数理解析研究所講究録 1375 巻 2004 年 126-129

Minimum Universal Evaluation Tree for Boolean Circuits

牧山 幸史 (Koji Makiyama)* 小野廣隆 (Hirotaka Ono)†
定兼邦彦 (Kunihiko Sadakane)† 山下雅史 (Masahumi Yamashita)†
* 九州大学大学院システム情報科学府 † 九州大学大学院システム情報科学研究院
*† Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

概要

現在，我々は，プログラマブルコントローラと呼ばれる制御用機器に対する専用回路のアーキテクチャを決定する際に現れた，最小評価木問題という最適化問題に対して考察を行っている．これは，ノード数 n のすべての二分木を被覆するような二分木の中で，ノード数が最小のものを求めよというものである．本稿では，この問題に対し，ある集合が実行可能解の集合に含まれることを示し，その中で最小の解を求めるアルゴリズムを示した．

1 研究背景

現在，我々は最小評価木問題と呼ばれる最適化問題に対して考察を行っている．最小評価木問題とは，「ノード数 n のすべての二分木を被覆するような二分木の中で，ノード数が最小のものを求めよ」という問題である．この問題は，制御機器プログラマブルコントローラのプロセッサ部に組み込むために考案された，LEU (Logic Evaluation Unit) [1] の構造を決定する際に現れたものである．

LEU は，論理式計算を行うための演算回路であり，基本ユニットと呼ばれる AND 演算と OR 演算の両方を実現可能な回路を二分木状に接続することによって構成される (図 1)．LEU に求められる機能は，一つの LEU で，例えば，$(a \cdot b) + (c \cdot d)$ と $((a+b) \cdot c) + d$ のように，複数の論理式を計算できることである[1]．

基本ユニットは AND 演算と OR 演算の両方に対応できるので，論理式 $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ を計算できる

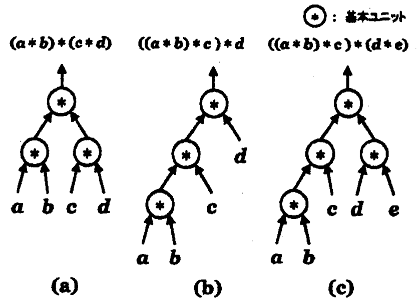

図 1: LEU の例

LEU とは，図 1 (a) のような構造を持つものである．この構造は，$(a*b)*(c*d)$ と表すことができる．しかし，$(a*b)*(c*d)$ という構造を持っているだけでは，$((a+b) \cdot c)+d$ のような形の論理式には対応できない．この論理式を計算するためには，LEU は $((a*b)*c)*d$ という構造 (図 1 (b)) を持っていなくてはならない．

$(a*b)*(c*d)$ と $((a*b)*c)*d$ という二つの構造を合わせ持った LEU は，無数に存在する．例えば，単純に，$(a*b)*(c*d)*((a'*b')*c')*d'$ とすればよい．LEU は，入力 (a, b 等) および演算 ($*$) を部分的に固定できる．したがって，上式で，$(a*b)*(c*d) \cdot ((1 \cdot 1) \cdot 1) \cdot 1$ のように固定すれば，$(a*b)*(c*d)$ を計算できることになる．このように，LEU が，入力および演算を固定することによって，ある論理式を計算できるようになるとき，LEU はその論理式を表現できるという．

LEU に要求されるのは，プログラム中に現れるすべての論理式を表現できることである．しかし，プログラムが決定されるまで，そのような論理式は未知である．そこで，ある自然数 n を定め，プログラム中に現れる論理式を n 変数以下の部分論理式に分けるように，コンパイラを設計する．これにより，LEU に要求される条件は「n 変数以下のすべての論理式を表現できること」となる．

[1] 論理式中に現れる変数 (a, b 等) には，プログラマブルコントローラが制御するシステムの各部の状態 (0, 1) が入力される．プログラマブルコントローラは，一つのプログラムを繰り返し実行することによってシステムを制御するため，プログラムが決定されたとき，計算するべき論理式もすべて決定される．プログラム実行中，LEU は決まった順番で，決まった論理式の計算を繰り返し行うだけである．ただし，LEU に変数として入力される値は，システムの状態によって時間とともに変化する．そのため，LEU には変数に値が定まっていない「論理式」を計算できることが要求されるのである．

