

## 結合型逐次決定過程について

長崎大学・経済学部 丸山 幸宏 (Yukihiro Maruyama)  
Faculty of Economics, Nagasaki University

### 1 はじめに

オートマトン理論を用いて, Karp and Held [4] および Ibaraki [1] は, 一般の離散最適化問題を記述できる離散的決定過程 (ddp) と逐次決定過程 (sdp) の部分クラスである単調逐次決定過程 (msdp) の関係を明らかにした。ここで, 逐次決定過程 (sdp) は離散的決定過程 (ddp) に状態空間を導入したものであり, コスト関数をもつ有限オートマトンである。また単調逐次決定過程 (msdp) は, 逐次決定過程 (sdp) のうち単調性をみたくコスト関数をもつクラスで, Bellman の動的計画法における関数方程式が成り立つような一般モデルである。Ibaraki [1] はさらに msdp の部分クラスである強単調逐次決定過程 (smsdp) およびその部分クラスの加法型過程 (ap) が与えられた離散的決定過程 (ddp) を強表現および弱表現するための必要十分条件 (強表現および弱表現定理) を与えた。その上, Maruyama[3] は, Iwamoto [2] が提唱した両的計画法における連立関数方程式が成立するモデルである両調逐次決定過程 (bsdp) およびその部分クラスである強両調逐次決定過程 (sbsdp) や乗法型過程 (mp) を定義し, それらに対して強表現定理を与えた。

本論文では, 加法型過程および乗法型過程を統合した型である結合型逐次決定過程 (assdp) を導入する。強両調逐次決定過程 (sbsdp) および結合型逐次決定過程 (assdp) が離散的決定過程 (ddp) を弱表現するための必要十分条件を与え, さらに sbsdp, assdp の最適方策集合のクラスの性質を調べる。第2節において, 様々な型の決定過程 (ddp, sdp, sbsdp, assdp) を定義する。第3節で, 与えられた ddp と同じ最適方策の集合をもつような sbsdp および assdp が存在するための必要十分条件 (弱表現定理) を与える。

### 2 定義

離散的決定過程 (ddp) は次の3文字で定義される:  $\Upsilon = (\Sigma, S, f)$ , ただし,

$\Sigma$ : 有限個のアルファベットの集合 (決定の有限集合);

$\Sigma^*$ : 決定を有限個接続して得られる方策の集合;

$\Sigma^* \supset S$ : 許容方策の集合;

$f: S \rightarrow R^1$ : コスト関数で最小化することが目的

である。

さらに、逐次決定過程 (sdp) は有限オートマトンに目的関数を随伴させたシステムであり、次のように定義される：  $\Pi = (M, h, \xi_0)$ , ただし、

$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, q_0, \lambda, Q_F) : \text{有限オートマトン;} \\ h &: R^1 \times Q \times \Sigma \rightarrow R^1, \text{ コスト関数で最小化することが目的;} \\ R^1 \ni \xi_0 &: \text{初期状態 } q_0 \text{ における初期コスト} \end{aligned}$$

であり、ここで有限オートマトン  $M = (Q, \Sigma, q_0, \lambda, Q_F)$  とは

$$\begin{aligned} Q &: \text{状態の有限集合;} \quad Q \ni q_0 : \text{初期状態;} \\ \lambda &: Q \times \Sigma \rightarrow Q : \text{状態遷移関数;} \quad Q \supset Q_F : \text{最終状態の集合} \end{aligned}$$

のことである。状態遷移関数  $\lambda$  の定義域は次のように  $Q \times \Sigma^*$  まで拡張できる：

$$\lambda(q, \epsilon) = q, \quad \lambda(q, xa) = \lambda(\lambda(q, x), a) \quad \forall q \in Q, \forall x \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$$

またコスト関数  $h$  の定義域は次のように  $R^1 \times Q \times \Sigma^*$  まで拡張できる：

$$h(\xi, q, \epsilon) = \xi, \quad h(\xi, q, xa) = h(h(\xi, q, x), \lambda(q, x), a) \quad \forall \xi \in R^1, \forall q \in Q, \forall x \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$$

