数理解析研究所講究録 1374 巻 2004 年 79-88

Segre-Thom 多項式について

大本 亨 鹿児島大学理学部 (Toru Ohmoto, Kagoshima Univ.)

要旨 : 正則写像 $f : M \to N$ のある型の特異点集合（例えばベクトル束の間の写像の r-th degeneracy loci）の基本類を “写像の Chern 特性類” $c_i(f) = c_i(f^*TN - TM)$ の ”universal な”多項式で表す，というのが（写像の特異点に対する）**Thom 多項式**です. 一方，基本類だけでなく，特異点集合の位相的な量として，たとえばその Euler 標数などいろいろ考えられます. これらと特性類 $c(f)$ とは関係はないでしょうか？—-これが今回の話題の内容です. 主定理の主張は標語的に述べれば次のようになります :

「写像の特異点集合の “Segre 型特性類”は
$c(f)$ の普遍多項式（Thom 多項式型表示）で表される.」

とくに系として，特異点集合の Euler 標数は，$c(f)$ のある普遍多項式（に $c(TM)$ を掛けたものの degree）で表される— つまり Chern 特性類による普遍的な表示がある — ことが分かります.

この普遍多項式 —- 暫定的に “Segre-Thom 多項式” と呼ぶ —- はある種の「同変 Segre 類」として定義されます. これは，より一般論であるところの “ G-作用を伴う（特異点を許す）代数多様体に対する G-同変 Chern 類” (cf. [7]) の一つの応用です.

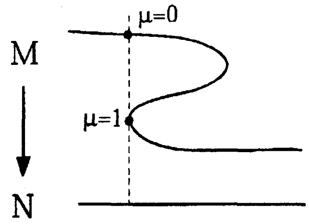
1 写像の特異点型に対する Thom 多項式

1.1 Riemann-Hurwitz 公式

$f : M \to N$ をコンパクト Riemann 面の間の全射正則写像とします. M の各点 $x \in M$ に対して分岐指数 e_x が定まります（つまり写像芽 $f : (M, x) \to (N, f(x))$ が適当な座標変換で $t \mapsto t^{e_x}$ と表される，あるいは $e_x = 1 + \mu(f, x)$（ここで $\mu(f, x)$ は Milnor 数））. Milnor 数 $\mu(f, x) = e_x - 1$ を M 上で “積分”すると,

$$\sum_{x\in M}(e_x - 1)(= \int_M \mu(f)d\chi) = \deg f \cdot \chi(N) - \chi(M) \tag{1}$$

が成り立つ，というのが Rimann-Hurwitz 公式でした. ここで，$\deg f$ は写像 f の位相的写像度，$\chi(*)$ は Euler 標数です.



(1) dim=1 case

さて，(1) の右辺は次のようにも表せます：

$$\deg f \cdot \chi(N) - \chi(M) = c_1(TN) \frown f_*[M] - c_1(TM) \frown [M] = c_1(f^*TN - TM) \frown [M].$$

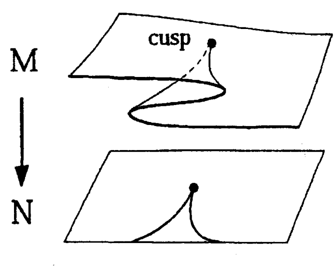
ここで，ベクトル束の K-群の元 $E - F$ の Chern 類とは $c(E-F) = c(E) \cdot c(F)^{-1} = (1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdot)/(1 + c_1(F) + c_2(F) + \cdot)$ のことです．

実は (1) の右辺に相当する $c_1 = c_1(f^*\mathrm{target} - \mathrm{source})$ が A_1-特異点型の Thom 多項式 $Tp(A_1)$ と呼ばれるものです．とくに f が generic—非退化特異点（A_1-型）のみ有する（つまり，標準形が $t \mapsto t^2$）—ならば，A_1-特異点の個数が位相的不変量（virtual normal bundle の Chern 特性数）で勘定できるわけです．

