数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 171-180

$\mathbf{Q}$ の有限次 Abel 拡大体上定義された building block の形式群

西来路　文朗
広島国際大学　社会環境科学部

1　序文

$\mathbf{Q}$ 上定義された楕円曲線 E から独立に定義される 2 つの形式群: 極小モデルの形式群 $\hat{E}(x,y)$, l-進表現に付随する L-級数の形式群 $\hat{L}(x,y)$ は, ともに $\mathbf{Z}$ 上定義され, かつ, $\mathbf{Z}$ 上強同型であることが, 本田平氏 [4] により知られている. 本稿では, この本田氏の結果を, building block と呼ばれる代数体上定義されたアーベル多様体に一般化することについて述べる (Th. 4.3). 本田氏の結果の一般化として, Deninger-Nart [1] による GL_2-type のアーベル多様体への高次元化, 筆者 [10] による 2 次体上の $\mathbf{Q}$-曲線への定義体に関する一般化が知られているが, 今回得られた結果はこれら 2 つの一般化を含む. 今回の一般化のアイディアは, building block に付随する行列係数の新しい L-級数を定義したことにある (4.2 節).

2　p-進整数環上の形式群

R を可換環とする. x を n 個の変数 $x_1,\dots,x_n$ の組として, 形式的冪級数環 $R[[x_1,\dots,x_n]]$ を $R[[x]]$ と略記する. また, しばしば, x を縦ベクトル ${}^t(x_1,\dots,x_n)$ とみなす. $f(x),g(x)$ が $R[[x]]$ の元であるとき,

$$f(x)\equiv g(x) \bmod \deg\ r$$

とは, $f(x)-g(x)$ が全次数 $r-1$ 次以下の項を含まぬことをいう. $f(x),g(x)$ が $R[[x]]^m$ のとき,

$$f(x)\equiv g(x) \bmod \deg\ r$$

は, $f(x),g(x)$ の各成分が mod deg r で合同であることをいう.

$$R[[x]]_0^m := \{f(x)\in R[[x]]^m \mid f(x)\equiv 0 \bmod \deg 1\}$$

とおく.

$R[[x]]_0^n$ の元 $\varphi(x)$ が可逆とは,

$$\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) = x$$

を満たす $R[[x]]_0^n$ の元 $\psi(x)$ が存在することをいう. $\varphi(x)$ が可逆であるための必要十分条件は, $\mathrm{GL}_n(R)$ の元 C が存在し,

$$\varphi(x) \equiv Cx \bmod \deg 2$$

が成立することである.

x, y, z をそれぞれ n 個の変数の組とする.

定義 2.1. $R[[x,y]]_0^n$ の元 $F(x,y)$ が R 上の n 次元 (可換) **形式群**であるとは, 以下を満たすことをいう.

(i) $F(x,y) \equiv x + y \bmod \deg 2$

(ii) $F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z))$

(iii) $F(x,y) = F(y,x)$

例 2.2. $\hat{G}_a^n(x,y) := x + y$ は R 上の形式群である. **加法群**と呼ばれる.

$F(x,y), G(x,y)$ を R 上 の n 次元形式群とする.

定義 2.3. $R[[x]]_0^n$ の元 $\varphi(x)$ が $F(x,y)$ から $G(x,y)$ への R 上の**準同型**であるとは,

$$\varphi(F(x,y)) = G(\varphi(x), \varphi(y))$$

を満たすことをいう. さらに, $\varphi(x)$ が可逆なとき, $\varphi(x)$ を**弱同型**,

$$\varphi(x) \equiv I_n x \bmod \deg 2$$

のとき, $\varphi(x)$ を**強同型**という. ただし, I_n は n 次単位行列とする.

$F(x,y)$ から $G(x,y)$ への R 上の弱同型 (resp. 強同型) が存在することを, $F(x,y)$ と $G(x,y)$ は 弱同型 (resp. 強同型) であるといい, $F \sim_R G$ ($F \approx_R G$) と書く. 関係 $\sim_R$ (resp. $\approx_R$) は同値関係である.

