

ARITHMETIC コホモロジーと  $\zeta$ -関数の特殊値

THOMAS GEISSER\*

UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA/ 東京大学

1. 滑らかで射影的なスキームの場合

Lichtenbaum は 2001 年に Weil-étale コホモロジーを導入し,  $\mathbb{Z}$ -係数の Weil-étale コホモロジーと  $\zeta$ -関数の  $s = 0$  における特殊値の関係を表した.

簡単に言えば, Weil-étale コホモロジーは  $\mathbb{F}_p$  の Galois-群  $\hat{\mathbb{Z}}$  を Frobenius 置換  $\varphi$  で生成された巡回部分群で取り替えるものである. 例えば,

$$H^1((\mathbb{F}_p)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2((\mathbb{F}_p)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

であるが,

$$H^1((\mathbb{F}_p)_W, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^2((\mathbb{F}_p)_W, \mathbb{Z}) \cong 0$$

のように, Weil-étale コホモロジーは étale コホモロジーより簡単だと見られる.  $H^1((\mathbb{F}_p)_W, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  の生成元を一つをとって,  $e$  と書く.

2002 年, [1] において著者は, Weil-étale コホモロジーと étale コホモロジーの関係を示して, 次の定理を証明した.

**定理 1.1.**  $X$  を  $\mathbb{F}_p$  上の分離的で有限形なスキームとし,  $\mathcal{F}$  を  $X$ -上の étale 層とする.

a) 次の長完全系列が存在する.

$$\rightarrow H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_W, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i-1}(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{i+1}(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \rightarrow$$

b) 特に  $\mathcal{F}$  が torsion ならば,  $H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \cong H^i(X_W, \mathcal{F})$ .

c)  $\mathcal{F}$ -が  $\mathbb{Q}$ -加群ならば, 上の長完全系列が分裂する, つまり

$$H^i(X_W, \mathcal{F}) \cong H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \oplus H^{i-1}(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}).$$

モチビック複体  $\mathbb{Z}(n)$  の定義は Voevodsky と Bloch によるのである. 定義は少し複雑であるので, 本文では詳細については省略するが, 最も簡単な例として  $\mathbb{Z}(0) \cong \mathbb{Z}$  (定数層) と  $\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]$  (乗法群の shift) であることが知られている.

\* Supported in part by the Alfred P. Sloan Foundation, and NSF.

モチビク複体  $\mathbb{Z}(n)$  による Weil-étale コホモロジーと  $\zeta$ -関数の関係について、次の主予想がある。  $n = 0$  の場合は Lichtenbaum[3] の予想である。

**予想 1.2.**  $X$  を  $\mathbb{F}_p$  上の滑らかで射影的なスキーム、  $\zeta(X, s)$  を  $X$  のゼータ関数とする。

- 1.モチビク複体  $\mathbb{Z}(n)$  の Weil-étale コホモロジー  $H^i(X_W, \mathbb{Z}(n))$  は有限生成である。
2. 任意の素数  $l \neq p$  に対して、  $l$ -進コホモロジーの整数モデルである：

$$H^i(X_W, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{Z}_l \cong H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_l(n)).$$

3. 階数の交代和は 0:  $\sum_i (-1)^i \text{rank } H^i(X_W, \mathbb{Z}(n)) = 0$ .
4. 階数の重さ付き交代和は  $s = n$  における  $\zeta(X, s)$  の零点の位数  $\rho_n$  と等しい：

$$\sum_i (-1)^i \cdot \text{rank } H^i(X_W, \mathbb{Z}(n)) = \text{ord}_{s=n} \zeta(X, s).$$

5.  $s \rightarrow n$  のとき、

$$\zeta(X, s) \sim \pm(1 - q^{n-s})^{\rho_n} \cdot \chi(H^*(X_W, \mathbb{Z}(n)), e) \cdot q^{X(n)}.$$

ここで、  $\chi(H^*(X_W, \mathbb{Z}(n)), e)$  は  $e$  との cup 積によって定義される複体

$$\rightarrow H^{i-1}(X_W, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{Ue} H^i(X_W, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{Ue} H^{i+1}(X_W, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow$$

