数理解析研究所講究録 1375 巻 2004 年 15-21

分割量子セルオートマトンの一般化とその挙動について

Generalization of partitioned quantum cellular automata and their behaviors

井口修一 (Shuichi INOKUCHI)* 溝口佳寛 (Yoshihiro MIZOGUCHI)
乾徳夫 (Norio INUI)†

1 はじめに

量子コンピュータは, 量子力学の原理に基づいて動作するコンピュータのモデルであり, 従来のコンピュータよりも効率的に計算が行える可能性を秘めており近年注目を集めている [1, 2, 3].

量子コンピュータのモデル構築には, 量子状態の保存機能, そして, 量子状態に対する演算操作 (ユニタリ変換) の定式化が必要である。一般には, 複数個の量子状態を並べて保存し, それらのうちのいくつかに量子論理ゲートと呼ばれる演算操作を行い量子計算を実現するモデルが多く考えられている。この量子論理ゲートを用いた種々のアルゴリズムの実現, ならびに, 量子論理ゲートを実現する物理システムの構築が様々研究されている。

その量子コンピュータの 1 つのモデルとして 1995 年 J.Watrous は量子セルオートマトン (量子 CA) を提案した [4]. 一般の量子 CA は局所関数が与えられたときに, 量子 CA を構成出来るかどうかの判定が難しい. Watrous は, 分割量子 CA を提案し, 局所関数から量子 CA を構成出来るかどうかを判定する簡単な条件を示した. また, 分割量子 CA, 量子 CA ともに, 量子チューリング機械 (QTM)[5] と同等の計算能力を持つことを証明した.

古典的な CA においては, 森田, 原尾ら [6] によってセルを 3 分割することにより可逆な CA[7, 8] を一般的に定義することが出来る. また, 非可逆な一般の 1 次元の CA を可逆 CA で模倣出来ることが示されている. Watrous の分割量子 CA は, この 3 分割 CA を量子 CA に応用したものである.

量子 CA の計算能力が十分あることは証明されているものの, 一方で, 古典的な CA は, 自然な拡張に対して, 量子 CA とはならない. また, 分割 CA は非分割 CA を模倣することは出来るが, お互いの CA の自然な包含関係は存在しない.

そこで, 本稿では, 自然な拡張の可能性を考察するために, 有限セルサイズの巡回型 CA に対して, 量子 CA, 分割量子 CA の定式化を行い, 局所関数が量子 CA を定義するための条件を求めた. また, 1 次元 2 状態巡回型量子 CA のうち, 古典的な 3 近傍局所関数と 2 次元のユニタリ変換との合成で構成される量子 CA の挙動について考察する。特に, 局所遷移規則番号 150 と 204 の量子 CA の様相と周期に関する性質を示す。

2 準備

状態集合を Q とし, その元の個数を $|Q| = s$ とする. CA を考えるときのセルサイズを n とする. Q^n の元 q に対し, その i 番目の要素を q_i と書く. また, 便宜上, $q_0 = q_n$, $q_{n+1} = q_1$ と考える.

量子状態に関する計算を考える前に, 非決定性状態に関する計算について復習しておく. 状態 Q に対して, 非決定的な状態を表すために, Q の部分集合全体, すなわち, Q から $2 = \{0, 1\}$ への関数全体の集合 2^Q を用いる. Q の元 q は, 2^Q の元 $\{q\}$ と考えることで, Q から 2^Q への自然な包含写像が存在する. 有限集合 Σ を入力文字の集合とするとき, 決定性有限オートマトンの状態遷移関数は, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ で与えられる. そして, 入力文字列に対する遷移関数 $\delta_* : Q \times \Sigma^* \to Q$ へ自然に拡張出来る. δ の像を 2^Q の元と考えて出来る関数を $[\delta] : Q \times \Sigma \to 2^Q$ と書くことにする. この $[\delta]$ は非決定性有限オートマトンの状態遷移関数とな

*九州大学大学院数理学研究院
Faculty of Mathematics, Kyushu University
{inokuchi, ym}@math.kyushu-u.ac.jp
†姫路工業大学 工学研究科 機械知能工学部門
Graduate School of Engineering, Himeji Institute of Technology

り, $[\delta]_* : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ へ拡張出来る. 一方, δ_* の像を 2^Q の元と考えて出来る関数を $[\delta_*]$ と書くことにすると, $[\delta_*] = [\delta]_*$ が成立することが簡単な計算でわかる. このことは, 決定性有限オートマトン全体が非決定性有限オートマトン全体の中に自然な形で包含されていることを示している.