簡単のため、 $\bar{\lambda}(x) = \lambda(q_0, x)$ ,  $\bar{h}(x) = h(\xi_0, q_0, x)$  などの記法を用いる。オートマトン  $M$  が最終状態の一つに遷移するとき、 $M$  は  $x$  を受理するといひ、 $M$  の受理集合  $\{x | \bar{\lambda}(x) \in Q_F\}$  を  $F(M)$  と表す。また、sdp  $\Pi$  の受理集合  $F(\Pi)$  は、基礎となるオートマトン  $M$  の受理集合と同一のものとする ( $F(\Pi) = F(M)$ )。

さらにコスト関数  $h$  が強両調性：

$$\begin{aligned} Q \times \Sigma &= X^+ \cup X^-, \quad X^+ \cap X^- = \emptyset, \\ (q, a) \in X^+, \quad \xi_1, \xi_2 \in R^1, \quad \xi_1 < \xi_2 &\implies h(\xi_1, q, a) < h(\xi_2, q, a), \\ (q, a) \in X^-, \quad \xi_1, \xi_2 \in R^1, \quad \xi_1 < \xi_2 &\implies h(\xi_1, q, a) > h(\xi_2, q, a) \end{aligned}$$

を満たすような逐次決定過程を、強両調逐次決定過程 (sbsdp) と呼ぶ。ここで特に  $X^- = \emptyset$  のとき、強単調逐次決定過程 (smsdp) と呼ぶ。強単調逐次決定過程 (smsdp) は、Karp and Held [3], Ibaraki [1] などにより導入された逐次決定過程の部分クラスであるが、上記より、強両調逐次決定過程 (sbsdp) に特別な場合として含まれることがわかる。

本論文では、sbsdp の部分クラスである結合型逐次決定過程 (assdp) を導入する。

**定義 1** コスト関数が  $h(\xi, q, a) = \xi \circ \psi(q, a)$  により定義された逐次決定過程 (sdp) を結合型逐次決定過程 (associative sequential decision process) (assdp) と呼ぶ。ただし、 $\circ$  は 2 項演算で次の性質を満たすものとする：

- (i)  $(A, \circ)$  は半群 :  $\circ : A \times A \rightarrow A$ , (結合法則)  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ ;  
(ii) 単位元  $\exists e(o) \in A$  の存在 :  $a \circ e(o) = e(o) \circ a = a \quad \forall a \in A$ ;  
(iii) 各  $a \in A$  に対して逆元  $\exists a^{-1}$  の存在 :  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e(o)$ ;  
(iv) (交換法則)  $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in A$ ;  
(v) 強両調性 :  $A = A^+ \cup A^-, A^+ \cap A^- = \emptyset$

$$a \in A^+, a_1, a_2 \in A, a_1 < a_2 \implies a \circ a_1 < a \circ a_2,$$

$$a \in A^-, a_1, a_2 \in A, a_1 < a_2 \implies a \circ a_1 > a \circ a_2.$$

例1 加法過程 (ap):  $\circ = +, A = R^1, e(o) = 0, a^{-1} = -a (a \in R^1), A^+ = R^1, A^- = \emptyset$ .

例2 乗法型過程 (mp):  $\circ = \times, A = R^1 \setminus \{0\}, e(o) = 1, a^{-1} = 1/a (a \neq 0),$   
 $A^+ = \{a \mid a > 0\}, A^- = \{a \mid a < 0\}.$

例3 乗加法型過程 (map):  $a \circ b = a + b - ab, A = R^1 \setminus \{1\}, e(o) = 0, a^{-1} = \frac{a}{(a-1)} (a \neq 1),$   
 $A^+ = \{a \mid a < 1\}, A^- = \{a \mid a > 1\}.$

例4 分数型過程 (fp):  $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}, A = (-1, 1), e(o) = 0, a^{-1} = -a (a \in (-1, 1)),$   
 $A^+ = (-1, 1), A^- = \emptyset.$

ddp  $\Upsilon$  および sdp  $\Pi$  の最適方策集合を各々

$$O(\Upsilon) = \{x \in S \mid f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S\}$$

$$O(\Pi) = \{x \in F(\Pi) \mid \bar{h}(x) \leq \bar{h}(y) \quad \forall y \in F(\Pi)\}$$