の Euler 標数  $\chi(C^\cdot) = \prod_i |H^i(C^\cdot)|^{(-1)^i}$  で、  $\chi(n)$  は Milne の標数

$$\chi(n) = \sum_{j, 0 \leq i \leq n} (-1)^{i+j} (n-i) \dim H^j(X, \Omega^i).$$

**注意.** 実際には、(3)、(4) より詳しい予想がある：

$$\text{rank } H^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)) = \text{rank } H^{2n+1}(X, \mathbb{Z}(n)) = \rho_n$$

で、  $i \neq 2n, 2n+1$  ならば、  $\text{rank } H^i(X, \mathbb{Z}(n)) = 0$  である。また、(2) の  $p$  進類似に相当する予想もある。

上の予想と次の有名な予想との関係について考える。

**予想 1.3.** (Tate-Beilinson) 任意の  $\mathbb{F}_p$  上の滑らかで射影的なスキーム  $X$  に対して、次のことが成り立つ。

- 1) cycle 射は同型である

$$\text{CH}^n(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} H^{2n}(\bar{X}_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l(n))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}.$$

- 2)  $H^{2n}(\bar{X}_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l(n))$  は  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ -加群として半単純である。

**定理 1.4.** 予想 1.3 と 予想 1.2 は同値である。

この論文では、上の定理の  $\mathbb{F}_p$ -上の分離的で有限形なスキームへの一般化について述べる。詳しい証明は [2] にある。

## 2. EH-コホモロジー

体  $k$  を固定して、 $(Sch/k)$  と  $(Sm/k)$  をそれぞれ  $k$  上の分離的で有限形なスキームと  $k$  上の滑らかなスキームの圏とする。

**定義 2.1.** eh-位相は、次の射からなる *Grothendieck*-位相である。

1) (*étale*) *étale* な全射  $f: Y \rightarrow X$ 。

2) (*abstract blow-up*) 次の条件を満たすような固有射  $f: X' \rightarrow X$  と閉埋込射  $i: Z \rightarrow X$  の和  $X' \amalg Z \rightarrow X$ 。(条件):  $Z'$  を次の *cartesian* 図式で定義する。

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad (1)$$

このとき  $f$  によって  $f: X' - Z' \rightarrow X - Z$  という同型が成立する。

例: 任意の閉被覆は eh-被覆であり,  $X^{red} \rightarrow X$  は eh-被覆である。

$(Sch/k)$  上の eh-位相における層の圏を  $(Sch/k)_{eh}$  と書く。eh-層  $\mathcal{F}$  に対して、eh-コホモロジー  $H^i(X_{eh}, \mathcal{F})$  を大域切断  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  の右導来関手で定義する。

**命題 2.2.** *abstract blow-up*(1) を与えると、次の長完全系列が存在する。

$$\cdots \rightarrow H^i(X_{eh}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(Z_{eh}, \mathcal{F}) \oplus H^i(X'_{eh}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(Z'_{eh}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots \quad (2)$$

証明. すべての  $X$  に対して、 $\mathbb{Z}_X$  を  $X$  が表現する自由 eh-層とする (いいかえれば、前層  $U \rightarrow \mathbb{Z}[\text{Hom}(U, X)]$  に伴う eh-層)。積の普遍性により、次の完全系列を得る

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{Z'} \rightarrow \mathbb{Z}_Z \oplus \mathbb{Z}_{X'} \rightarrow \mathbb{Z}_X.$$

しかも、(1) は eh-被覆なので右の射は全射で、命題が従う。  $\square$

**定義 2.3.** 任意の  $k$  上の分離的で有限生成なスキーム  $U$  に対して、コンパクトコホモロジー群  $H_c^i(U_{eh}, \mathcal{F})$  を次のように定義する。 $U$  のコンパクト化  $X$  をとり、 $Z = X - U \xrightarrow{i} X$  を  $U$  の閉補集合の埋め込みとする。このとき、

$$H_c^j(U_{eh}, \mathcal{F}) = H^{j-1}(X_{eh}, \text{cone}(\mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F})).$$

**補題 2.4.** コンパクトコホモロジーの定義は  $X$  のコンパクト化によらない。

証明.  $X$  と  $X'$  を  $U$  のコンパクト化とする. 積  $X \times X'$  における  $U$  の閉包と比較することにより, 射  $X' \rightarrow X$  が存在すると仮定してよい.  $Z = X - U \xrightarrow{i} X$ ,  $Z' = X' - U \xrightarrow{i'} X'$  とおけば, abstract blow-up 図式(1)を得る. 長完全系列(2)を用いて, 次の可換図式から結論を示せる.

