

多様体上のモース関数のコボルディズム群

広島大学大学院理学研究科 池上 数一 (Kazuichi Ikegami)

Graduate School of Science, Hiroshima university

1. 序

n -次元向きづけられたモース関数のコボルディズム群 \mathcal{M}_n は Ikegami-Saeki [2] の中で導入された。この論文の目的は \mathcal{M}_n と、 n -次元向きづけられていないモース関数のコボルディズム群 \mathcal{N}_n の構造を決定することである。この為に “elimination of cusps” [4] と “semi-characteristics” [5] を用いる。[2] の中で、我々はこの論文と全く異なる方法によって \mathcal{M}_2 は無限巡回群であることを証明した。

“smooth maps” のコボルディズム論について Thom [8] は Pontrjagin-Thom 構成を用いて埋め込みのコボルディズム群が、ある Thom complex の homotopy group に同型であることを示した。同様な方法で Wells [10] は immersion のコボルディズム群を研究した。更に Rimányi and Szűcs [6] はこれらの結果を τ -map の概念を用いて特異点をもつ写像のコボルディズム群に拡張した。

通常、コボルディズム群は、ある Thom complex の homotopy 群として、algebraic topology の方法を駆使して求めるが、この論文ではそうした手法を用いず、幾何学的手法を使っている、しかも完全な結果が得られている。

最近 Saeki [7] は $n \geq 6$ に関して、特殊モース関数の n -次元コボルディズム群を考察し、homotopy n -spheres の h -コボルディズム群との関係を得た。

この論文を通して多様体と写像はすべて C^∞ とし、また “ \cong ” は algebraic objects の間の同型を表すものとする。

2. 主定理

smooth manifold 上の smooth な実数値関数はその臨界点が凡て非退化であるときモース関数と呼ばれる。ここでは closed(連結とは限らな

い) な向きづけられた、または向き付けられていない多様体上のモース関数の全体をそれぞれ $M(n)$, $N(n)$ とおく。このとき全ての n に対して、empty set \emptyset 上の関数は $M(n)$, $N(n)$ 両方の element であるとしておく。

Definition 2.1. $M(n)$ の二つのモース関数 $f_0 : M_0 \rightarrow \mathbf{R}$, $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbf{R}$ は若しコンパクト、向きづけられた $(n+1)$ -次元多様体 X と、特異点として fold points だけを持っている C^∞ -級写像 $F : X \rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1]$ が存在し次の条件 (1), (2) を満たすならば oriented cobordant と呼ばれる。

- (1) X の境界 ∂X は disjoint union $M_0 \amalg (-M_1)$ である (ここで $-M_1$ は向きが逆である多様体 M_1 を表す)。
- (2) 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$F|_{M_0 \times [0, \varepsilon]} = f_0 \times \text{id}_{[0, \varepsilon]} : M_0 \times [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R} \times [0, \varepsilon], \quad \text{and}$$

$$F|_{M_1 \times (1-\varepsilon, 1]} = f_1 \times \text{id}_{(1-\varepsilon, 1]} : M_1 \times (1-\varepsilon, 1] \rightarrow \mathbf{R} \times (1-\varepsilon, 1]$$

がなりたつ。ここで、 $M_0 \times [0, \varepsilon]$ と $M_1 \times (1-\varepsilon, 1]$ は X の中の collar 近傍と同一視する。

このとき F を f_0 と f_1 の間の "oriented cobordism" と呼び、この関係は同値関係であることが直ぐにわかり、同値類全体を \mathcal{M}_n で表しモース関数の向きづけられた n -次元コボルディズム群と呼ぶ。

又、同様に向きづけられていない閉多様体上のモース関数全体を $N(n)$ に対して、この同値類の全体を \mathcal{N}_n で表すことにしモース関数の向きづけられていない n -次元コボルディズム群と呼ぶ。

n -次元閉多様体 M 上のモース関数を $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ とするとき、その index が λ である臨界点の個数を $C_\lambda(f)$ で表す ($0 \leq \lambda \leq n$)。