と書くことにする。このとき、逐次決定過程 (sdp) は

$$O(\Pi) = O(\Upsilon)$$

を満たすとき、離散的決定過程 (ddp) を弱表現するという。強両調逐次決定過程 (sbsdp) および結合型逐次決定過程 (assdp) も sdp の部分クラスなので、それが上記を満たすとき ddp を弱表現するという。

### 3 ddp の sbsdp, assdp による弱表現

本節において主要結果を述べる。まず、方策の集合  $\Sigma^*$  の部分集合  $U$  は、ある有限オートマトン  $M$  に対して  $U = F(M)$  を満たすとき、正規集合であるという。このとき次のような、sbsdp および assdp が ddp を弱表現するための必要かつ十分条件が成り立つ：

定理 1 (sbsdP の弱表現定理)

与えられた離散的決定過程 ddp  $\Upsilon = (\Sigma, S, f)$  を弱表現する強両調逐次決定過程 (sbsdP) が存在するための必要かつ十分条件は,  $U = O(\Upsilon)$  が正規集合であることである。

注意 1 定理 1 より, 強両調逐次決定過程 (sbsdP) が与えられた離散的決定過程 ddp  $\Upsilon = (\Sigma, S, f)$  を弱表現するとき,  $O(\Pi) = O(\Upsilon) = F(M')$  を満たす有限オートマトン  $M'$  が存在することがわかるが, この  $M'$  は次のように構成する。

まず, sbsdP  $\Pi = (M(Q, \Sigma, q_0, \lambda, Q_F), h, \xi_0)$  の拡張過程  $\Pi^\# = (M^\#, h^\#, \xi_0^\#)$  を次で定義する:

$$M^\# = (Q^\#, \Sigma, q_0^\#, \lambda^\#, Q_F^\#):$$

$$Q^\# = Q \times \{-1, +1\}; \quad q_0^\# = (q_0, +1) \in Q^\#; \quad \lambda^\#(q^\#, a) = (\lambda(q, a), z(q, a, v)),$$

$$q^\# = (q, v) \in Q^\#, \quad \text{ただし} \quad z(q, a, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } (q, a) \in X^+, v = 1 \\ -1 & \text{if } (q, a) \in X^+, v = -1 \\ -1 & \text{if } (q, a) \in X^-, v = 1 \\ 1 & \text{if } (q, a) \in X^-, v = -1 \end{cases};$$

$$Q_F^\# = Q_F \times \{-1, +1\}; \quad \xi_0^\# = \xi_0;$$

$$h^\#(\xi^\#, q^\#, a) = \begin{cases} h(\xi^\#, q, a) & \text{if } (q, a) \in X^+, v = 1 \\ -h(-\xi^\#, q, a) & \text{if } (q, a) \in X^+, v = -1 \\ -h(\xi^\#, q, a) & \text{if } (q, a) \in X^-, v = 1 \\ h(-\xi^\#, q, a) & \text{if } (q, a) \in X^-, v = -1 \end{cases}.$$

さらに  $G^* = \bar{h}(x)$ ,  $x \in O(\Pi)$ ,

$$G^\#(q^\#) = \min\{\bar{h}^\#(x) | \bar{\lambda}^\#(x) = q^\#\}, \quad F^\#(q^\#) = \max\{\bar{h}^\#(x) | \bar{\lambda}^\#(x) = q^\#\},$$

$$Q_{G^\#}^\# = \{q^\# \in Q^\# | \exists G^\#(q^\#)\}, \quad Q_{F^\#}^\# = \{q^\# \in Q^\# | \exists F^\#(q^\#)\},$$

$$G_+^* = \min\{G^\#(q^\#) | q^\# \in Q_F \times \{+1\}\}, \quad F_-^* = \max\{F^\#(q^\#) | q^\# \in Q_F \times \{-1\}\}$$

とするとき, 新たなオートマトン  $M' = (Q', \Sigma, q_0^\#, \lambda', Q_F')$  を次のように定義する:

(case I:  $G^* = G_+^*$ )

$$Q' = Q_{G^\#}^\# \cup \{q_d\}, \quad Q_F' = \{q^\# \in Q^\# | G^\#(q^\#) = G^*\}$$

$$\lambda'(q^\#, a) = \begin{cases} \lambda^\#(q^\#, a), & \text{if } q^\#, r^\# \in Q_{G^\#}^\#, \lambda^\#(q^\#, a) = r^\#, \\ & h^\#(G^\#(q^\#), q^\#, a) = G^\#(r^\#), \\ q_d, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

(case II:  $G^* = -F_-^* \neq G_+^*$ )

$$Q' = Q_{F^\#}^\# \cup \{q_d\}, \quad Q'_F = \{q^\# \in Q^\# \mid -F^\#(q^\#) = G^*\}$$

$$\lambda'(q^\#, a) = \begin{cases} \lambda^\#(q^\#, a), & \text{if } q^\#, r^\# \in Q_{F^\#}^\#, \lambda^\#(q^\#, a) = r^\#, \\ & h^\#(F^\#(q^\#), q^\#, a) = F^\#(r^\#), \\ q_d, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき、この  $M'$  にたいして  $F(M') = U$  となる。

### 定理 2 (assdp の弱表現定理)

与えられた離散的決定過程  $\text{ddp } \Upsilon = (\Sigma, S, f)$  を弱表現する結合型逐次決定過程 (assdp) が存在するための必要かつ十分条件は、 $U = O(\Upsilon)$  が正規集合であることである。

例 1 乗法型最短経路問題を考える。この問題はまず離散的決定過程  $\text{ddp } \Upsilon = (\Sigma, S, f)$ ,  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $S = \{x \in \Sigma^* \mid x = y5, y \in \Sigma^*\}$ ,  $f(i_1 i_2 \cdots i_k n) = c_{0i_1} \times \cdots \times c_{i_k 5}$  に定式化できることに注意する (図 1 参照)。

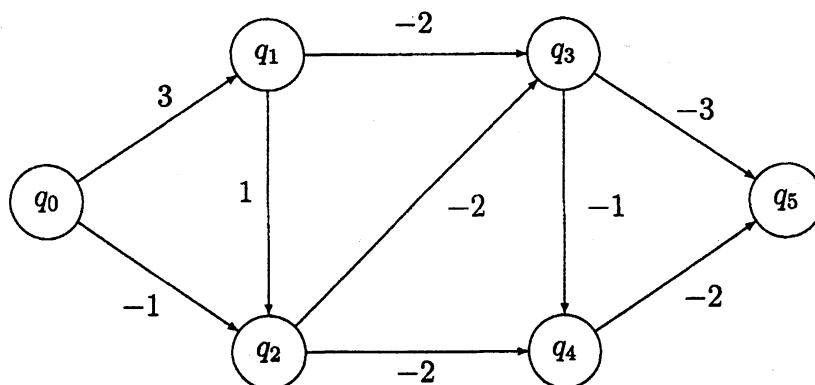


図 1: 乗法型最短経路問題 (離散的決定過程  $\Upsilon$ )

結合型逐次決定過程  $\text{assdp } \Pi = (M(Q, \Sigma, q_0, \lambda, Q_F), h, \xi_0)$  (図2参照) が離散的決定過程  $\Upsilon$  を弱表現している (実際,  $O(\Upsilon) = O(\Pi) = \{x = 1345, 12345\}$  である)。ただし,  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ ,  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $q_0$ : 初期状態,  $\xi_0 = 1$ ,  $Q_F = \{q_5\}$ ,  $\lambda(q, j) = q_j$ ,  $h(\xi, q_i, j) = \xi \times c_{ij}$  である。このとき注意1で述べた方法で  $U = O(\Upsilon) = O(\Pi) = F(M')$  を満たす有限オートマトン  $M'$  が構成できることを以下で示す。