1.2 カスプ公式

$f : M \to N$ をコンパクト複素曲面の間の全射正則写像とします（$\dim M = \dim N = 2$）．f の特異点の局所形として，A_1 および A_2-特異点型のみ有するものとします（上図右）．それらの標準形は以下のものです：

$$A_1 : (x, y) \mapsto (u, v) = (x^2, y), \qquad A_2 : (x, y) \mapsto (u, v) = (x^3 + yx, y).$$



(2) dim=2 case

f の A_1-型の特異点集合の閉包を $\bar{A}_1(f)$ とし（今の場合，M 上の非特異曲線），A_2-型の特異点集合の閉包を $\bar{A}_2(f)$ とします（M 上の有限個の点）．$i : \bar{A}_i(f) \to M$ を自然な

入射とします．このとき，$c_i = c_i(f^*TN - TM)$ と略記して，

$$i_*[\bar{A}_1(f)] = c_1 \frown [M], \quad i_*[\bar{A}_2(f)] = (c_1^2 + c_2) \frown [M] \tag{2}$$

が成り立ちます（R. Thom, 1955）．前者の c_1 は前出の $Tp(A_1)$ そのものであり，後者の $c_1^2 + c_2$ は A_2-特異点型の Thom 多項式 $Tp(A_2)$ です．

1.3 Thom-Porteous 公式

"特異点型"として 1-ジェット $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^p)$ の軌道 Σ^i （1 次 Thom-Boardman 特異点集合）を考えましょう．つまり，標準形 $\begin{bmatrix} E_{n-i} & O_{n-i,i} \\ O & O \end{bmatrix}$ の（左右）軌道が Σ^i です．$f : M^n \to N^p$ に対して，Σ^i-型の特異点集合は

$$\Sigma^i(f) = \{\, x \in M \mid \dim\ker df_x = i \,\}$$

です．多様体間の正則写像でなくとも，ベクトル束の間の写像 $h : E \to F$ を考えても同様です．1-ジェットの階数 r で表せば，$i = \dim\ker = n - r$ に注意しておきます．f が適当な意味で generic であれば，$[\bar{\Sigma}^{n-r}(f)]$ の M における Poincaré 双対は，Thom-Porteous 公式と呼ばれる次の形の Schur 多項式（(i,j) 成分が $c_{p-r-i+j}(f)$ で与えられる $(n-r)$ 次正方行列の行列式（$\Delta_{(p-r)^{(n-r)}}$））で与えられます：

$$Dual \circ i_*[\bar{\Sigma}^{n-r}(f)] = \Delta_{(p-r)^{(n-r)}} = \det \begin{bmatrix} c_{p-r} & c_{p-r+1} & \cdots & c_{p+n-2r-1} \\ c_{p-r-1} & c_{p-r} & \cdots & c_{p-n+2r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p-n+1} & c_{p-n+1} & \cdots & c_{p-r} \end{bmatrix}$$

特異点型 $\bar{\Sigma}^{n-r} (\subset \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^p))$ に対する Thom 多項式 $Tp(\Sigma^{n-r})$ とはこの Schur 多項式を指します．

1.4 Thom 多項式

いろいろと例を挙げてみましたが，ここで Thom 多項式の定義（存在定理）を述べておきます．ここで，M がコンパクトでなければ，考えるホモロジー群 $H_*(M)$ は Borel-Moore ホモロジー[1]（局所有限無限チェイン群のホモロジー）を用います．写像 $f : M^n \to N^{n+k}$ に対して，$k \in \mathbf{Z}$ を f の map-codimension と呼ぶことにします．写像の特異点に関する用語の説明は定理のあとに補足しておきます．

---

[1] 局所コンパクトな M に対しては，1 点コンパクト化の相対ホモロジー $H_*(M \cup \{pt\}, \{pt\})$ と言ってもよい．

Theorem 1.1 (*R. Thom, cf. Fehér-Rimányi [2], Kazarian [4]*) η を map-cod k の $\mathcal{K}$-特異点型とするとき，つぎの普遍性を有する重み付き同次多項式 $Tp(\eta)(c_1, c_2, \cdots)$ (c_i の重み $=2i$) が唯一つ存在する:任意の *mapping-codimension* k の *generic* 写像[2] $f: M^m \to N^{m+k}$ (M, N は複素多様体) に対して，次が成り立つ:

$$i_*[\eta(f)] = Tp(\eta)(c(f)) \frown [M]. \tag{3}$$

ここで，$Tp(\eta)(c(f))$ とは，$Tp(\eta)$ に $c_i = c_i(f) = c_i(f^*TN - TM)$ を代入して得られる M のコホモロジー類を指す．