一方, 古典状態の一般化として量子状態を考えた場合には, 計算機構の定式化を量子状態の計算に一般化した場合でも, 古典的な計算機構の全てが自然な形で量子的な計算機構に包含されるとは限らない. それは, 量子計算過程がユニタリ性を持っていなければならず, 古典的に定義出来る計算機構が全てユニタリ性を持っているとは限らないからである.

量子状態を有限集合 Q から複素数 $\mathbf{C}$ への関数で表し, Q から $\mathbf{C}$ への関数全体を $\mathbf{C}^Q$ と書く. Q の元 q に対して, $[q] \in \mathbf{C}^Q$ を以下のように定義する.

$$[q](x) = \begin{cases} 1 & (x = q) \\ 0 & (x \neq q) \end{cases}$$

$\mathbf{C}^Q$ は Q の元を基底に持つ $\mathbf{C}$ 上の線形空間と考えられる. また, $\mathbf{C}^Q$ での内積は, $\langle p, q\rangle = \sum_{x \in Q} (p(x) \cdot q(x))$ で定義する.

$\mathbf{C}^{(Q^n)}$ は $\mathbf{C}$ 上の線形空間としては, n 個の $\mathbf{C}^Q$ のテンソル積 $\underbrace{\mathbf{C}^Q \otimes \mathbf{C}^Q \otimes \cdots \otimes \mathbf{C}^Q}_{n}$, すなわち, $p \in Q^n$ に対して, $[p] = [p_1] \otimes [p_2] \otimes \cdots \otimes [p_n]$ と考えることが出来る. $\mathbf{C}^{(Q^n)}$ での内積は, $p, q \in Q^n$ に対して,

$$\begin{aligned}
\langle [p], [q] \rangle &= \sum_{x \in Q^n} ([p](x) \cdot [q](x)) \\
&= \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q^n} (([p_1](x_1)[p_2](x_2) \cdots [p_n](x_n)) \\
&\qquad \cdot ([q_1](x_1)[q_2](x_2) \cdots [q_n](x_n))) \\
&= \sum_{x_1 \in Q} ([p_1](x_1)[q_2](x_1)) \cdot \sum_{x_2 \in Q} ([p_2](x_2)[q_2](x_2)) \\
&\qquad \cdots \sum_{x_n \in Q} ([p_n](x_n)[q_n](x_n)) \\
&= \langle [p_1], [q_1] \rangle \langle [p_2], [q_2] \rangle \cdots \langle [p_n], [q_n] \rangle
\end{aligned}$$

となる.

関数 $F : Q^n \to \mathbf{C}^{(Q^n)}$ に対して, $\alpha_F : Q^n \times Q^n \to \mathbf{C}$ を $\alpha_F(p, q) = F(p)(q)$ で定義する. また, $\overline{F} : \mathbf{C}^{(Q^n)} \to \mathbf{C}^{(Q^n)}$ を $\overline{F}(X) = \sum_{q \in Q^n} (X(q)(F(q)))$ で定義する. 任意の量子状態 $X \in \mathbf{C}^{(Q^n)}$ に対して, $||X|| = 1$ のとき, 必ず, $||\overline{F}(X)|| = 1$ となるとき, $\overline{F}$ を <u>ユニタリ変換</u> と言う.

Q は有限集合なので, Q の元には自然に 1 から s までの番号付をすることが出来, 辞書式順序により, Q^n の元にも自然に 1 から s^n までの番号付をすることが出来る. そして, 番号 i の元を p, 番号 j の元を q としたとき, $\alpha_{ij} = \alpha_F(p, q)$ と書くことにすると $s^n \times s^n$ 行列, (α_{ij}) を定義出来る.

命題 2.1 行列 (α_{ij}) がユニタリ行列ならば, $\overline{F}$ はユニタリ変換である.