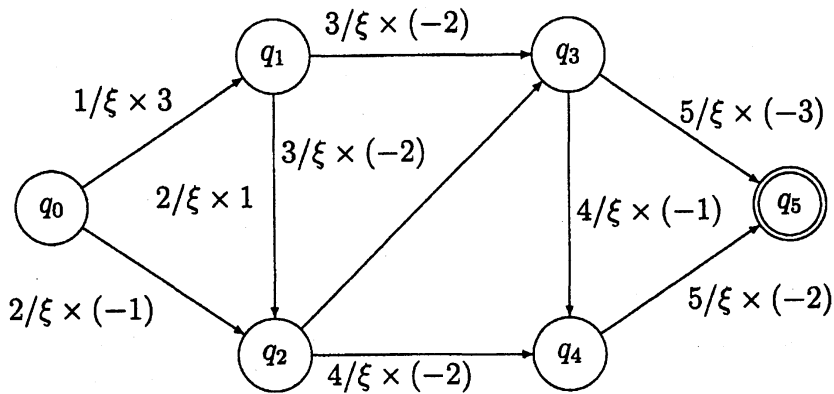


図 2:  $\Upsilon$  を弱表現する結合型逐次決定過程  $\Pi$

注意1で述べた, 逐次決定過程  $\Pi$  の拡張過程  $\Pi^\# = (M^\#, h^\#, \xi_0^\#)$  は図3のようになる。ただしその目的関数  $h^\#$  は次で定義される:

$$h^\#(\xi^\#, q_i^\#, j) = \begin{cases} \xi^\# \times c_{ij}, & \text{if } c_{ij} > 0 \\ \xi^\# \times (-c_{ij}), & \text{if } c_{ij} < 0 \end{cases}$$

また  $Q_F^\# = \{(q_5, +1), (q_5, -1)\}$ ,  $\xi_0^\# = 1$  である。

さらに拡張過程  $\Pi^\#$  から構成される, 注意1で述べた, オートマトン  $M'$  は図4のようになる。ただし  $Q'_F = \{(q_5, -1)\}$  である。この  $M'$  に対して