Definition 2.2. $0 \leq \lambda \leq n$ に対して、写像 $\varphi_\lambda : \mathcal{N}_n \rightarrow \mathbf{Z}$ と $\tilde{\varphi}_\lambda : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbf{Z}$ を

$$\varphi_\lambda([f]) = C_\lambda(f) - C_{n-\lambda}(f) \in \mathbf{Z}$$

によって定める。ここで $\tilde{\varphi}_\lambda = \varphi_\lambda \circ (\text{natural map} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{N}_n)$ であり、 $[f]$ は $f \in N(n)$ のコボルディズム類を表す。

ここで $\tilde{\varphi}_\lambda, \varphi_\lambda$ は Lemma 4.1 によって well-defined であることが §4 の中で示され、準同型であることは和 $[f] + [g]$ を $[f \amalg g]$ で定め、 $N(n)$ (あるいは $M(n)$) に属する $f : M \rightarrow \mathbf{R}, g : N \rightarrow \mathbf{R}$ に関して $f \amalg g : M \amalg N \rightarrow \mathbf{R}$ が

$$(f \amalg g)(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in M), \\ g(x) & (x \in N) \end{cases}$$

によって定義されることからわかる。

Definition 2.3. 写像 $\Phi : \mathcal{N}_n \rightarrow \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}$ と $\tilde{\Phi} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}$ をそれぞれ

$$\Phi([f]) = (\varphi_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}([f]), \varphi_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + 1}([f]), \dots, \varphi_n([f])) \in \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

と

$$\tilde{\Phi}([f]) = (\tilde{\varphi}_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}([f]), \tilde{\varphi}_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + 1}([f]), \dots, \tilde{\varphi}_n([f])) \in \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

によって定める。ここで $\lfloor x \rfloor$ は実数 x を超えない最大の整数を表し、 $[f]$ は f のコボルディズム類である。

Definition 2.4. \mathfrak{N}_n と Ω_n はそれぞれ n -次元向きづけられていない、または向きづけられた多様体のコボルディズム群である ([8]、[9] を参照)。 $\Psi : \mathcal{N}_n \rightarrow \mathfrak{N}_n$ と $\tilde{\Psi} : \mathcal{M}_n \rightarrow \Omega_n$ はそれぞれ

$$\Psi([f : M \rightarrow \mathbf{R}]) = [M]_2 \in \mathfrak{N}_n$$

と

$$\tilde{\Psi}([f : M \rightarrow \mathbf{R}]) = [M] \in \Omega_n$$

によって定義する。ここで $[M]_2$ と $[M]$ はそれぞれ向きづけられていない、または向きづけられた M のコボルディズム類であり、 $[f : M \rightarrow \mathbf{R}]$ は f のコボルディズム類である。

$\Psi, \tilde{\Psi}$ が well-defined であることは明らかであり、任意の多様体の上には常にモース関数が存在するから、全射でもある。

定理 2.9 に必要な定義を以下に述べておく。

Definition 2.5. M は向きづけられた $(4k+1)$ -次元閉多様体、 K は係数体 (例えば \mathbf{Z}_2 あるいは \mathbf{Q} 等) とする。係数体 K に関する M の

semi-characteristic $\sigma(M; K) \in \mathbf{Z}_2$ は次の様に定義される。

$$\sigma(M; K) = \sum_{i=0}^{2k} \dim H_i(M; K) \pmod{2} \in \mathbf{Z}_2.$$

Definition 2.6. $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ は向きづけられた $(4k+1)$ -次元閉多様体上のモース関数とする。このとき $\sigma(f) \in \mathbf{Z}_2$ を

$$\sigma(f) = \sum_{\lambda=0}^{2k} C_\lambda(f) \pmod{2} \in \mathbf{Z}_2.$$

で定義し、写像 $\Lambda: \mathcal{M}_{4k+1} \rightarrow \mathbf{Z}_2$ を

$$\Lambda([f: M \rightarrow \mathbf{R}]) = \sigma(f) - \sigma(M; \mathbf{Q}) \in \mathbf{Z}_2.$$

によって定義する。

写像 Λ が well-defined、準同型であることは §6 で証明される Lemma 6.2 によってわかる。

この論文の主な結果は次の3つの定理である。

Theorem 2.7 (向きづけられていない場合). モース関数の向きづけられていない n -次元コボルディズム群 \mathcal{N}_n は向きづけられていない n -次元コボルディズム群 \mathfrak{N}_n と $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の無限巡回群との直和に同型である。つまり

$$(\Psi \oplus \Phi)([f: M \rightarrow \mathbf{R}]) = ([M]_2, \varphi_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}([f]), \varphi_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + 1}([f]) \dots, \varphi_n([f]))$$