(証明) (α_{ij}) がユニタリ行列で, $\langle X, X \rangle = 1$ とする.

$$\begin{aligned}
\langle \overline{F}(X), \overline{F}(X) \rangle &= \langle \sum_{p \in Q^n} X(p)\overline{F}(p), \sum_{q \in Q^n} X(q)\overline{F}(q) \rangle \\
&= \sum_{p \in Q^n} \sum_{q \in Q^n} \langle X(p)\overline{F}(p), X(q)\overline{F}(q) \rangle \\
&= \sum_{p \in Q^n} (X(p) \sum_{q \in Q^n} (X(q) \sum_{r \in Q^n} (\overline{F}(p)(r) \cdot \overline{F}(q)(r)))) \\
&= \sum_{p \in Q^n} (X(p) \sum_{q \in Q^n} (X(q) \sum_{r \in Q^n} (\alpha(p, r) \cdot \alpha(q, r)))) \\
&= \sum_{p \in Q^n} (X(p) \sum_{q \in Q^n} (X(q) \sum_{r \in Q^n} (\alpha(p, r) \cdot \overline{\alpha(r, q)}))) \\
&= \sum_{p \in Q^n} (X(p) \cdot X(p)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

より, $\overline{F}$ がユニタリ変換であることが示される. □

命題 2.2 関数 $\sigma : Q^n \to Q^n$ に対して, $\hat{\sigma} : \mathbf{C}^{Q^n} \to \mathbf{C}^{Q^n}$ を $\hat{\sigma}(X)(p) = X(\sigma(p))$ で定義する. このとき, $\hat{\sigma} = \overline{[\sigma]}$ であり, $\hat{\sigma}$ がユニタリ変換であることと, σ が全単射であることとは同値である. □

(古典的な)<u>セルオートマトン (CA)</u> とは, 局所関数 $f : Q \times Q \times Q \to Q$ に対して, 大域関数 $F : Q^n \to Q^n$ を $F(q)_i = f(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})$ で定義して出来る, Q 上の状態遷移系のことである.

$Q = \{0, 1\}$ のとき, 局所関数は, 8 つの値
$f(0,0,0) = r_0$, $f(0,0,1) = r_1$, $f(0,1,0) = r_2$,
$f(0,1,1) = r_3$, $f(1,0,0) = r_4$, $f(1,0,1) = r_5$,
$f(1,1,0) = r_6$, $f(1,1,1) = r_7$ $(r_i = 0, 1)$
で定まる.
$R = 2^7 r_7 + 2^6 r_6 + 2^5 r_5 + 2^4 r_4 + 2^3 r_3 + 2^2 r_2 + 2^1 r_1 + 2^0 r_0$
とすると, 全ての局所関数に 0 から 255 までの数を定めることが出来る. この数 R を局所関数 f の規則番号という. また, 規則番号 R の局所関数を f_R と書くことにする. 次の表は, 規則番号 204, 240, 170 に対する遷移表である.

規則	111	110	101	100	011	010	001	000
204	1	1	0	0	1	1	0	0
規則	111	110	101	100	011	010	001	000
240	1	1	1	1	0	0	0	0
規則	111	110	101	100	011	010	001	000
170	1	0	1	0	1	0	1	0

f_{204} は恒等写像, f_{240} は右シフト, f_{170} は左シフトを定める局所関数になっている. また, $R=0,\cdots,127$ に対する f_R と $R=255,\cdots,128$ に対する f_R は, それぞれ, 0, 1 を反転したものであり, 同じ物と考えられる.

3 量子セルオートマトン

局所関数 $f: Q\times Q\times Q \to \mathbf{C}^Q$ に対して, 大域関数 $F: Q^n \to \mathbf{C}^{(Q^n)}$ を $F(q)(x) = f(q_0,q_1,q_2)x_1 \cdot f(q_1,q_2,q_3)x_2 \cdots f(q_{n-1},q_n,q_{n+1})x_n$ で定義し, $\overline{F}: \mathbf{C}^{(Q^n)} \to \mathbf{C}^{(Q^n)}$ により, $\mathbf{C}^{(Q^n)}$ 上の状態遷移系が定まる. 局所関数 f は, この $\overline{F}$ がユニタリ変換となるとき, **量子セルオートマトンを定義する** と言う.

古典的なCAの局所関数 $f: Q^3 \to Q$ に対する大域関数を $F_f: Q^n \to Q^n$ とする. この F_f の像を $\mathbf{C}^{Q^n}$ の元と考えて出来る関数を $[F_f]: Q^n \to \mathbf{C}^{Q^n}$ とする. 一方, f の像を $\mathbf{C}^Q$ の元と考えて出来る関数を $[f]: Q^3 \to \mathbf{C}^Q$ とする. この $[f]$ を量子CAの局所関数と考え, 大域関数を $F_{[f]}: Q^n \to \mathbf{C}^{(Q^n)}$ とする. このとき, $[F_f] = F_{[f]}$ が成立つことが簡単な計算で確かめられる. しかし, 任意の局所関数 $f: Q^3 \to Q$ に対して, $[f]$ が量子CAを定義する, すなわち, $\overline{[F_f]}$ がユニタリ変換になるとは限らない. そして, 次の命題が導かれる.