$$F(M') = \{x = 1345, 12345\} = O(\Pi)$$

が成立している。すなわち  $U = O(\Upsilon) = O(\Pi)$  は正規集合である。

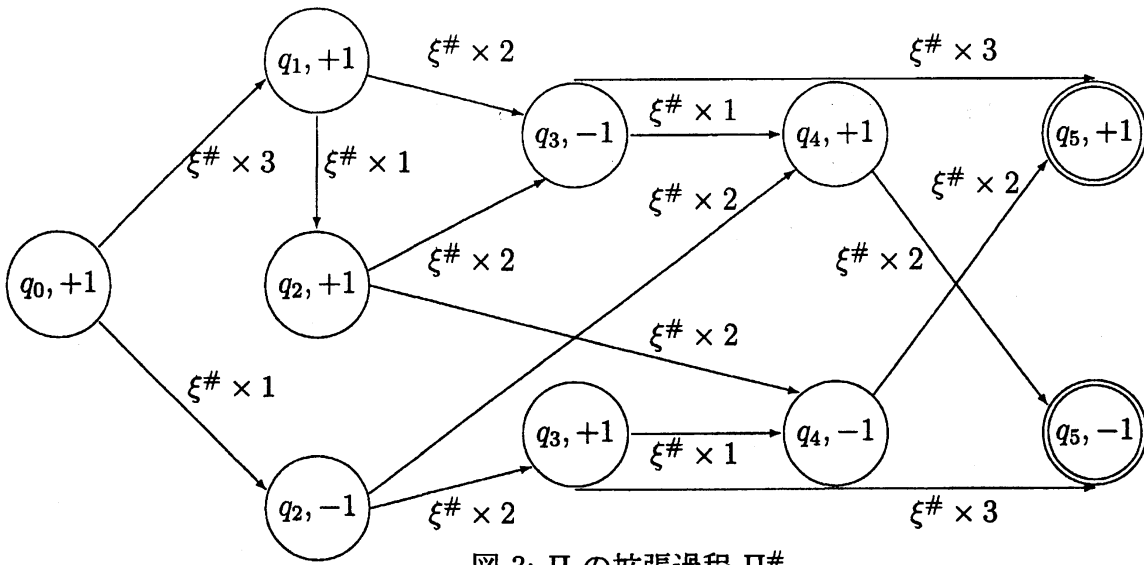


図 3:  $\Pi$  の拡張過程  $\Pi^\#$

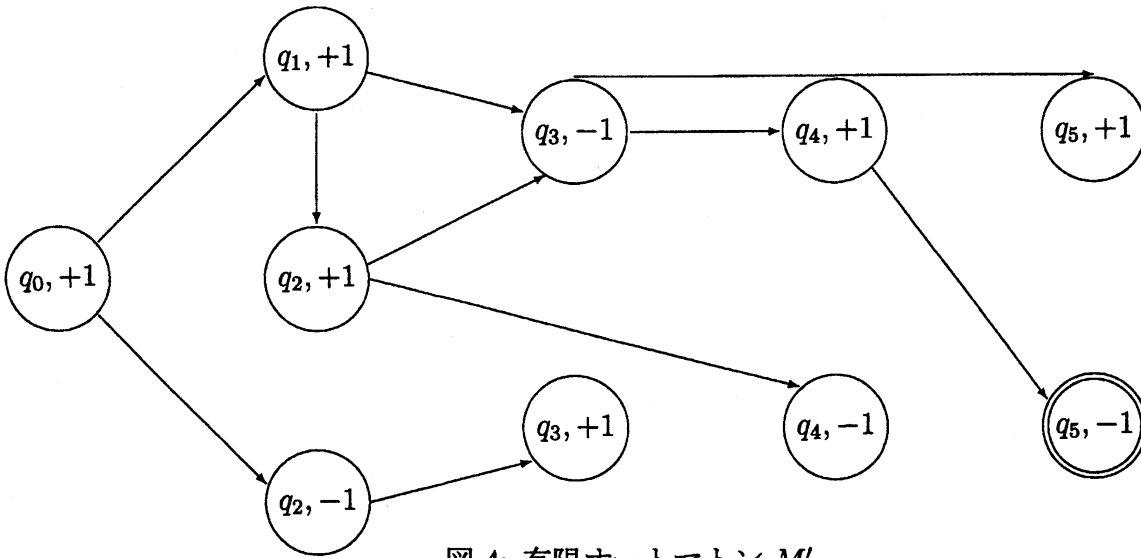


図 4: 有限オートマトン  $M'$

注意 2 ここで

$$\Omega_{\text{sbsdp}} = \{O(\Pi) \mid \Pi : \text{sbsdp}\}, \Omega_{\text{assdp}} = \{O(\Pi) \mid \Pi : \text{assdp}\}$$

と定義すると、与えられた **ddp**  $\Upsilon$  が **sbsdp**  $\Pi$  に弱表現されるための必要十分条件は、

$$U(= O(\Upsilon)) \in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$$

であることに注意する。

上記注意 2 および定理 1, 2 より、次のような最適方策集合のクラス  $\Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$  の性質がわかる；

定理 3 ( $\Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$  の性質)

$U, V \in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$  とするとき、次が成り立つ：

- (1)  $U \cap V, U \cup V, \bar{U} = \Sigma^* - U \in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$ ;
- (2)  $UV = \{xy \mid x \in U, y \in V\} \in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$ ;
- (3)  $U^R = \{x^R \mid x \in U\} \in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$ ,  
 $x^R = a_k a_{k-1} \cdots a_1$  for  $x = a_1 \cdots a_{k-1} a_k$ ;
- (4)  $g(U)$  ( $g$ : homomorphism of  $U$ )  $\in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$ ;
- (5)  $U/V = \{x \mid \exists y \in V \text{ s.t. } xy \in U\} \in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$ ;
- (6)  $\min U \in \Omega_{\text{sbsdp}}, \Omega_{\text{assdp}}$ ,  
 $\min U = \{x \in U \mid x = yz, z \neq \epsilon \implies y \neq U\}$ .

## 参考文献

- [1] Ibaraki, T. (1972), Representation theorems for equivalent optimization problems, *Information and Control* **21**, 397-435.
- [2] Iwamoto, S. (1993), From dynamic programming to bynamic programming, *J. Math. Anal. Appl.* **177**, 56-74.
- [3] Maruyama, Y. (2003), Strong representation theorems for bitone sequential decision processes, *Optimization Methods and Software* **18**, no.4, 475-489.
- [4] Karp, R. M. and Held, M. (1967), Finite-state processes and dynamic programming, *SIAM J. Appl. Math.* **15**, 693-718.