有限個の論理式が与えられたとき，そのすべてを表現できるようなLEUは無数に存在する．したがって，上の条件を満たすLEUは無数に存在する．ただし，LEUの構造を決める際，そのハードウェア量，すなわち，基本ユニット数はなるべく少ない方が良い．例えば，4変数の論理式は，必ず図1 (a), (b) のどちらかの形をとる．この両方の形を表現できるLEUの中で，最も基本ユニット数が少ないのは，図1 (c) である．

したがって，LEUの構造を決定する際，次の問題を考える必要がある.「変数の数が n のすべての論理式を表現できるようなLEUの中で，基本ユニット数が最も少ないものを求めよ」これを最小評価木問題という．

本稿では，LEUおよび論理式の形を二分木と対応させ，あるLEUが，ある形の論理式を表現できることを，二分木の集合上における被覆という関係によって表すことで，最小評価木問題が定式化される．このとき，論理式における変数の数と，LEUにおける基本ユニット数は，どちらも二分木におけるノード数に対応することになる．したがって，最小評価木問題は,「ノード数 n のすべての二分木を被覆するような二分木の中で，ノード数が最小のものを求めよ」となる．

本稿の構成は以下の通りである．第2節では，最小評価木問題の定式化を行う．第3節では，ある集合が最小評価木問題の実行可能解の集合に含まれることを示す．第4節では，実行可能解のある部分集合から，最小な元を求めるアルゴリズムを示す．第5節では，まとめと今後の課題を述べる．

2 問題の定式化

本節では，最小評価木問題の定式化を行う．

$(\boldsymbol{B}, \mathrm{nil}, \tau)$ を二分木の体系 [2]，$\boldsymbol{B}^+$ を nil でない二分木全体の集合とする．nil は葉のみからなる二分木を表している．τ は $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}$ から $\boldsymbol{B}^+$ への全単射であるので，任意の $b \in \boldsymbol{B}^+$ は，$b=\tau(b_1,b_2)$ と一意に表される．このとき，$(b)_L=b_1$, $(b)_R=b_2$ と表すことにする．これらは，二分木の根から見て，右の子と左の子を表すものである．

定義 2.1 (二分木のノード数) 二分木 b のノード数を $|b|$ と表し，次で定義する：

$$|b| = \begin{cases} 0 & (b=\mathrm{nil}) \\ |(b)_L| + |(b)_R| + 1 & (b \neq \mathrm{nil}) \end{cases}.$$

ノード数 n の全ての二分木の集合を $\boldsymbol{B}_n$ と表す．このとき，

$$\boldsymbol{B} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{B}_i \quad \text{および} \quad \boldsymbol{B}_i \cap \boldsymbol{B}_j = \emptyset \ \ (i \neq j)$$

が成り立つ．

定義 2.2 (被覆) $b_1, b_2 \in \boldsymbol{B}$ に対して，b_2 が b_1 を被覆することを $b_1 \sqsubseteq b_2$ と書き，次のいずれかを満たすときと定義する：

1. $b_1 = \mathrm{nil}$,
2. $(b_1)_L \sqsubseteq (b_2)_L$ かつ $(b_1)_R \sqsubseteq (b_2)_R$,
3. $(b_1)_L \sqsubseteq (b_2)_L$ かつ $(b_1)_R \sqsubseteq (b_2)_R$,
4. $b_1 \sqsubseteq (b_2)_L$ または $b_1 \sqsubseteq (b_2)_R$.

問題 2.3 (最小評価木問題) すべての自然数 n に対して，

$$Z_n = \{z \in \boldsymbol{B} \mid \forall b \in \boldsymbol{B}_n (b \sqsubseteq z)\}$$

とおく．このとき，与えられた自然数 n に対して，

$$Z_n^* = \{z \in Z_n \mid \forall z' \in Z_n (|z| \leq |z'|)\}$$

に属する元を求めよ．

定義 2.4 (正規元) $b \in \boldsymbol{B}$ が正規元であるとは，次のいずれかを満たすときをいう：

1. $b = \mathrm{nil}$,
2. $(b)_L, (b)_R$ は正規元かつ $|(b)_L| \geq |(b)_R|$.