(1) 写像の特異点論から少し．

- 写像芽 $f, g: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^{n+k}, 0)$ が $\mathcal{K}$-同値であるとは，$g^{-1}(0)$ を $f^{-1}(0)$ に写す正則同型芽 $\varphi: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ があるとき (正確には $f^* m_n = \varphi^* g^* m_n$，ただし m_n は $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$ の極大イデアル) にいいます．f と g が $\mathcal{A}$-同値であるとは，$g = \tau \circ f \circ \varphi$ を満たす座標変換 φ, τ があるときにいいます．f と g が $\mathcal{A}$-同値であれば $\mathcal{K}$-同値でもあります．

- 写像芽 f と g が $\mathcal{K}$-同値であるとは,「正則同型芽 $\varphi: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ と行列値正則写像芽 $A: (\mathbf{C}^n, 0) \to (GL(n, \mathbf{C}), A(0))$ があって，$g(x) = A(x).f(\varphi(x))$ が成り立つ」とも言い換えられることが分かります．そこで，写像芽の組 (φ, A) 全体からなる群を $\mathcal{K}$ ($= \mathcal{K}_{n,n+k}$) で表します．$\mathcal{K}$ の l-ジェット全体のなす群を $\mathcal{K}^l$ で表します．

- η が $\mathcal{K}$-特異点型というのは，あるジェット空間 $J^l(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^{n+k})$ の中にある $\mathcal{K}^l_{n,n+k}$-不変代数的閉集合 (たとえば η として $\mathcal{K}^l_{n,n+k}$-軌道の閉包あるいは軌道の族 (モジュライ) の閉包) を意味することとします．η ($\subset J^l(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^{n+k})$) の余次元を $\mathrm{codim}\,\eta$ で表します．

- 「$n \le m$ のとき，自然な入射 $J^l(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^{n+k}) \to J^l(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{m+k})$ は任意の $\mathcal{K}_{m,m+k}$-軌道に横断的」であることが分かります．そこで $\eta(m) := \mathcal{K}_{m,m+k}.\eta$ として，$\{\eta(m)\}_{m \ge n}$ を総称して，単に $\mathcal{K}$-特異点型 η で表します．とくに，$\eta(m)$ の $J^l(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{m+k})$ の中での余次元は m に依らず一定 ($= \mathrm{codim}\,\eta$) です．

- $\mathcal{K}$-特異点型 η (in $J^l(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^{n+k})$) と $f: M^m \to N^{m+k}$ ($m \ge n$) に対して，

  $$\eta(f) := \{\, x \in M \mid j^l f_x \in \eta(m) \quad \text{(using coordinate systems)} \,\}$$

  とおきます．$\eta(f)$ は M の解析的閉集合となるのでホモロジー基本類 $[\bar{\eta}(f)] \in H_{m-s}(M)$ ($s = \mathrm{codim}\,\eta$) を持ちます．

(2) 定理の証明 (要点だけ列挙):

- 多様体間の写像 $f: M \to N$ が N の余次元 s の閉部分多様体 W (あるいは既約解析的閉集合) に横断的であれば,

  $$\mathrm{Dual}\,[f^{-1}(W)] = f^*[W] \in H^s(M).$$

---

[2] 写像 $f: M \to N$ が generic とは，十分高い l-ジェット拡大 $j^l f: M \to J^l(TM, TN)$ が $\bar{\eta}(M, N)$ (の各 strata) に横断的であることを指す．

- $TM\oplus\tau$ が自明になるような（s 次元）概複素ベクトル束を取ってくる：$TM\oplus\tau\simeq\epsilon^{n+s}$. $J^l(TM,TN)$ の代わりに，$J^l(TM\oplus\tau,TN\oplus\tau)$ を考え，l-ジェット拡大 $j^l f$ の代わりに $j^l(f\times id)$ を考える.