によって定義される写像

$$\Psi \oplus \Phi: \mathcal{N}_n \rightarrow \mathfrak{N}_n \oplus \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

は同型である。ここで $\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数である。

向きづけられた場合には次の2つの場合がある。

Theorem 2.8 (向きづけられた場合、 $n \neq 4k+1$). $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ のとき、向きづけられたモース関数の n -次元コボルディズム群 \mathcal{M}_n は向きづけられた n -次元コボルディズム群 Ω_n と $\lfloor n/2 \rfloor$ の個の無限巡回群との直和に同型である。つまり

$$(\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi})([f: M \rightarrow \mathbf{R}]) = ([M], \tilde{\varphi}_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}([f]), \tilde{\varphi}_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + 1}([f]), \dots, \tilde{\varphi}_n([f]))$$

によって定義される写像

$$\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi} : \mathcal{M}_n \rightarrow \Omega_n \oplus \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

は同型である。

Theorem 2.9 (向きづけられた場合、 $n = 4k + 1$). $n \equiv 1 \pmod{4}$ に関して、向きづけられたモース関数の n -次元コボルディズム群 Ω_n は向きづけられた n -次元コボルディズム群 Ω_n と $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の無限巡回群と有限巡回群との直和に同型である。つまり

$$(\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi} \oplus \Lambda)([f : M \rightarrow \mathbf{R}]) = ([M], \tilde{\varphi}_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}([f]), \dots, \tilde{\varphi}_n([f]), \sigma(f) - \sigma(M; \mathbf{Q}))$$

によって定義された写像

$$\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi} \oplus \Lambda : \mathcal{M}_n \rightarrow \Omega_n \oplus \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor} \oplus \mathbf{Z}_2$$

は同型である。

3. ELIMINATION OF CUSPS

この section で主定理の証明に必要な [4] の内容を説明しておく。

Definition 3.1. $m \geq 2$ として $F : W \rightarrow \mathbf{R}^2$ は m -次元多様体上の滑らかな写像とする。特異点 $p \in W$ が fold point であるとは $p = (u, z_1, \dots, z_{m-1})$ と $F(p) = (U, Y)$ の局所座標を適当にとると $0 \leq \lambda \leq m-1$ に関して F を

$$(3.1) \quad \begin{cases} U = u, \\ Y = -\sum_{k=1}^{\lambda} z_k^2 + \sum_{k=\lambda+1}^{m-1} z_k^2 \end{cases}$$

として表せる場合であり、fold point p の absolute index を $\tau(p) = \max\{\lambda, m-1-\lambda\}$ と定義する。同様に p が cusp point であるとは局所座標 $p = (u, x, z_1, \dots, z_{m-2})$ と $F(p) = (U, Y)$ を適当にとると、 $0 \leq \lambda \leq m-2$ に関して

$$(3.2) \quad \begin{cases} U = u, \\ Y = ux + x^3 - \sum_{k=1}^{\lambda} z_k^2 + \sum_{k=\lambda+1}^{m-2} z_k^2 \end{cases}$$

と表せる場合であり cusp point p の absolute index を $\tau(p) = \max\{\lambda, m-1-\lambda\}$ で表す。

m -次元多様体 $W (m \geq 2)$ から \mathbf{R}^2 への任意の滑らかな写像は次の性質 (1), (2), (3), (4), (5) を持つ C^∞ -写像 $F : W \rightarrow \mathbf{R}^2$ によって近似されることはよく知られている。

- (1) F の微分の rank は 0 とならない。
- (2) F の微分が rank = 1 である F の定義域の点の集合を $S_1(F)$ で表すと $S_1(F)$ は smooth non-intersecting curves からなる。
- (3) $F|_{S_1(F)}$ が zero differential 持つ点の集合を $S_1^2(F) \subset S_1(F)$ であらわす。このとき $S_1^2(F)$ は discrete set である。
- (4) $p \in S_1(F) - S_1^2(F)$ とき p は fold point である。
- (5) $p \in S_1^2(F)$ とき p は cusp point である。