すべての正規元からなる集合を R と表す．ノード数 n の全ての正規元の集合を R_n と表す．

問題 2.5 (準最小評価木問題) すべての自然数 n に対して，

$$Y_n = \{y \in R \mid \forall r \in R_n (r \sqsubseteq y)\}$$

とおく．このとき，与えられた自然数 n に対して，

$$Y_n^* = \{y \in Y_n \mid \forall y' \in Y_n (|y| \leq |y'|)\}$$

に属する元を求めよ．

準最小評価木問題の実行可能解は，最小評価木問題の実行可能解でもある．すなわち，すべての n に対して，$Y_n \subseteq Z_n$ が成り立つ．

3 定理

任意の $b \in \boldsymbol{B}^+$ は，$b = \tau(b_1, \tau(b_2, \tau(b_3, \ldots, b_m))))$ のように表すことができる．これを簡単に，

$$b = \tau(b_1, b_2, b_3 \ldots, b_m)$$

と表す．

本節では，任意の n に対して，次で定義される集合 X_n が Z_n の部分集合であることを示す．

$$W_0 = \emptyset,$$
$$W_n = \{(\boldsymbol{w_i}, z_n, \boldsymbol{w_{n-i-1}}) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$$

ただし，$\boldsymbol{w_j} \in W_j, z_j \in Z_j$.

$$X_0 = \{\mathrm{nil}\},$$
$$X_n = \{\tau(z_i, z_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}, \boldsymbol{w_{n-i-1}}) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$$

ただし，$z_j \in Z_j, \boldsymbol{w_j} \in W_j$.

任意の $b \in \boldsymbol{B}^+$ に対して，$b = \tau(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ のとき，$b_1 = \mathrm{nil}$ となるような $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \boldsymbol{B}^m$ は一意に定まる．このとき，$f : \boldsymbol{B}^+ \rightarrow \boldsymbol{B}^m$ を，$f(b) = (\mathrm{nil}, b_2, b_3, \ldots, b_m)$ で定める．

定義 3.1 (τ に対する単位元) 次の性質を持つ元 ε を考える．

1. $\forall b \in \boldsymbol{B}[\tau(b, \varepsilon) = \tau(\varepsilon, b) = b]$,
2. $\tau(\varepsilon, \varepsilon)$,
3. $|\varepsilon| = 0$.

このような元は $\boldsymbol{B}$ には存在しない．$\boldsymbol{B}$ に ε を付け加えたものを $\boldsymbol{B}'$ で表す．

すべての自然数 n に対して，

$$R'_n = \bigcup_{i=0}^{n} R_i \cup \{\varepsilon\},$$
$$T_n = R'_n \times R'_{n-1} \times \cdots \times R'_0,$$
$$T'_n = \{\boldsymbol{t} \in T_n \mid |\tau(\boldsymbol{t})| = n\},$$
$$L_n = \{\boldsymbol{l} \in R'_n \mid |\tau(\boldsymbol{l})| = n\}$$

とおく．

補題 3.2 任意の自然数 n に対して，

$$\forall \boldsymbol{l} \in L_n, \exists \boldsymbol{t} \in T'_n[\tau(\boldsymbol{l}) = \tau(\boldsymbol{t})]$$

が成り立つ．

系 3.3 任意の自然数 n に対して，

$$\forall r \in R_n, \exists \boldsymbol{t} \in T'_n[r = \tau(\boldsymbol{t})]$$

が成り立つ．

定義 3.4 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}'^m$ が，任意の i $(1 \leq i \leq m)$ に対して，次のいずれかを満たすとき，$\boldsymbol{a} \sqsubseteq \boldsymbol{b}$ と書く．

1. $a_i = \varepsilon$,
2. $a_i \sqsubseteq b_i$

ただし，$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)$.

命題 3.5 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}'^m$ に対して，

$$\boldsymbol{a} \sqsubseteq \boldsymbol{b} \implies \tau(\boldsymbol{a}) \sqsubseteq \tau(\boldsymbol{b})$$

が成り立つ．

補題 3.6 任意の $b_1, b_2 \in \boldsymbol{B}^+$ に対して，

$$b_1 \sqsubseteq b_2 \implies \exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B}'^m[b_1 = \tau(\boldsymbol{a}) \text{ かつ } \boldsymbol{a} \sqsubseteq f(b_2)]$$

が成り立つ．

補題 3.7 任意の n, $i (1 \leq i \leq n)$ に対して，

$$\forall \boldsymbol{t_i} \in T'_i, \exists \boldsymbol{t_n} \in T_n[\ \tau(\boldsymbol{t_i}) = \tau(\boldsymbol{t_n}) \text{ かつ } \forall \boldsymbol{w_n} \in W_n[\boldsymbol{t_n} \sqsubseteq \boldsymbol{w_n}]]$$

が成り立つ．

定理 3.8 任意の n に対して，

$$\forall r \in R_n, \forall x_n \in X_n[r \sqsubseteq x_n]$$

が成り立つ．

この定理により，任意の n に対して，$X_n \subseteq Y_n$ がわかる．$Y_n \subseteq Z_n$ より，$X_n \subseteq Z_n$ が成り立つ．