- 以下の可換図式. ここで，$G=\mathcal{K}^l$，$V=J^l(n{+}s,n{+}s{+}k)$，$B_V:=V\times_G EG$，$B_\eta:=\eta\times_G EG$（$EG\to BG$ は G の普遍主束）.

$$\begin{tikzcd}
 & J(\epsilon^{n+s},TN\oplus\tau) \arrow[r,"\bar\rho"] \arrow[d] & B_V \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\supset"] & B_\eta \\
M \arrow[ur,"j(f\times id)"] \arrow[r,"1\times f"] & M\times N \arrow[r,"\rho"] & B_G \arrow[r, phantom, "\sim"] & BU(n+s)\times BU(n+s+k)
\end{tikzcd}$$

特にこのとき，$\eta(f)=(\bar\rho\circ j(f\times id))^{-1}B_\eta$.

2 Segre 型特性類

特異多様体 V には一般に Poincaré 双対が成り立ちません. 特異点を有する V の特性を調べるのには，blowing-up や smoothing などの操作で V を適当に“良い空間”に置き換えて，そこでの情報を V に還元する，というのが一般的な処方箋だと言えます. 矢印の向きを見れば，pull back でなく pushforward，specialization ...etc を考えたくなるのが自然であって，そのため，特異多様体 V の“特性類”は，コホモロジーではなく，ホモロジー（あるいはチャウ群）の中に与えます.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[d, "\text{種々の blowing-up}"'] & \\
X & X_t \arrow[l, "\text{specialization, localization ...etc}"']
\end{tikzcd}$$

一例として：ある“特定の種類の blowing-up” $p:V'\to V$ を考えて，V' のある種のコホモロジー特性類（便貴上これを $cl(V')$ と記す）を取り，それを V' の基本類とカップリングして V' のホモロジー類に置き換えて V へ pushforward したもの $cl_*(V):=p_*(cl^*(V')\cap[V'])\in H_*(V)$ を“V の cl 特性類”と見なす.

つまり，「特異点の何を見るか」あるいは「V の“接束のようなもの”をどのように設定するか」によって，様々なホモロジー特性類 $cl_*(V)$ が現れることになります.

以下で，3 種類の Chern ホモロジー特性類，

Fulton 標準類 $c^J(V)$，Chern-Mather 類 $C^M(V)$，
Chern-Schwartz-MacPherson 類 $C^{SM}(V)$

を与えます（3つとも Fulton [3] に載っている）．これらは非特異既約多様体 V に対してはすべて一致します．また，おのおのに自然な形で対応する Segre-型（"normal inverse" 型）特性類 $s^F(V,M)$，$s^M(V,M)$，$s^{SM}(V,M)$ を考えます．

2.1 ベクトル束の Chern class と Segre class

階数 n の複素ベクトル束 $E \to X$ に対して，その射影化を $p: P(E) \to X$ とし，その全空間上の標準 line bundle $\mathcal{O}_{P(E)}(1)$（toutological line bundle $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)$ の双対）と完全系列

$$0 \to K \to p^*E \to \mathcal{O}_{P(E)}(1) \to 0$$

を考えます．$t = c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))$（Euler 類）とおくと，$E$ の Chern 類 $c_i(E) \in H^{2i}(X)$ とは，

$$t^n + p^*c_1(E)t^{n-1} + \cdots + p^*c_n(E) = 0 \quad \in H^{2n}(X)$$

で与えられるものです．全 Chern 類とは $c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E)$ のことでした．ベクトル束 E の Segre 類とは，

$$s_i(E) = c_i(-E) \in H^{2i}(X)$$

で与えられます（つまり，全 Segre 類 $s(E) = 1 + s_1(E) + \cdots$ が $c(E)s(E) = 1$ で与えられる）．これは，

$$s_i(E) \cap [X] = p_*(t^{n-1+i} \cap [P(E)]) \ \in \ H_{2(n-i)}(X)$$

を満たします．(代数的なカテゴリーで話しを進めるのなら，ホモロジー・コホモロジーをチャウ群 $A_*(X)$，(operational) チャウ環 $A^*(X)$，に置き換える．以降も，単に（コ）ホモロジーで記しておく．Segre 類の定義には $c(E^*)^{-1}$ で与える流儀もあるが，Fulton 等に従い上記の形とした.)