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H^{j-1}(X_{\text{eh}}, \text{cone}(i)) & \longrightarrow & H^j(X_{\text{eh}}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^j(Z_{\text{eh}}, \mathcal{F}) & \rightarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow H^{j-1}(X'_{\text{eh}}, \text{cone}(i')) & \longrightarrow & H^j(X'_{\text{eh}}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^j(Z'_{\text{eh}}, \mathcal{F}) & \rightarrow \end{array}$$

□

任意のスキーム  $X$  の閉部分スキーム  $Z$  の開補集合を  $U$  とする. コンパクトコホモロジーの定義から, 明らかに次の長完全系列が存在することがわかる.

$$\cdots \rightarrow H_c^j(U_{\text{eh}}, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^j(X_{\text{eh}}, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^j(Z_{\text{eh}}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots \quad (3)$$

これから  $k$  上で特異点の解消が存在すると仮定する. つまり, 次の条件が成り立つと仮定する.

1) 任意のスキーム  $X \in (\text{Sch}/k)$  について,  $f: Y \rightarrow X$  が存在して,  $Y$  は  $k$  上滑らかで,  $f$  は固有的で双有理射となる.

2)  $X$  は滑らかならば, 任意の固有的で双有理射  $f: Y \rightarrow X$  に対して,  $g: X' \rightarrow Y$  が存在して,  $f \circ g: X' \rightarrow X$  は滑らかな閉部分スキームを中心とする blow-up の合成となる.

$k$  の標数が 0 ならば, この条件は広中の定理である. blow-up は eh-位相の被覆だから, 特異点の解消により任意のスキームは局所的に滑らかである.

次の site の射が存在する.

$$(\text{Sch}/k)_{\text{eh}} \xrightarrow{\rho} (\text{Sm}/k)_{\text{ét.}}$$

これらは層の圏に標準関手を導く:

$\rho_*(\mathcal{F})(X) = \mathcal{F}(X)$  で,  $\rho^*$  はその左随伴関手である.

$\rho_*(\mathcal{F})$  は  $\mathcal{F}$  の滑らかなスキームへの制限で,  $\rho^*$  はその左随伴関手である. 具体的には,  $\rho^*(\mathcal{F})(X) = \text{colim}_{X \rightarrow U} \mathcal{F}(U)$  に伴う eh-層であり,  $\mathcal{F}$  の拡張の層化である ( $U$  が  $X$  の下の滑らかなスキームを走る).

**補題 2.5.**  $\rho_*$  は左完全である.  $k$  上で特異点の解消が成り立てば,  $\rho^*$  は完全である.

**定理 2.6.** (Suslin, Voevodsky) [5]  $\frac{1}{m} \in k$  ならば,  $\rho_* \mu_m^{\otimes n} \cong \mu_m^{\otimes n}$  で,  $s > 0$  のとき  $R^s \rho_* \mu_m^{\otimes n} = 0$ .

Voevodsky は任意の自然数  $n$  に対して,  $(Sm/k)$  上に étale 層の複体  $\mathbb{Z}(n)$  を定義した.  $\mathbb{Z}(n)$  の  $(Sch/k)_{\text{eh}}$  への拡張  $\rho^*\mathbb{Z}(n)$  も又  $\mathbb{Z}(n)$  と書くことにする.  $\mathbb{Z}(n)$  の eh-コホモロジーについて次が成り立つ.