R を標数 0 の整域, K を R の商体とする.

命題 2.4. K 上の任意の n 次元形式群 $F(x,y)$ に対し, $F(x,y)$ から加法群 $\hat{G}_a^n(x,y)$ への K 上の強同型 $f(x)$ がただひとつ存在する.

R 上定義された形式群 $F(x,y)$ に対し, 命題 2.4 で定まる K 上の強同型 $f(x)$ を $F(x,y)$ の**変換子**という.

$$F(x,y) = f^{-1}(f(x)+f(y))$$

が成立する.

K を有限次代数体, $\mathcal{O}_K$ をその整数環とする. $\mathfrak{p}$ を $\mathcal{O}_K$ の素イデアルとし, $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$, $K_\mathfrak{p}$ で $\mathcal{O}_K$, K の $\mathfrak{p}$-進完備化をあらわす. 命題 2.4 より, 次の意味で Hasse の原理が成立する.

命題 2.5. *(i)* K 上の形式群 $F(x,y)$ が, $\mathcal{O}_K$ 上の形式群であることと, 任意の $\mathfrak{p}$ に対し $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上の形式群であることとは同値である.
(ii) $\mathcal{O}_K$ 上の形式群 $F(x,y)$ と $G(x,y)$ が, $\mathcal{O}_K$ で強同型 (*resp.* 弱同型) あることと, 任意の $\mathfrak{p}$ に対し $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上で強同型 (*resp.* 弱同型) であることとは同値である.

$\mathfrak{p}$-進整数環上の形式群について本田 [4] による分類理論が知られている. 簡単の為, $\mathfrak{p}$ が $K/\mathbf{Q}$ において不分岐な場合をまとめる. $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ の極大イデアルをあらためて $\mathfrak{p}$ であらわす. σ を $K_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p$ の Frobenius 自己同型とする.

$F(x,y)$ を $K_\mathfrak{p}$ 上の n 次元形式群とし, $f(x)$ をその変換子とする.

定理 2.6 ([4]; Th. 2, Prop. 3.3). $\mathfrak{p}$ が $K/\mathbf{Q}$ において不分岐であると仮定する. このとき, 以下は同値である.
(i) $F(x,y)$ が $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上定義される.
(ii) $M_n(\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}})$ の元 C_ν $(\nu = 1,2,\dots)$ が存在し,

$$pf(x) + \sum_{\nu\geq 1} {C_\nu}^{\sigma^\nu} f(x^{p^\nu}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \tag{2.1}$$

を満たす.

合同式 (2.1) が成立するとき, $F(x,y)$ は特殊元 $pI_n + \sum_{\nu\geq 1} C_\nu T^\nu$ に属するという.

定理 2.7 ([4]; Th. 3, Prop. 3.3). $\mathfrak{p}$ が $K/\mathbf{Q}$ において不分岐であると仮定する. $F(x,y)$ と $G(x,y)$ を $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上定義された形式群とする. このとき, 以下は同値である.
(i) $F(x,y)$ と $G(x,y)$ が $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上で強同型である.
(ii) $F(x,y)$ と $G(x,y)$ が同じ特殊元 $pI_n + \sum_{\nu\geq 1} c_\nu T^\nu$ に属する.

3 Q 上定義された楕円曲線の形式群

E を $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線とし, 極小モデルを

$$Y^2 + A_1XY + A_3Y = X^3 + A_2X^2 + A_4X + A_6 \quad (A_i \in \mathbf{Z})$$

とおく. E の不変微分 $w_E := dX/(2Y + A_1X + A_3)$ を零点における局所変数 $z := -X/Y$ で展開し,

$$w_E = \sum_{n\geq 1} b_n z^n \frac{dz}{z}$$

とおく. 各 b_n は $\mathbf{Z}$ の元であり, $b_1 = 1$ となる ([12]; p.113). E の形式群を

$$\hat{E}(x,y) := f^{-1}(f(x) + f(y)), \quad f(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n} x^n$$