この (1)~(5) の性質を持つ m -次元多様体から \mathbf{R}^2 への滑らかな写像を generic と呼び、このとき $S_1(F)$ は W のコンパクトな 1-次元正則部分多様体であり、cusps の個数は有限個である。

cusp point の近傍で absolute index の動きをみることにする。先ず $S_1(F) - S_1^2(F)$ のすべての component 上では absolute index は一定であることに注意する。absolute index が i である cusp point p に関して、その近くの fold points の indices は、 $i > (m - 2)/2$ のときは Fig. 1、また $i = (m - 2)/2$ のときは Fig. 2 の様になっている。

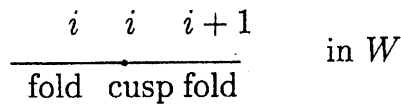


FIGURE 1

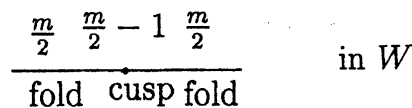


FIGURE 2

$F : W \rightarrow \mathbf{R}^2$ は generic map として G は

$$dF : TW|_{S_1(F)} \rightarrow (F^*TR^2)|_{S_1(F)}$$

の cokernel bundle とする。

点 $p \in S_1(F)$ に関して, p の index $i(p, \gamma)$ は p が fold point なら $\tau(p)$ または $m-1-\tau(p)$ であり, p が p 上の fiber G_p の与えられた向き γ に従う cusp point であるなら $\tau(p)$ または $m-2-\tau(p)$ である (詳しくは [4] を見よ)。

W が m -次元 ($m \geq 3$) 連結な多様体であるとき, $F: W \rightarrow \mathbf{R}^2$ が generic map であるとし, F は 2 つの cusp points p_1, p_2 を持つとする。若しそれらが, ある条件を満たすとき, 次のように F の homotopy によって除去できる (詳しくは [4] を見よ)。 $\lambda: [0, 1] \rightarrow W$ は $\lambda(0) = p_1$, $\lambda(1) = p_2$, $\lambda([0, 1]) \cap S_1(F) = \{p_1, p_2\}$ である様な smooth embedding であり, [4, p.284] のいみで $\lambda'(0)$, $\lambda'(1)$ はそれぞれ上向き, 下向きであり, さらに $F \circ \lambda$ は immersion である ([4, (4.4)])。 W は連結としたから joining curve λ は常に存在し, $(F \circ \lambda)^* TR^2$ は向きづけ可能であり, 今向きは固定されている。 Fig. 3 の様に $(F \circ \lambda)'(0) \wedge \gamma_1$ と $-(F \circ \lambda)'(1) \wedge \gamma_2$ が $(F \circ \lambda)^* TR^2$ の向き一致する様な G_{p_j} , $j = 1, 2$ の向きが γ_j である。 $i(p_j, \gamma_j)$ は γ_j , $j = 1, 2$ に関する cusp point p_j の index である。ここで $i(p_1, \gamma_1) + i(p_2, \gamma_2) = m-2$ ならば cusp points の組 p_1 と p_2 は *matching pair* と呼ばれる。このとき cusp points p_1, p_2 は F の homotopy によって除去される。

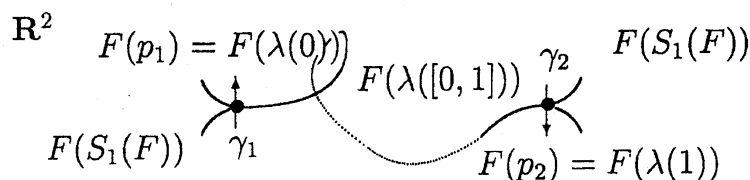


FIGURE 3

[4] によって, 連結な m -次元閉多様体 W ($m \geq 3$) から \mathbf{R}^2 への写像であるすべての generic map $F: W \rightarrow \mathbf{R}^2$ は Euler characteristic $\chi(W)$ が偶数であるときは cusp points を持たない generic map に homotopic であり, Euler characteristic $\chi(W)$ が奇数であるなら cusp point を 1 つもつ generic map に homotopic である。 $m = 2$ の場合には Levine の方法は用いることができないが Kálmán の方法によって cusps の組の除去が可能である [3, Lemma 1.4]。