2.2 Segre covariant class と Fulton's canonical class

X を n 次元の既約代数多様体（irred. quasi-projective scheme），V（$\subset X$）を ideal I（$\subset \mathcal{O}_X$）で与えられる部分多様体（closed scheme）とします．V の法錐の射影化を

$$D = \mathrm{Proj}(\mathcal{O}_X/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \cdots)$$

とおきます．つまり V に沿った（I による）blowing-up $X' \to X$ の例外因子が D です．D の既約因子の次元は $n-1$ です．(X の中の) V の i 次 Segre covariant 類とは，

$$s_i(V,X) = p_*(c_1(\mathcal{O}_D(1))^{n-1-i} \cap [D]) \ \in \ H_{2i}(V)$$

で与えられます．全 Segre covariant 類は $s(V,X)=\sum s_i(V,X)$ です．

以降，ambinent space X が非特異の場合を考え，M で記すことにします．この場合，便宜上，Segre covariant 類を $s^F(V,M):=s(V,M)$ と書くことにします．特異多様体 V の Fulton の標準類（canonical class）$c^F(V)$ とは，Segre covariant 類に TM の Chern 類を掛けたものとして定義します：

$$c_*^F(V):=c(TM|_V)\frown s(V,M)\ \in\ H_*(V)$$

$c^F(V)$ は埋め込み $V\to M$ に依らないことが証明できます（cf. [3] page 77）．定義からあたりまえですが，

$$s^F(V,M)=c(TM|_V)^{-1}\frown c_*^F(V)$$

であることに注意しておきます．とくに，V も非特異であれば，$\nu(=TM|_V-TV)$ を法束として，

$$c(\nu)s^F(V,M)=[V],\quad \text{つまり，}\ s^F(V,M)=c(-\nu)\cap[V](=s(\nu)\cap[V]).$$

2.3 Segre-型 Chern-Mather class

n 次元非特異代数多様体 M の m 次元既約部分（特異）多様体 V を考えます．接空間 TM の m-次元線形空間全体がなすグラスマン多様体を $G_m(TM)$ とおくと，V の非特異点全体 V_{reg} は，このグラスマン多様体の中への embedding $\varphi: V_{Reg}\ni x\mapsto TV_x\in G_m(TM_x)$ を持ちます．その closure を $\widehat{V}=\overline{\phi(V)}$ とおくと，図式

$$\begin{array}{ccc}\widehat{V} & \subset & G_m(TM)\\ p\downarrow & & \downarrow\\ V & \subset & M\end{array}$$

を得ます．$p:\widehat{V}\to V$ を V の Nash blowing up と呼びます．$G_m(TM)$ 上には m 次元 toutological vector bundle ξ があるので，これを $\widehat{V}$ 上に制限したものを $\widehat{TV}:=\xi|_{\widehat{V}}$ とおき，Nash tangent bundle と呼びます．あとはお決まりの手順で，

$$C_i^M(V):=p_*(c_{m-i}(\widehat{TV})\frown[\widehat{V}])\in H_{2i}(V)$$

により，V の i 次 Chern-Mather 類が定義されます．$C^M(V)=\sum C_i^M(V)$ とおきます．$C^M(V)$ は非特異多様体 M への V の埋め込み $V\to M$ に依らないことが証明できます（cf. [3], page 79）．

便貴的に，V の Segre-type Mather 類を次で定義します：

$$s^M(V,M):=c(TM|_V)^{-1}\frown C^M(V)\in H_*(V)$$

Chern-Mather 類とここで定義した $s^M(V, M)$ との関係は，Fulton 標準類と Segre covariant 類の関係との類似であることに注意しておきます[3]．