命題 3.1 $F_f: Q^n \to Q^n$ が全単射のときに限り, $[f]$ は量子 *CA* を定義する. □

4 分割量子セルオートマトン

関数 $g: Q \to C^Q$ に対して, $G: Q^n \to \mathbf{C}^{(Q^n)}$ を $G(q)(x) = g(q_1)x_1 \cdot g(q_2)x_2 \cdots g(q_n)x_n$ で定義し, $\lambda: Q\times Q \to \mathbf{C}$ を $\lambda(p,q) = g(p)(q)$ で定義する.

第2節と同様に, Q^n の元に1から s^n までの番号付を行い, 関数 $\alpha_G: Q^n \times Q^n \to \mathbf{C}$ に対して, $s^n\times s^n$ 行列 (α_{ij}) が定まる. また, 同様に Q の元に1から s までの番号付を行い, 関数 λ に対して, $s\times s$ 行列 (λ_{ij}) が定まる.

命題 4.1 (λ_{ij}) がユニタリ行列であることと (α_{ij}) がユニタリ行列であることは同値である. □

命題 4.2 $\sigma: Q^n \to Q^n$ を全単射とするとき, 以下の性質が成立つ.

(i) $\overline{G\circ\sigma} = \overline{G}\circ\hat{\sigma}$ である.

(ii) $\overline{G\circ\sigma}$ がユニタリ変換であることと, $\overline{G}$ がユニタリ変換であることは同値である. □

$$
\begin{tikzcd}
Q^n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & Q^n \arrow[r, "G"] \arrow[d] & \mathbf{C}^{(Q^n)} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\mathbf{C}^{(Q^n)} \arrow[r, "\hat{\sigma}"'] & \mathbf{C}^{(Q^n)} \arrow[r, "\overline{G}"'] & \mathbf{C}^{(Q^n)}
\end{tikzcd}
$$

定理 4.3 関数 $e: Q^3 \to Q$ と関数 $g: Q \to \mathbf{C}^Q$ の結合 $f = g\circ e$ で定まる局所関数 $f: Q^3 \to \mathbf{C}^Q$ は, 以下の2条件の両方を満足するときに量子 *CA* を定義する.

(i) $F_e: Q^n \to Q^n$ が全単射となる.

(ii) $g: Q \to \mathbf{C}^Q$ から定まる行列 (λ_{ij}) がユニタリ行列である. □

例 4.4 有限集合 L, M, R に対して, $Q = L\times M\times R$ とする. $e: Q^3 \to Q$ を $e(((l_1,m_1,r_1),(l_2,m_2,r_2),(l_3,m_3,r_3))) = (l_3,m_2,r_1)$ とし, $g: Q \to \mathbf{C}^Q$ を $g(q) = [q]$ とする. このとき, $f = g\circ e$ とすると, $f: Q \to \mathbf{C}^Q$ は量子 *CA* を定義する. 実際, $F_e: Q^n \to Q^n$ は, $F_e(((l_i,m_i,r_i)))_j = (l_{j+1},m_j,r_{j-1})$ であり全単射になり, g から定まる行列 (λ_{ij}) は単位行列となりユニタリ行列である.

例 4.4 において, 異なる $g: Q \to \mathbf{C}^Q$ に対しても, g から定まる行列 (λ_{ij}) がユニタリ行列であれば $f: (L\times M\times R)^3 \to (L\times M\times R)$ は量子CAとなり, これが文献 [4] の **分割量子セルオートマトン** である.

例 4.5 $Q = \{0,1\}$ とし, $e: Q^3 \to Q$ を $F_e: Q^n \to Q^n$ が全単射になる関数とする. $g: Q \to \mathbf{C}^Q$ から定まる行列 $\Lambda = (\lambda_{ij})$ を $\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とすると, $f = g\circ e$ で定まる局所関数は量子 *CA* を定義する. これは, 局所関数 e と e を反転した局所関数とを合成した量子 *CA* が構成出来ることを示している.

例 4.6 $Q = \{0,1\}\times\{0,1\}$ とし, $e((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)) = (a_1,b_3)$ $g: Q \to \mathbf{C}^Q$ から定まる行列 $\Lambda = (\lambda_{ij})$ を

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

とすると, $f = g\circ e$ で定まる局所関数は量子 *CA* を定義し, $f((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)) = (a_1, a_1\oplus b_3)$ である.