以下主定理の証明を略記する。詳しくは H.M.J, Vol.34, No.2(2004) を参照されたい。

4. 主定理の証明 (向きづけられていない場合)

この section で Theorem 2.7 を略証する。 M, N は向きづけられていない n -次元閉多様体, $f: M \rightarrow \mathbf{R}, g: N \rightarrow \mathbf{R}$ はモース関数, $F: X \rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1]$ は f と g の間のコボルディズム, $S(f)$ はモース関数 f の critical points の集合とする。

$t \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{cases} M_t = F^{-1}(\mathbf{R} \times \{t\}) \\ f_t = F|_{M_t}: M_t \rightarrow \mathbf{R} \times \{t\} \end{cases}$$

とおく。

$\pi: \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は second factor への射影である。 $\pi \circ F|_{S_1(F)}: S_1(F) \rightarrow [0, 1]$ の正則値 $t \in [0, 1]$ をとるとき、 M_t は次元 n の smooth manifold であり、 f_t はモース関数で $S(f_t) = S_1(F) \cap M_t$ である。

各 $p \in S(f_t) = S_1(F) \cap M_t$ に対して、 $\tau(p)$ を F に関する fold point p の absolute index とし、 $i(p)$ モース関数 f_t に関する critical point p の index であるとするとき、

$$\tau(p) = \begin{cases} i(p) & (i(p) \geq \lfloor n/2 \rfloor), \\ n - i(p) & (i(p) < \lfloor n/2 \rfloor). \end{cases}$$

である。ここで F は some $\varepsilon > 0$ に関する $M \times (-\varepsilon, 0] \cup X \cup N \times [1, 1+\varepsilon)$ からの写像の制限と考える。

次の lemma が成り立つ (証明は略す)

Lemma 4.1. 2つのモース関数 f と g がコボルダントとするとき、全ての λ に関して

$$C_\lambda(f) - C_{n-\lambda}(f) = C_\lambda(g) - C_{n-\lambda}(g)$$

が成り立つ。

この lemma により定義 2.2 の $\varphi_\lambda([f])$ を用いることができる。

定理 2.7 の略証. 準同型 $\Psi \oplus \Phi$ が全単射であることさえ証明すればよい。先ず全射であることを証明する。

任意の

$$([M]_2, a_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}, a_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + 1}, \dots, a_n) \in \mathcal{N}_n \oplus \mathbf{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor},$$

にたいして、

$$(\Psi \oplus \Phi)([f]) = ([M]_2, a_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}, a_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + 1}, \dots, a_n).$$

を満たすモース関数 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ が存在することを示す。ここで

$$(\Psi \oplus \Phi)([g_0]) = ([M]_2, b_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}, b_{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + 1}, \dots, b_n).$$

であるモース関数 $g_0: M \rightarrow \mathbf{R}$ が存在することは仮定してよい。さらに $b_\lambda = \varphi_\lambda([g_0]) = C_\lambda(g_0) - C_{n-\lambda}(g_0)$ であり、 $0 \leq \lambda \leq n-1$ の λ に関して、indices $\lambda+1$ と λ の critical points の組を創り出すことができることに注意する。次に新しいモース関数 g_1 に対して $C_n(g_1) - C_0(g_1) = a_n$ になる様に、 $a_n > b_n$ なら indices $n, n-1$ である critical points の個数を増加させ、 $a_n < b_n$ なら indices $0, 1$ である critical points の個数を増加させる。同様にして indices $n-1, n-2$ または $1, 2$ の critical points の個数増加させて $C_{n-1}(g_2) - C_1(g_2) = a_{n-1}$ である様なモース関数 g_2 を得る。この手順を繰り返して $n \geq \lambda \geq \lfloor (n+3)/2 \rfloor$ に対して、 b_λ を a_λ に換えることができる。こうして必要な性質を満たすモース関数 f を得る。これで全射であることが証明された。