**命題 2.7.**  $\frac{1}{m} \in k$  ならば,  $\mathbb{Z}/m(n) \cong \mu_m^{\otimes n}$ .

証明. 滑らかなスキーム  $X$  上では, この系は先に知られている. 一般のスキーム  $X$  上では,  $X$  は仮定によって滑らかな被覆  $Y$  を持ち,  $Y$  上ではこの同型が成り立つので,  $X$  上でも成り立つ.  $\square$

次の定理で(2)の類似が必要になる.

**命題 2.8.** 滑らかなスキーム  $X$  の滑らかな閉部分スキーム  $Z$  を中心とする blow-up(1) を与える.

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad (4)$$

そのとき, 次の長完全系列が存在する.

$$\rightarrow H^i(X'_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H^i(Z'_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \oplus H^i(X'_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H^i(Z'_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow \cdot \quad (5)$$

**定理 2.9.**  $X$  が滑らかならば,

$$H^i(X'_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \cong H^i(X_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n)).$$

証明.  $C'$  を  $\text{cone}(\mathbb{Z}(n)^{\text{ét}} \rightarrow R\rho_*\mathbb{Z}(n)^{\text{eh}})$  とおくと,  $C'$  は étale と eh-コホモロジーの違いを計る.  $0 \neq \alpha \in H^i(X'_{\text{ét}}, C')$  が存在すると仮定して矛盾を導く. 明らかに  $\rho^*C'$  は完全なので, eh-被覆  $f: Y \rightarrow X$  が存在して,  $f^*C' = 0$  を満たす. 特異点の解消を用いて,  $f: Y \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 = X$  と書ける. ここで,  $Y \rightarrow X_n$  は étale 被覆で,  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  は滑らかな閉部分スキーム  $Z_i$  を中心とする blow-up である. 長完全系列(2)と(5)を比べる. 次元に関して帰納法を用いると,  $H^i((Z_i)_{\text{ét}}, C') \cong H^i((Z_i \times_{X_i} X_{i+1})_{\text{ét}}, C') = 0$  を仮定してよい. よって,  $H^i((X_i)_{\text{ét}}, C') \cong H^i((X_{i+1})_{\text{ét}}, C')$  なので,  $\alpha|_{X_n} \neq 0$  で,  $C'|_{X_n} \neq 0$ . 従って,  $C'|_Y \neq 0$  は矛盾である.  $\square$

**命題 2.10.** a) (Homotopy 不変性) 任意の  $X$ ,  $n > 0$  に対して,

$$H_c^i(X \times \mathbb{A}_{\text{eh}}^1, \mathbb{Z}(n)) \cong H_c^{i-2}(X_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n-1)).$$

b)  $n > r$  ならば, Projective bundle 公式が成り立つ.

$$H_c^i(X \times \mathbb{P}_{\text{eh}}^r, \mathbb{Z}(n)) \cong \bigoplus_{j=0}^r H_c^{i-2j}(X_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n-j)).$$

証明. 特異点の解消と長完全系列(3) を用いて滑らかで射影的な場合から導く.  $\square$

homotopy 不変性は任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して成り立つために,  $n > 0$  のとき

$$H_c^i(X_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(-n)) := H_c^{i+2n}(X \times \mathbb{A}_{\text{eh}}^n, \mathbb{Z}(0))$$

と定義する. すると, homotopy 不変性も projective bundle 公式も任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して成り立つ.

### 3. ARITHMETIC コホモロジー

定義 3.1.  $\mathbb{F}_p$  上の Weil-eh 層  $\mathcal{F}$  を  $(\text{Sch}/\bar{\mathbb{F}}_p)_{\text{eh}}$  の元  $\mathcal{F}$  と Frobenius 作用  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \varphi_*\mathcal{F}$  の組と定義する.

$\mathbb{F}_p$  上の Weil-eh 層の圏を  $(\text{Sch}/\mathbb{F}_p)_W$  と書く.

$\mathbb{F}_p$  上分離的で有現生成なスキーム  $X$  に対して, 大域切断  $\mathcal{F} \rightarrow \Gamma_{\text{eh}}(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F})^{\varphi=1}$  の右導来関手を  $H^i(X_{\text{ar}}, \mathcal{F})$  と定めて, arithmetic コホモロジーと呼ぶ.

$H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathcal{F})$  は同様に定義される.