4 アルゴリズム

X_n の定義の中には，最小評価木問題の実行可能解の集合 Z_i $(1 \leq i < n)$ が現れる．ここでは，この Z_i は未知であるため，次の定義をおく．

$$W'_0 = \emptyset,$$
$$W'_n = \{(\boldsymbol{w_i}, x_n, \boldsymbol{w_{n-i-1}}) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$$

ただし，$w_j \in W'_j, x_j \in X'_j$.

$$X'_0 = \{\mathrm{nil}\},$$
$$X'_n = \{\tau(x_i, x_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}, w_{n-i-1}) \mid 0 \le i \le n-1\}$$

ただし，$x_j \in X'_j, w_j \in W'_j$. これらの集合に対して，$W'_n \subseteq W_n$, $X'_n \subseteq X_n$ が成り立つことは明らかである．

本節では，X'_n の最小元の集合

$$X'^*_n = \{x \in X'_n \mid \forall x' \in X'_n(|x| \le |x'|)\}$$

を求めるアルゴリズムを示す．

アルゴリズム 4.1 自然数 n が与えられたとする．

1. $W'^*_0 \leftarrow \emptyset$, $X'^*_0 \leftarrow \{\mathrm{nil}\}$, $k \leftarrow 1$.
2. もし $k = n$ ならば終了．$X'^*_n = X'^*_k$ が求めるべき集合である．$k \ne n$ ならば 3. へ進む．
3. $X'^*_k \leftarrow \{\tau(x_i, x_{\lfloor (k-1)/2 \rfloor}, w_{k-i-1}) \mid |x_i| + |\tau(w_{k-i-1})| = \min_{i'<k}(|x_{i'}| + |\tau(w_{k-i'-1})|)\}$,
   $W'^*_k \leftarrow \{(w_i, x_k, w_{k-i-1}) \mid |\tau(w_i)| + |\tau(w_{k-i-1})| = \min_{i'<k}(|\tau(w_{i'})| + |\tau(w_{k-i'-1})|)\}$,
   $k \leftarrow k+1$, 2. へ戻る．

ただし，$w_j \in W'^*_j$, $x_j \in X'^*_j$.

任意の $x_n \in X'_n$ に対して，そのノード数 $|x_n|$ は，次のように表される．

$$\begin{aligned} |x_n| &= |\tau(x_i, x_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}, w_{n-i-1})| \\ &= |x_i| + |x_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}| + |\tau(w_{n-i-1})| + 1 \end{aligned}$$

ここで，$|x_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}|$ は n によって固定されていることから，$|x_i| + |\tau(w_{k-i-1})|$ が最小となるように i をとれば，x_n は X'_n の中でノード数最小である．したがって，アルゴリズム 4.1 によって求められる解は，X'_n の中でノード数最小である．

アルゴリズム 4.1 によって求まる解は，$1 \le i < n$ までは，最小評価木問題の解であることが計算機により確認されている．すなわち，$1 \le n \le 10$ のとき，$X'^*_n \subseteq Z^*_n$ である．このうち，$n = 1,2,3,4,6,9,10$ に対しては，最小評価木問題の解はすべてアルゴリズム 4.1 で求まる．すなわち，$n = 1,2,3,4,6,9,10$ に対しては，$X'^*_n = Z^*_n$ である．しかし，$n = 5,7,8$ に対しては，最小評価木問題の解であるが，アルゴリズム 4.1 では求められないものが存在する．すなわち，$n = 5,7,8$ に対しては，$X'^*_n \subsetneq Z^*_n$ である．

5 おわりに

本稿では，最小評価木問題に対して，実行可能解の部分集合 X'_n における最小元を求めるアルゴリズムを示した．このアルゴリズムにより求まる解は，$n \le 10$ のとき，最小評価木問題における最小解である．しかし，$n > 10$ に対して，このアルゴリズムにより求まる解が，最小評価木問題の最小解となるかどうかは未解決であり，これを解決することが今後の課題となる．

参考文献

[1] 山口大介，松永裕介，「プログラマブルコントローラ向けアーキテクチャの検討とその評価」，電子情報通信学会技術研究報告，CPSY2002-108, pp. 19-24, Mar. 2003

[2] 牧山幸史，「二分木の体系」，http://kasuga.csce.kyushu-u.ac.jp/~makiyama/kenq/METProblem/index.html，九州大学システム LSI センター内部資料