次に単射について考察する。 $\text{Ker}(\Psi \oplus \Phi) = 0$ を言うことにする。その為、任意の $\text{Ker}(\Psi \oplus \Phi)$ の元として $[f: M \rightarrow \mathbf{R}]$ をとり、 $[f: M \rightarrow \mathbf{R}] = 0 \in \mathcal{N}_n$ を示す。 $[f: M \rightarrow \mathbf{R}]$ が $\text{Ker}(\Psi \oplus \Phi)$ の元であるから M は零同境である。従って同境の定義から境界が M であるコンパクトな $(n+1)$ 次元多様体 W が存在してしかも W は連結にとれる。次に W から $\mathbf{R} \times [0, 1]$ への連続写像を考え、この写像を M の近傍で止めたまま、滑らかな正規交叉である generic な写像 (これを F とおく) にできる。若し、 F が cusp points を持たないなら、証明は終了したことになる。そこでこの写像 F の cusp points の消去を考える。その為、写像 F の特異点集合の像をあるイソトピーで動かし全ての cusp points の像を図の様に absolute index 順に並べ、cusp point の近傍の F の特異点集

合の像は $\mathbf{R} \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta]$ (適当な $\delta > 0$) に含まれ、更に、 $\mathbf{R} \times [0, \frac{1}{2}]$ には cusp point が存在しない様にできる。

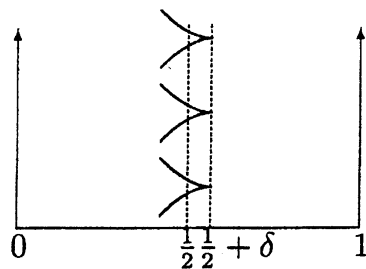


FIGURE 4

これで matching pair が見つけやすくなり、Levine により cusp points の個数が偶数個ならば、cusp は全て消去できる事になる。また若し cusp points の個数が奇数個ならば、matching pair を消去した後、cusp が 1 つ残る、そこでこの場合、向き付けられない $(n+1)$ 次元多様体でオイラー指標が奇数であるもの (たとえば、 $\mathbf{R}P^{n+1}$) から $\mathbf{R} \times [0, 1]$ への generic な写像が存在し、この写像は cusp が 1 つだけ残る写像に置き換えられるから、これらの連結和をとることによって連結和の上の 2 つの cusp points を近付けるとき、これらは Levine によって matching pair の条件を満たしていることがわかり、これで、この場合も cusp が消去できる。これで単射が証明されたことになる。 \square

5. 主定理の証明 (向きづけられた場合, $n \neq 4k + 1$)

定理 2.8 の略証. この証明の概略であるが、well-defined であること、また準同型と全射性については向き付けられていない場合と同様であり、単射性についても、 n が偶数の場合には向き付けられていない場合と同様である。従って $n = 4k - 1$ のときだけ説明する。若し cusp の個数が偶数個なら問題はなく、奇数個の場合には、 CP^{2k} を考えると、 $\chi(CP^{2k})$ は奇数であるから、定理 2.7 の証明と同様の議論が可能である。 \square

6. 主定理の証明 (向きづけられた場合, $n = 4k + 1$)

定理 2.9 の略証. ここで $\Lambda : M_{4k+1} \rightarrow \mathbf{Z}_2$ は $\lambda([f : M \rightarrow \mathbf{R}]) = \sigma(f) - \sigma(M; \mathbf{Q})$ によって定められる。ただし $\sigma(M; \mathbf{Q})$ は M の semi-characteristic であり、 $\sigma(f)$ はモース関数 $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ の指数 0 から指

数 $2k$ までの臨界点の個数の和を表している。先ず次の2つの lemmas が成り立つ (証明は略す)

Lemma 6.1. W は境界 $\partial W = M$ である向きづけられたコンパクト $(4k+2)$ -次元多様体とするとき

$$\sigma(M; \mathbf{Q}) \equiv \chi(W) \pmod{2},$$

が成り立つ。ここで $\chi(W)$ は W の Euler characteristic である。

Lemma 6.2. 向きづけられた $(4k+1)$ -次元閉多様体上の2つのモース関数 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ と $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ が向きづけられたコボルダントなら

$$\sigma(f) - \sigma(M; \mathbf{Q}) = \sigma(g) - \sigma(N; \mathbf{Q}).$$

が成り立つ。

Lemma 6.1 で、 W がコンパクトな向き付けられた $(4k+1)$ 次元多様体で、その境界が M であるとき、mod 2 では M の semi-characteristic は W のオイラー指標に等しいということを示す。これを用いて、