定理 2.9 によると, 特異点の解消が存在すれば,  $\mathbb{F}_p$  上の滑らかなスキーム  $X$  に対して,  $H^i(X, \mathcal{F})$  は [1] で定義されたコホモロジー群と同型. しかも, 定理 1.1 の類似が成り立つ. 例えば, 次の長完全系列が存在する

$$\rightarrow H^i(X_{\text{eh}}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_{\text{ar}}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i-1}(X_{\text{eh}}, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{i+1}(X_{\text{eh}}, \mathcal{F}) \rightarrow$$

予想 3.2.  $H^i(X_W, \mathbb{Z}(n))$  を  $H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))$  で取り替えると, 予想 1.2 が任意の  $\mathbb{F}_p$  上の分離的で有限形なスキーム  $X$  に対して成り立つ.

定理 3.3. 予想 1.2 を仮定し, 特異点の解消が存在すると仮定する. このとき, 予想 3.2 も成り立つ.

証明. 例として (1) を導く.  $X$  の次元に関する帰納法をする.  $U$  を任意の  $\mathbb{F}_p$  上の分離的で有限形なスキームとする. 特異点の解消により,  $U$  の開部分スキーム  $V$  が存在し,  $V$  は滑らかで射影的なスキーム  $X$  の開部分スキームである.  $Z = X - V$  をその閉補集合とする. 次の長完全系列を見て,

$$\rightarrow H_c^{i-1}(Z_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H_c^i(V_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow \quad (6)$$

$H_c^*(Z_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))$  は帰納法の仮定より有限生成で,  $H_c^*(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))$  は仮定より有限生成なので,  $H_c^*(V_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))$  も有限生成である. 同様に  $H_c^*(U_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))$  も有限生成である.  $\square$

定理 3.4. a)  $n \leq 0$  とし, 特異点の解消を仮定する. そのとき, 予想 3.2 が成り立つ.

b)  $X$  の次元が 1 ならば, 予想 3.2 が成り立つ.

#### 4. 例

$n \neq 0$  のとき,  $w_n = |\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)^{\text{Gal}(\mathbb{F}_q)}| = q^n - 1$  とし,  $w_0 = 1$  とする.  $\mathbb{F}_q$  のコホモロジーについて,

$$H_c^i((\mathbb{F}_q)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, i = 0, 1; \\ \mathbb{Z}/w_n & n \neq 0, i = 1; \\ 0 & \text{その他.} \end{cases} \quad (7)$$

をえる.  $n = 0$  の場合は,  $H_c^i((\mathbb{F}_q)_{\text{ar}}, \mathbb{Z})$  が群コホモロジー  $H^i(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  と等しい事から従う.  $n \neq 0$  の場合は, 有理係数の étale コホモロジーが消えるので,  $H_c^{i,n}((\mathbb{F}_p)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}) = H^{i-1}((\mathbb{F}_p)_{\text{ét}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)) = \mathbb{Z}/w_n$  を得る.

$p$ -部分に対して,  $n \geq 0$  の場合,  $\chi(n) = n$  で,  $n < 0$  の場合  $\chi = 0$  である.

従って,  $s \mapsto n$  のとき,

$$\zeta(\mathbb{F}_q, s) = \frac{1}{1 - q^{-s}} = \pm(1 - q^{n-s})^{\rho_n} q^{\chi(n)} \cdot w_n^{-1}.$$

$X = \mathbb{P}^1 \amalg \mathbb{P}^1/0 \sim 0$  を十字形とする. 特異点を blow-up すると, 次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & X. \end{array}$$

$$\zeta(X, s) = \frac{1}{(1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})^2}.$$

次の長完全系列を考える.

$$\cdots \rightarrow H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H_c^i(\mathbb{P}_{\text{ar}}^1, \mathbb{Z}(n))^{\oplus 2} \xrightarrow{0^*} H_c^i((\mathbb{F}_q)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow \cdots$$

$s: \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_p$  を構造射とすると,  $0^* \circ s^* = \text{id}_{\mathbb{F}_p}$  なので, 次の公式を得る.