5 挙動解析

ここでは、例4.5と同様の、古典的な3近傍局所関数と2次元のユニタリ変換との合成で構成される量子CAの挙動について述べる。

$Q = \{0,1\}$ とし、セルサイズを n、規則番号 R の古典的3近傍局所関数を $e : Q^3 \to Q$、$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ から定まる関数を $g : Q \to \mathbf{C}^Q$ とする。合成関数 $f = g \circ e$ で定義される量子CAを $QCA-(R,\theta)(n)$ で表すことにする。

2状態, すなわち, $Q = \{0,1\}$ のCAに対して, セルサイズを3から22まで変えて, 局所関数 f_R ($R = 128, \cdots, 255$) が量子CAを定義するものを計算実験で探し列挙したものが以下の表である.

セルサイズ	規則番号
3	142, 154, 156, 166, 170, 172, 178, 180, 184 198, 202, 204, 210, 212, 216, 226, 228, 240
4, 8, 10, 14 16, 20, 22	150, 170, 204, 240
5, 7, 11, 13, 19	150, 154, 166, 170, 180, 204, 210, 240
9, 15, 21	154, 166, 170, 180, 204, 210, 240
6, 12, 18	170, 204, 240

セルサイズが6,12,18の時は, 恒等写像 (規則204), 左右シフト (規則170,240) の自明な局所関数しか量子CAを定めないが, 他のセルサイズには, 自明でない局所関数が量子CAを定めていることがわかる.

上記の結果から, セルサイズと量子CAを定義出来る規則番号との関係として, 下記が推測される。

セルサイズ ($k \geq 1$)	規則番号
$6k \pm 2$	150, 170, 204, 240
$6k \pm 1$	150, 154, 166, 170, 180, 204, 210, 240
$6k+3$	154, 166, 170, 180, 204, 210, 240
$6k$	170, 204, 240

例 5.1 セルサイズが4, または, 5のとき, 局所関数 $f_{150}(x,y,z) = x+y+z(\mathbf{mod2})$ は量子 CA を定義する. 大域関数 F_f は,

$$\begin{aligned} F_f(x)_i &= x_{i-1} + x_i + x_{i+1} \\ F_f^2(x)_i &= x_{i-2} + x_i + x_{i+2} \\ F_f^3(x)_i &= x_{i-3} + x_{i-2} + x_i + x_{i+2} + x_{i+3} \end{aligned}$$

となる。セルサイズが4の場合, $F_f^2(x)_i = x_{i+2} + x_i + x_{i+2} = x_i$ となり, $F_f^2(x) = x$ となる。セルサイズが5の場合, $F_f^3(x)_i = x_{i+2} + x_{i+3} + x_i + x_{i+2} + x_{i+3} = x_i$ となり, $F_f^3(x) = x$ となる. すなわち, 任意の $x \in Q^n$ ($n = 4,5$) に対して, $F_f(y) = x$ となる y が存在し, F_f が全単射になり, f が量子 CA を定義することがわかる.

$g : Q \to \mathbf{C}^Q$ で定義される関数 $G : Q^n \to \mathbf{C}^{Q^n}$ によって定まる $2^n \times 2^n$ 行列 (α_{ij}) は、

$$(\alpha_{ij}) = \underbrace{\Lambda(\theta) \otimes \Lambda(\theta) \otimes \cdots \otimes \Lambda(\theta)}_{n}$$

となる。また、同様にして、$e : Q^3 \to Q$ で定義される関数 $F_e : Q^n \to Q^n$ によって $2^n \times 2^n$ 行列 (β_{ij}) を定めることが出来る。この $QCA-(R,\theta)(n)$ の大域関数 $F : Q^n \to \mathbf{C}^{Q^n}$ によって定められる遷移行列 Γ は、

$$\Gamma = (\beta_{ij})\ (\alpha_{ij})$$

となり、F_e が全単射であれば Γ はユニタリ行列である。

図1〜8に、セルサイズが4と5、θ を0から $\pi/2$ まで動かしたときの量子CAの計算機実験の結果を示す。この実験では、各セルが1になる確率を表しており、セルが黒であれば、1になる確率が1、白であれば1になる確率が0 (0になる確率が1) を示している。

まず、F_e が全単射となる一番単純な場合、すなわち、e が恒等写像 (規則番号204) であるときを考える (図1)。このとき、(β_{ij}) が単位行列であり、$\Gamma = (\alpha_{ij}) = \Lambda(\theta) \otimes \cdots \otimes \Lambda(\theta)$ となり、以下がいえる。