2.4 Segre-型 Schwartz-MacPherson class

V の各点 $x \in V$ に対して，ある局所不変量 $Eu_V(x) \in \mathbf{Z}$ を対応させる関数が local Euler obstruction $Eu_V : V \to \mathbf{Z}$ です（cf. [5]）．V の有限個の既約部分代数多様体 S_i で V の Whitney stratification $V = \bigcup S_{reg}$ を与えるものが取れ，$1_V = \sum_S n_S Eu_S$ と一意的に表されることが知られています．そこで，

$$C^{SM}(V) := C^M(V) + \sum_S n_S C^M(S)$$

により，V の Chern-Schwartz-MacPherson 類を定義します（cf. Schwartz [9], MacPherson [5], [1]）．Mather 類が埋め込みに依らぬであることより $C^{SM}(V)$ は V の埋め込み $V \to M$ の取り方に依りません．

とくに，$\mathcal{F}(X)$ を代数多様体 X 上の構成的関数全体がなすアーベル群とすると，X の既約部分多様体 V（自然な入射を $i : V \to X$）上の定数関数 1_V に対して，$C_*(1_V) := i_* C^{SM}(V) \in H_*(X)$ を対応させることで，Chern-MacPherson 変換 $C_* : \mathcal{F}(X) \to H_*(X)$ を得ます．これは自然性 $C_* f_* = f_* C_*$ を有し，また $X = M$（非特異多様体）の場合，$C_*(1_M)(= C^{SM}(M)) = c(TM) \frown [M]$ を満たすものです．

さて，著しい性質として，$C^{SM}(V)$ の 0 次の項は V の Euler 標数を与えます：

$$\chi(V) = C_0^{SM}(V) \in H_0(V) \simeq \mathbf{Z} \qquad (V \text{ が既約（連結）のとき})$$

実際，V から一点への写像 $\pi : M \to \{pt\}$ を取ると，

$$\pi_* C_*(\mathbf{1}_V) = \pi_* C_*(\mathbf{1}_V) = C_*(\pi_* \mathbf{1}_V) = \pi_* \mathbf{1}_V(pt) = \int_M \mathbf{1}_V d\chi = \chi(V). \blacksquare$$

便宜的に，V の Segre-type Schwartz=MacPherson 類を次により定義します：

$$s^{SM}(V, M) := c(TM|_V)^{-1} \frown C^{SM}(V) \in H_*(V)$$

V が既約（reduced）で $m = \dim V$ あるとします．上記の 3 種類の Segre-type class の top dimensional part（m-th part）は，定義より V の基本類に他なりません：

$$s_m^M(V, M) = s_m^{SM}(V, M) = s_m^F(V, M) = [V].$$

---

3 上記の Chern-Mather 類の定義において，Chern 類 $c(\widehat{TV})$ の代わりに Segre 類を取った $S^M(V, M) := p_*(s(\widehat{TV}*) \frown [\widehat{V}])$ を Segre-Mather 類と言う場合があります．一般に $S^M(V, M) \neq s^M(V, M)$ です（勿論，V が非特異であれば同じ）

3 Segre 類に対する Thom 多項式定理

本講の主定理はつぎのものです.

Theorem 3.1 η を map-cod k の $\mathcal{K}$-特異点型とし, $s = \operatorname{codim}\eta$ とする. このとき, つぎの普遍性を有する多項式の系列

$$s^{SM}(\eta) = \sum_{j=s}^{\infty} s_j^{SM}(\eta)(c_1, c_2, \cdots)$$

が唯一つ存在する : 任意の *"generic"* 写像 $f : M^m \to N^{m+k}$ (M, N は複素多様体) に対して, 次が成り立つ :

$$i_* s^{SM}(\eta(f), M) = s^{SM}(\eta)(c(f)) \frown [M], \tag{$*$}$$

Remark 3.2 *(1)* $(*)$ は次のように書き換えられます :

$$i_* C^{SM}(\eta(f)) = c(TM) \cdot s^{SM}(\eta)(c(f)) \frown [M]. \tag{$*'$}$$

(ここで, $s^{SM}(\eta)(c(f))$ とは, $s^{SM}(\eta)$ に $c_i = c_i(f) = c_i(f^*TN - TM)$ を代入して得られる M のコホモロジー類を指し, $i : \eta(f) \to M$ は自然な入射を表す.)
とくに, $s^{SM}(\eta)$ の最小次項は η の *Thom* 多項式に他ならない :

$$s^{SM}(\eta) = s_s^{SM}(\eta) + \cdots = Tp(\eta) + \cdots \qquad (s = \operatorname{codim}\eta).$$