$$H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \cong \ker\left(H_c^i(\mathbb{P}_{\text{ar}}^1, \mathbb{Z}(n))^{\oplus 2} \rightarrow H_c^i((\mathbb{F}_p)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))\right).$$

projective bundle 公式によると,

$$H_c^i(\mathbb{P}_{\text{ar}}^1, \mathbb{Z}(n)) \cong H_c^i((\mathbb{F}_p)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \oplus H_c^{i-2}((\mathbb{F}_p)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n-1))$$

であるから

$$H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \cong H_c^i((\mathbb{F}_q)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \oplus H_c^{i-2}((\mathbb{F}_q)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n-1))^{\oplus 2}.$$

方程式(7)を用いて,

$$\text{rank } H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} 1 & (n, i) = (0, 0), (0, 1); \\ 2 & (n, i) = (1, 2), (1, 3); \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$$|H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))_{\text{tor}}| = \begin{cases} w_n & i = 1; \\ w_{n-1}^2 & i = 3; \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る. 特に交代和は0で, 重さ付き交代和については,  $\rho_0 = -1, \rho_1 = -2$ , 他の  $n$  の場合  $\rho_n = 0$  である.  $e$  との積は0なので,  $\chi(H^*(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)), e) = w_n^{-1} \cdot w_{n-1}^{-2}$ ,  $\chi(n) = 3n - 2$  で,

$$\zeta(X, s) = \pm(1 - q^{n-s})^{\rho_n} \cdot q^{\chi(n)} \cdot w_n^{-1} \cdot w_{n-1}^{-2}.$$

$\mathbb{P}^1$  の二つの異なる点  $a, b$  を同一視したスキーム  $X$  を node と呼ぶ.  $X$  の特異点を  $p$  と書くと,  $X - p \cong \mathbb{A}^1 - \{0\}$  なので,

$$\zeta(X, s) = \frac{1}{1 - p^{1-s}}$$

を得る. eh-被覆図式

$$\begin{array}{ccc} a \amalg b & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \longrightarrow & X. \end{array}$$

から次の長完全系列を導く.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H_c^i(\mathbb{P}_{\text{ar}}^1, \mathbb{Z}(n)) \oplus H_c^i((\mathbb{F}_p)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \\ \rightarrow H_c^i((\mathbb{F}_p)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))^{\oplus 2} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

この系列は前の例のように分裂する,

$$0 \rightarrow H_c^{i-1}((\mathbb{F}_p)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H_c^i((\mathbb{P}^1)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow 0.$$

projective bundle 公式により,

$$\text{rank } H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} 1 & (n, i) = (0, 0), (0, 2), (1, 2); \\ 2 & (n, i) = (0, 1); \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$$|H_c^i(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n))_{\text{tor}}| = \begin{cases} w_n & i = 1, 2; \\ w_{n-1} & i = 3; \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



ARITHMETIC コホモロジーと  $\zeta$ -関数の特殊値

交代和は0で、重さ付き交代和は  $\rho_0 = 0$ ,  $\rho_1 = -1$  で、他の  $n$  の場合0である。しかも、 $\chi(H_c^*(X_{ar}, \mathbb{Z}(n)), e) = w_{n-1}^{-1}$  で、 $\chi(n) = n - 1$  なので、 $s \mapsto n$  のとき

$$\zeta(X, s) = \pm(1 - q^{n-s})^{\rho_n} \cdot q^{\chi(n)} \cdot w_{n-1}^{-1}$$

である。

## REFERENCES

- [1] T.GEISSER, Weil-étale cohomology over finite fields, Preprint 2002.
- [2] T.GEISSER, Arithmetic cohomology over finite fields and values of zeta-functions, Preprint 2004.
- [3] S.LICHTENBAUM, The Weil-étale topology, Preprint 2001.
- [4] A.SUSLIN, V.VOEVODSKY, Singular homology of abstract algebraic varieties. *Invent. Math.* 123 (1996), no. 1, 61–94.
- [5] A.SUSLIN, V.VOEVODSKY, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA, DEPARTMENT OF MATHEMATICS,  
DRB, 1042 W. 36TH PLACE, LOS ANGELES, CA 90089