Lemma 6.2 では、写像 Λ が well-defined であることを示した。これにより、 $\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi} \oplus \Lambda$ が well-defined, 準同型がわかる。全射性はモース関数の連続した indices の臨界点の個数を付け加えることによって、 $\sigma(f)$ は $\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi}$ の像を換えることをせずに、換えることができるからわかる。単射性については、向き付けられない場合と同様に $\text{Ker}(\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi} \oplus \Lambda) = 0$ を示せばよい。定理 1 の単射性の証明と同様にして、 $[f: M \rightarrow \mathbf{R}] \in \text{Ker}(\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi} \oplus \Lambda)$ とする。Levine の方法で matching pair を消去すると、cusp point の absolute index が唯 1 種類の arc だけが残る。若しこれらが複数個あればどの2つも matching pair になる。従って、若しこの cusp point の個数が1個ならば、定理 2.7 の場合と同様に、向き付けられた多様体で、オイラー指数が奇数のものとの、連結和を考えることになるが、この様なものは存在しない。また偶数個ならば、それらの cusp points は消去できることになる。ところで、 Λ の像 $\sigma(f) - \sigma(M; \mathbf{Q})$ は定理 2.7 と同様に構成した generic な写像 F の特異点の像を mod 2 で見るとき arc には cusp point を含むものと、含まないものの2種類あるが、 $\sigma(f)$ はこれら全体の arc の個数になる。一方 $\sigma(M; \mathbf{Q})$ は W のオイラー指標に等し

いことが、Lemma 6.1 からわかり、また、 $\pi : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ できる自然な射影とすると、 $\pi \circ F$ はモース関数になり、 $\pi \circ F$ の臨界点の個数は W のオイラー指標に等しい。従って $\sigma(M; \mathbf{Q})$ は $\pi \circ F$ の臨界点の個数に等しい。 $[f : M \rightarrow \mathbf{R}] \in \text{Ker}(\tilde{\Psi} \oplus \tilde{\Phi} \oplus \Lambda)$ から $\sigma(f) = \sigma(M; \mathbf{Q})$ よって mod 2 では $\sigma(f)$ は $\pi \circ F$ の臨界点の個数に等しい。ところで、 $\pi \circ F$ の臨界点は generic な写像 F の特異点の像に現れる cusp を含まない arc 上にあり一つの arc の上には、奇数個現れる。つまり mod 2 では、 $\sigma(f)$ は cusp を含む arc と含まない arc の個数を表し、 $\pi \circ F$ の臨界点の個数は cusp を含まない arc の個数である。よって cusp point を含む arc の個数は偶数とわかる。つまり cusp points の個数は偶数とわかることになった。□

REFERENCES

- [1] A. Dold, Erzeugende der Thomschen Algebra \mathfrak{R} , Math. Z. **65** (1956), 25–35.
- [2] K. Ikegami and O. Saeki, Cobordism group of Morse functions on surfaces, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 1081–1094.
- [3] T. Kálmán, Stable maps of surfaces into the plane, Topology Appl. **107** (2000) 307–316.
- [4] H.I. Levine, Elimination of cusps, Topology **3**, suppl. 2 (1965), 263–295.
- [5] G. Lusztig, J. Milnor and F.P. Peterson, Semi-characteristics and cobordism, Topology **8** (1969), 357–359.
- [6] R. Rimányi and A. Szűcs, Pontrjagin-Thom-type construction for maps with singularities, Topology **37** (1998), 1177–1191.
- [7] O. Saeki, Cobordism groups of special generic functions and groups of homotopy spheres, Japan. J. Math. (N. S.) **28** (2002), 287–297.
- [8] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.
- [9] C.T.C. Wall, Determination of the cobordism ring, Ann. of Math. **72** (1960), 292–311.
- [10] R. Wells, Cobordism groups of immersions, Topology **5** (1966), 281–294.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, HIROSHIMA UNIVERSITY, HIGASHI-HIROSHIMA 739-8526, JAPAN
E-mail address: suuich@hiroshima-u.ac.jp