補題 5.2 $F : Q^n \to \mathbf{C}^{Q^n}$ を $QCA-(204,\theta)(n)$ の大域関数とし、

$$A = \{1 \text{が偶数個ある様相全て}\} \subset Q^n$$

とする。このとき、$\forall X \in \mathbf{C}^{Q^n}$、$\forall y \in Q^n$ に対して、

1. $F(y)(y) = \cos^n\theta$
2. $y \in A$ ならば、$F(y)(\overline{y}) = (-\sin\theta)^n$
3. $y \in Q^n - A$ ならば、$F(y)(\overline{y}) = -(-\sin\theta)^n$
4. $(\Lambda(\theta) \otimes \cdots \otimes \Lambda(\theta))(\Lambda(\theta') \otimes \cdots \otimes \Lambda(\theta'))$
$= \Lambda(\theta+\theta') \otimes \cdots \otimes \Lambda(\theta+\theta')$

証明. $\Gamma = \Lambda(\theta) \otimes \cdots \otimes \Lambda(\theta)$ の (i,i) 成分は、$\cos^n\theta$、$(i, 2^n - i)$ 成分は、$\sin^n\theta$ もしくは $-\sin^n\theta$ となることがわかる。n による帰納法により、1〜3が成り立つことがわかる。4については、自明である。 □

このことから、以下が言える。

定理 5.3 $QCA-(204,\theta)(n)$ は、周期 m をもつ。ただし、

- n が偶数のとき、m は $m\theta = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ を満たす正整数
- n が奇数のとき、m は $m\theta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ を満たす正整数

図 1 と図 2 を比べてみると、規則 170 は左シフトであるので、規則 204 の時の挙動 (図 1) に各遷移ごとに状態が左シフトしていることがわかる。左シフト (規則 170)、右シフト (規則 240) については、恒等写像である規則 204 の場合と同様の周期性を持つ。

次に、局所関数 e の規則番号が 150 である場合について考える。先にあげた表により、セルサイズが 3 の倍数でない場合に、e は量子 CA を定義する。セルサイズが 4 のとき、以下を示すことが出来る (図 3)。

定理 5.4 $QCA-(150,\theta)(4)$ は、周期 $2m$ をもつ。ただし、m は $2m\theta = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ を満たす正整数とする。

証明.

$$\Gamma_{ii}^{2m} = \cos^2(2m\theta) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall i)$$

となることを帰納的に示すことが出来る。つまり、$2m\theta = k\pi$ であれば、$\Gamma_{ii}^{2m} = 1$ となる。 □

また、計算実験の結果 (図 3,4) より、局所関数 e の規則番号が 150 であり、$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、以下が予想される。

予想 5.5 n を 3 の倍数ではない正整数とする。$F : Q^n \to \mathbf{C}^{Q^n}$ を $QCA-(150, \frac{\pi}{4})(n)$ の大域遷移関数とし、集合 $A \subset Q^n$ を次のように定義する。

$$A = \{1 \text{ が偶数個ある様相全て}\} \subset Q^n$$

このとき、$\forall X \in \mathbf{C}^{Q^n}$、$\forall y \in Q^n$ に対して、以下が成り立つ。

- $y \in A$ ならば、$\overline{F}^2(X)(\overline{y}) = (-1)^n X(y)$
- $y \in Q^n - A$ ならば、$\overline{F}^2(X)(\overline{y}) = (-1)^{n+1} X(y)$

これまで、セルサイズが 4 もしくは 5 の古典 CA を量子化した量子 CA の計算機実験、周期性に関する解析を行ったが、計算機実験を行った量子 CA(図 1〜8) のうち、上で述べた結果、予想以外には、周期性は存在しないと思われる。

6 おわりに

本稿で取り扱った CA は, 有限の巡回型 CA であり Watous[4], 森田, 原尾ら [6] が取り扱った境界無しの CA とは異なる. 従って計算能力はセルサイズが限られれるため万能とはならないが, 一方で, 量子 CA を定義出来るかどうかの条件は, より明確な形で定式化されている. 今後は, 量子 CA として実現可能な具体的な局所関数の構成, 合成などを考え, 計算機実験などと通して、一般的な量子計算機構の構成, 合成に関する性質を考察していきたい.

参考文献

[1] A. Birthiaume and G. Brassard: *The Quantum Challenge to Structural Complexity Theory*, Proc. 7th IEEE Conf. Struct. Comp. Theo., 1992.