により定義する. $\hat{E}(x,y)$ は $\mathbf{Z}$ 上の形式群になる ([12]; p.115).

$$L(E/\mathbf{Q}, s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$$

を $G_{\mathbf{Q}}$ の E 上の l-進表現に付随する L-級数とする. 各 a_n は, l のとり方によらず, $\mathbf{Z}$ の元であり, $a_1 = 1$ となる. $L(E/\mathbf{Q}, s)$ の形式群を

$$\hat{L}(x,y) := g^{-1}(g(x) + g(y)), \quad g(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} x^n$$

により定義する.

このとき, 次が成立する.

定理 3.1 ([4]; Th. 9). $\hat{L}(x,y)$ は $\mathbf{Z}$ 上定義された形式群であり, かつ, $\hat{L}(x,y)$ と $\hat{E}(x,y)$ とは $\mathbf{Z}$ 上強同型である.

$\varphi(x)$ を $\hat{L}(x,y)$ から $\hat{E}(x,y)$ への $\mathbf{Z}$ 上の強同型とおく. $z = \varphi(q)$ とおいて変数変換するとき,

$$w_E = \sum_{n\geq 1} b_n z^n \frac{dz}{z} = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \frac{dq}{q}$$

が成立する.

定理 3.1 の証明は, 任意の素数 p に対して, $\hat{L}(x,y)$, $\hat{E}(x,y)$ が $\mathbf{Q}_p$ 上で, ともに特殊元 $p - a_pT + \varepsilon_pT^2$ に属することにより得られる. ただし, ε_p を p が E の good prime であるかどうかに応じて, 1 または 0 と定める.

系として次が成立する.

系 3.2. 任意の素数 p に対して, $a_p \equiv b_p \bmod p$ が成立する.

Weil の不等式 $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ と系 3.2 とにより, $p \geq 17$ ならば

$$a_p = b_p \text{ の } p \text{ を法とする絶対値最小の剰余}$$

が成立する.

4 Q の Abel 拡大体上定義された building block

4.1 building block の定義

$\mathbf{Q}$ 上定義された g 次元 Abel 多様体 A が, $\mathbf{GL_2}$**-type** であるとは, A の $\mathbf{Q}$ 上定義された自己準同型のなす $\mathbf{Q}$-algebra $\mathrm{End}^0_{\mathbf{Q}}(A)$ が g 次元代数体と同型であることをいう. 代数体 K 上定義された Abel 多様体が, K 上 **modular** とは, ある N について modular 多様体 $J_1(N)$ の K-simple factor と K 上同種であることをいう. $\mathbf{Q}$ 上 modular な Abel 多様体は GL_2-type である. また, 一般化された Taniyama-Shimura 予想により, GL_2-type の Abel 多様体は $\mathbf{Q}$ 上 modular であると予想されている.

定義 4.1. $\overline{\mathbf{Q}}$ 上定義された g 次元 *Abel* 多様体 B が **building block** とは, B が以下の 2 条件を満たすことをいう.

(i) $\mathbf{Q}$ の絶対 *Galois* 群 $G_{\mathbf{Q}}$ の任意の元 τ に対し, *End*(B) と可換な同種写像 $\phi_\tau : {}^\tau B \to B$ が存在する. ここで, ϕ_τ が *End*(B) と可換であるとは, *End*(B) の任意の元 φ に対し, $\phi_\tau {}^\tau\varphi = \varphi\phi_\tau$ を満たすことをいう.

(ii) *End*(B) が総実代数体 F 上の *Schur* 指数 t の *central division algebra* に同型であり, $t = 1, 2$, かつ, $t[F : \mathbf{Q}] = g$ が成立する.

更に, ある有限次 *Galois* 拡大 K が存在し, *Abel* 多様体 B, 任意の B の自己準同型が K 上定義され, 各 τ に対し K 上定義された ϕ_τ がとれるとき, *building block* B は K 上定義されるという.