(2) Segre-Mather 類 (*Chern-Mather* 類) あるいは *Segre covariant* 類 (*Fulton* 標準類) に対しても上記の定理と同様な結果が成り立つ.

Corollary 3.3 η を map-cod k の $\mathcal{K}$-特異点型とする. このとき, 任意の *"generic"* 写像 $f : M^m \to N^{m+k}$ に対して, η 型特異点集合 $\eta(f)$ の *Euler* 数は次の表示をもつ :

$$\begin{aligned}\chi(\eta(f)) &= \int_M c(TM) \cdot s^{SM}(\eta)(c(f)) \\ &= \sum_{j=0}^{m} c_j(TM) s_{m-j}^{SM}(\eta)(c(f)) \frown [M]\end{aligned}$$

Example 3.4 η として *1-jet space* $J^1(m, m+k) = Hom(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{m+k})$ の中の *rank singularity*

$$\bar{\Sigma}^i = \{\, h \in J^1(m, m+k) \mid \dim\ker h \geq i \,\}$$

とします. *rank* が m, $m+k$ であるベクトル束 $E \to M$, $F \to M$ の間の束写像 $f : E \to F$ に対して, f の *degeneracy loci*

$$\bar{\Sigma}^i(f) = \{\, x \in M \mid \dim\ker(f_x : E_x \to F_x) \geq i \,\}$$

の *Segre* 類を底空間 M のコホモロジー類とみなしたもの $i_*s(\bar{\Sigma}^i(f), M)$ は,（f に依存しない）*universal* な多項式 $s(\bar{\Sigma}^i)(c(f))$ で与えられる，というのが上の定理の主張です（最小次項は *Thom-Porteous* 公式そのもの）. *Segre* 型 *Chern-Schwartz-MacPherson* 類 $s^{SM}(\bar{\Sigma}^i)$ は，*Parusinski-Pragacz [8]* で具体的に計算されています（各項は種々の *Schur* 多項式の和の形になっている）.

定理の証明は，Thom 多項式の存在定理の証明をそのまま追うことになりますが，前章のSegre 型特性類（および Chern ホモロジー特性類）の G-同変版を構成することがキーポイントです (cf. [6]). 筆者の立場では，Thom 多項式の一般論は G-同変 Segre 型特性類の理論 [7] であると考えます.

参考文献

[1] J. P. Brasselet and M. H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'une ensemble analytique complexe*, Astérisque vol 82–83 (1981), 93–148.

[2] L. Fehér and R. Rimányi, *Calculation on Thom polynomials for group actions*, preprint (2000), arXiv:math.AG/0009085.

[3] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag (1984)

[4] M. E. Kazarian, *Thom polynomials*, Hokkaido Univ. Tech. Report Series in Math. no.78, September 2003 (The 12th MSJ-IRI "Singularity Theory and Its Applications" Abstracts, 86–118.

[5] R. MacPherson, *Characteristic classes of singular algebraic varieties*, Ann. of Math. , vol. 100, no.3 (1974), 421–432.

[6] T. Ohmoto, *Thom polynomial expression for Segre classes of singularity loci of maps*, preprint (2004)

[7] T. Ohmoto, *Equivariant Chern classes of singular G-varieties*, preprint (2004)

[8] A. Parusinski and P. Pragacz, *Chern-Schwartz-MacPherson classes and the Euler characteristic of degeneracy loci and special divisors*, J.-Amer.-Math.-Soc. [Journal-of-the-American-Mathematical-Society] 8 (1995), no. 4, 793–817.

[9] M. H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, C. R. Acad. Sci. Paris t.260 (1965), 3262-3264, 3535–3537