[2] 西野 哲朗: 量子コンピュータ, 情報処理, 36, pp. 337–347, 1995.

[3] 西野 哲朗: 量子計算論の現状, Computer Today, 105, 2001.

[4] J. Watrous: *On One-Dimensional Quantum Cellular Automata*, Proceedings of the 36th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 528–537, 1995.

[5] D. Deutsch: *Quantum Theory, The Church Turing Principle and The Universal Quantum Computer*, Proc. the Royal Society of London A400, pp. 97–117, 1985.

[6] K. Morita and M. Harao: *Computation Universality of One-Dimensional Reversible (Injective) Cellular Automata*, Trans. IEICE, E72, pp. 758–762, 1989.

[7] T. Toffoli: *Computation and Construction Universality of Reversible Cellular Automata*, J. Comput. System Sci., 15, pp. 213–231, 1977.

[8] 森田 憲一: 可逆セルオートマトン, 情報処理, 35, pp. 315–321, 1994.

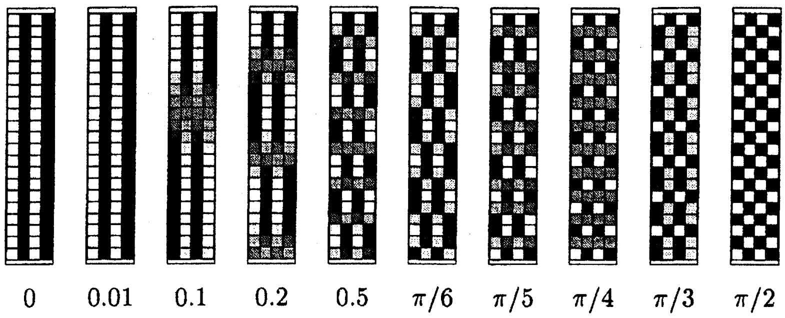

図 1: 規則番号 204、サイズ 4

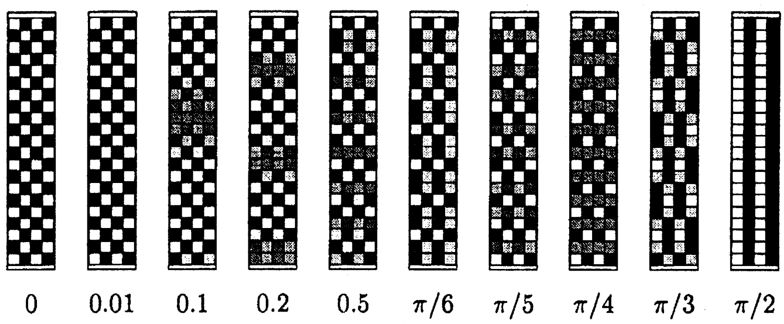

図 2: 規則番号 170、サイズ 4

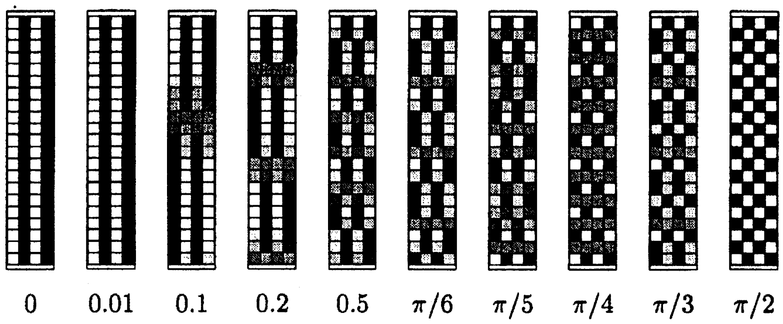

図 3: 規則番号 150、サイズ 4

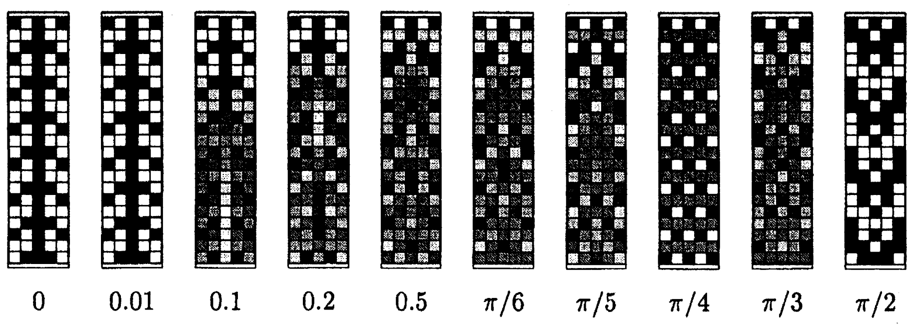

図 4: 規則番号 150、サイズ 5

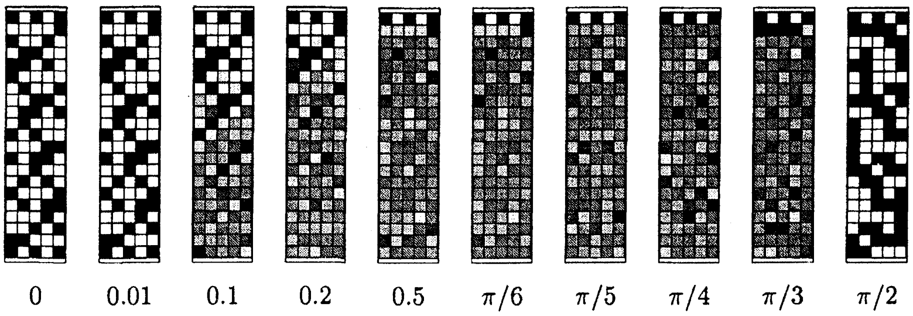

図 5: 規則番号 154、サイズ 5

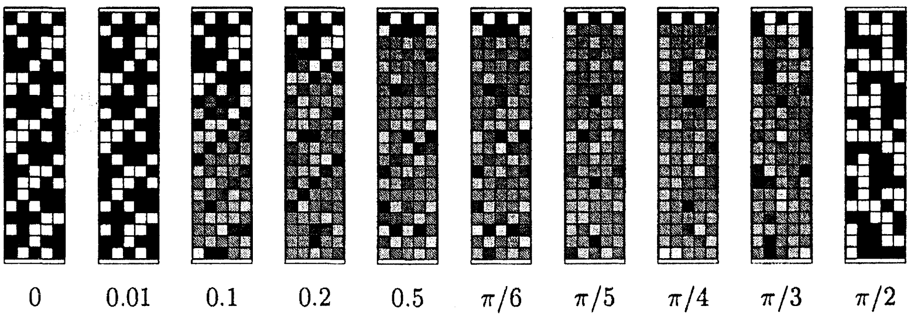

図 6: 規則番号 166、サイズ 5

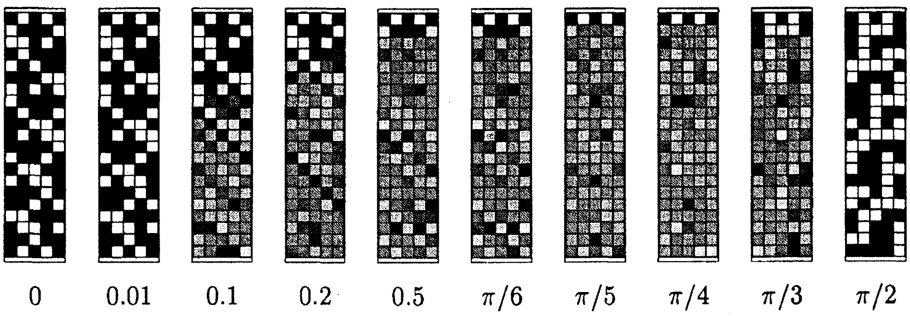

図 7: 規則番号 180、サイズ 5

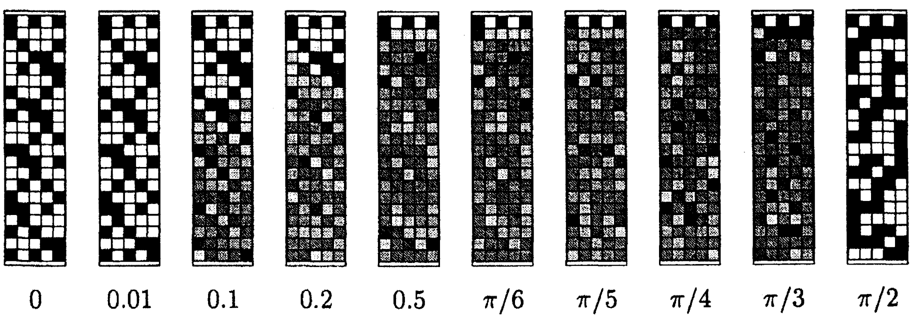

図 8: 規則番号 210、サイズ 5