以下, 同型写像をひとつ固定することにより, 総実代数体 F と $\mathrm{End}(B)$ の中心を同一視する.

$\overline{\mathbf{Q}}$ 上定義された Abel 多様体 B が building block であることと, CM 型の部分多様体を持たない GL_2-type の Abel 多様体の $\overline{\mathbf{Q}}$-simple factor と同種であることとは同値である ([9]; Prop. 5.2, [6]; Prop. 4.5). よって, 一般化された Taniyama-Shimura 予想により, building block は $\overline{\mathbf{Q}}$ 上で modular であると予想されている.

次節以降の議論の為, 同種写像 ϕ_τ の次数 $\delta(\phi_\tau)$ を定義する.

B を building block とする．B の偏極 θ を固定する．このとき，任意の $G_{\mathbf{Q}}$ の元 τ に対し，${}^{\tau}\theta$ は ${}^{\tau}B$ の偏極である．$\mathrm{End}(B)$ と可換な同種写像 ϕ_τ に対し，

$$\delta(\phi_\tau) := \phi_\tau {}^{\tau}\theta^{-1}\hat{\phi}_\tau\theta$$

とおく．ただし，$\hat{\phi}_\tau$ は ϕ_τ の transpose isogeny をあらわす．$\delta(\phi_\tau)$ は，偏極 θ の取り方によらず，$\mathrm{End}^0(B)$ の中心 F の元である．また，$\delta(\phi_\tau)$ の $\mathrm{End}^0(B)/\mathbf{Q}$ の被約ノルムは，次数 $\deg\phi_\tau$ に等しい ([6]; Prop. 5.4, 5.5).

4.2 building block の L-級数

K を $\mathbf{Q}$ の有限次 Abel 拡大体，$\mathcal{O}_K$ を整数環，G をその Galois 群とする．B を K 上定義された building block とする．G の各元 τ に対して，$\mathrm{End}(B)$ の元と可換な同種写像 $\phi_\tau : {}^{\tau}B \to B$ をひとつずつ固定する．このとき，building block B には 2-cocycle

$$c : G \times G \to F^* : (\tau_1, \tau_2) \mapsto \phi_{\tau_1}{}^{\tau_1}\phi_{\tau_2}\phi_{\tau_1\tau_2}^{-1}$$

が付随する．同種写像 ϕ_τ が $\mathrm{End}(B)$ の元と可換であることから，$c(\tau_1, \tau_2)$ は中心 F の元になる．以下，次を仮定する．

(C) 2-cocycle c は symmetric である．すなわち，G の任意の元 τ_1, τ_2 に対し，$c(\tau_1, \tau_2) = c(\tau_2, \tau_1)$ が成立する．

$g = 1$ のとき，$\mathbf{Q}$ の有限次 Abel 拡大体上定義された building block で，B と $\overline{\mathbf{Q}}$ 上同種，かつ，仮定 (C) を満たすものがとれる ([7]; Cor. 4.2).

素数の有限集合 S を，以下の条件を満たすようにとる．

(S1) $\mathcal{O}_{K,S} := \mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Z}_S$ は単項イデアル整域である．ただし，$\mathbf{Z}_S$ は $\mathbf{Q}$ における S-整数のなす環である．

(S2) S は判別式 D_K，指数 $[\mathcal{O}_F : \mathrm{End}^0(B) \cap \mathcal{O}_F]$，$d_\tau$ を割る素数をすべて含む．ここで，d_τ は $\mathrm{End}(B)$ と可換な同種写像 $\varphi : {}^{\tau}B \to B$ の次数 $\deg\varphi$ の最大公約数をあらわす．

(S3) $\mathcal{O}_K$ の p を割るある素イデアル $\mathfrak{p}$ が，B の good prime でも multiplicative prime でなければ，p は S に属する．

