は可能であるとして以降議論する。計算は前述したように不動点アルゴリズムで可能である。その均衡点を以下のように書く。

$$q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_{|N|}^*)$$

ここで、前述のマルコフ連鎖の議論をするためにはその状態空間を具体的な形で準備しなければならない。理論的に考えてそのまま問題なれば Q そのものである。 q_i は $|S_i|$ 次元の超平面上にあり、そのままで計算機に乗らない。つまり離散化しなければならない

これが $|N|$ 組の直積になっているだから数値計算が困難であることが想像できる。

まず、直接的な方法としては、各 i に対して Q_i を $[0, 1]^{|S_i|}$ の $[0, 1]$ で考えている部分を $[0, 1]$ 上のうまい離散化を行うことである。非常に乱暴なものとしては 0.1 刻みで近似すること等が必要になる。連続状態の離散化については、Grassmann[2]、森村・高橋 [9] の 5 章を参照されたい。

さて、状態が定義できたとして、ここでまず分かるのは隠れマルコフ点における分布データしかない。ここから推移行列を推定をしなければならない。森村・高橋 [9] の付録 B3 による方法によればその推定が可能である。この推定方法はかなりラフであるがもともとラフな議論しかしていないのであるから大きな差異はないといえよう。

もし、推移データが得られたとしよう。推移行列は疎な行列であることが殆どであろうからそれを効率的に利用して計算する指針が Grassmann[2] に書かれている。この本に書かれていることであるが、(推移) 行列の帯幅表現を最小化できれば後の数値処理が楽になる。しかし、帯幅の最小化問題 (の判定問題) は NP 完全であることが知られている。このため、最初に状態の番号付けをうまくすることを心がけて、上手く計算が分解できるようにするということがポイントになる。

5 まとめと問題点

本稿では金融商品に影響を与えるプレイヤーが少数の場合の分析手法を示した。ここで示した手法は、既存の非協力ゲームと隠れマルコフ過程の組合せである。ファイナンスの問題に対して、この 2 つの理論の組合せが大きな貢献をできる可能性を秘めている。しかし、両者の組合せによるファイナンスの応用はいくつかあるものの大きな枠組みに対するものは非常に少ないと感じている。提携形成に関しては本稿では非常に単純化した扱いをしているが、この部分についてつめるべき問題も大きい。また、確率過程の状態の取り方については数値計算上の問題については記述したが実際問題への適応に対して実証分析からのフィードバックを考えなければならない。

謝辞

研究代表者の大阪大学齋藤誠慈先生には、筆者が研究集会時に体調を崩し、ご迷惑をおかけしたにもかかわらず、本稿提出の機会を与えていただいたことに感謝いたします。

参考文献

- [1] F. Black and M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-654, 1973.
- [2] P.W. Grassmann, Computational Methods in Probability Theory, *Stochastic Models edited by D.P. Heyman and M.J. Sobel*, Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2, Elsevier Science Publishers, 1990. (邦訳：確率モデル-ハンドブック- (朝倉書店) 所収「確率論における数値計算」(牧本直樹訳) 1995.)
- [3] J. Mertens, Stochastic Games, *HandBook of Game Theory edited by R. Aumann and S. Hart*, Vol.3, pp.1809-1832, 2002.
- [4] R.C. Merton, Theory of Rational Option Pricing *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, pp.141-183, 1973.
- [5] N. Vieille, Stochastic Games: Recent Results, *HandBook of Game Theory edited by R. Aumann and S. Hart*, Vol.3, pp.1833-1850, 2002.
- [6] H. Markowitz (1959) *Efficient Diversification of Investments*, Wiley.
- [7] 浜田 知久馬, 学会・論文発表のための統計学—統計パッケージを誤用しないために, 真興交易医書出版部, 1999.
- [8] 森村英典, 高橋幸雄, マルコフ解析, 日科技連, 1979.
- [9] 森村英典, 確率・統計, 朝倉書店, 1974.
- [10] 森村英典, 木島正明ファイナンスのための確率過程, 日科技連, 1991.