$\mathcal{B}$ を B の $\mathcal{O}_K$ 上の Néron モデルとする．条件 (S1) より，不変微分のなす $\mathcal{O}_{K,S}$-加群 $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{O}_{K,S}}$ は階数 g の自由加群となるので，その基底 $\{w_i\}_{i=1}^{g}$ を固定する．このとき，$\mathcal{B}$ の zero section での formal completion は，$\mathcal{O}_{K,S}$ 上の

形式群 $\hat{\mathcal{B}}_S(x,y)$ を定める. $\mathrm{Hom}^0_K({}^\tau B, B)$ の元 φ に対し, $M_g(K)$ の元 $R(\varphi)$ を

$$\varphi^{*t}(w_1,\dots,w_g) = R(\varphi)^t({}^\tau w_1,\dots,{}^\tau w_g)$$

により定義する. φ^* は引き戻し写像である.

K 上定義された building block B の L-級数

$$L(B/K,s) = \sum_{n\geq 1} A_n n^{-s},$$

を以下のように定義する.

$n=1$ のとき, $A_1 := I_g$ と定める.

n が素数 p のとき, 行列 A_p を, p が判別式 D_K を割るかどうかに応じて,

$$A_p := \frac{1}{t} R\left(\frac{\mathrm{tr}_{F_\lambda}(\phi_\sigma \sigma | V_\lambda(B)^I)}{\delta(\phi_\sigma)}\right) R(\phi_\sigma) \quad \text{または} \quad 0,$$

と定める. また, p が D_K と素な good prime であるかどうかに応じて,

$$X_p := R\left(\frac{c(\sigma,\sigma)}{\delta(\phi_\sigma)}\right) R(\phi_{\sigma^2}) \quad \text{または} \quad 0,$$

とおく. ここで, λ は F の素イデアル, $V_\lambda(B)$ は B の λ-進 Tate module, σ は p の prime divisor $\mathfrak{P}$ に対する $G_{\mathbf{Q}}$ における Frobenius 自己同型, I は $\mathfrak{P}$ の惰性群である. 行列 A_p と X_p は, ϕ_τ, λ, σ のとり方によらず, $M_g(\mathcal{O}_{K,S})$ の元となる.

G における p の Frobenius 自己準同型を σ_p とおき, 自然数 m に対し, σ_m を, 関係式 $\sigma_{m_1 m_2} = \sigma_{m_1}\sigma_{m_2}$ により定める. この記号の下, n が素数冪 p^ν のときは, 漸化式

$$A_{p^\nu} = A_p{}^{\sigma_p} A_{p^{\nu-1}} - p X_p{}^{\sigma_{p^2}} A_{p^{\nu-2}} \quad (\nu \geq 2)$$

により A_{p^ν} を定める. 一般の自然数 n に対しては, 行列 A_n を関係式

$$A_{n_1 n_2} = A_{n_1}{}^{\sigma_{n_1}} A_{n_2} \quad ((n_1,n_2)=1)$$

で定める.

$L(B/K,s)$ が well-defined であることは次のような方針で示される.

仮定 (C) により, $\beta : G \to \overline{\mathbf{Q}}^*$ が存在し,

$$c(\tau_1,\tau_2) = \beta(\tau_1)\beta(\tau_2)\beta(\tau_1\tau_2)^{-1} \; (\forall \tau_1,\tau_2 \in G)$$

を満たす. E を F に $\beta(\tau)$ の値を添加して得られる体とする. $d := [E:F]$ とおく. E/F の基底をとり, E から $\mathrm{End}^0_K(B^d)$ の中への同型を固定する. Pyle

により, (B,β) に対し, $\mathrm{End}^0_{\mathbf{Q}}(A)=E$ なる GL_2-type の Abel 多様体 A と, E の作用と可換な K 上定義された同種写像 $\kappa: B^d \to A^t$ が存在し,

$$\begin{array}{ccc} A^t & \xrightarrow{\prod\beta(\tau)} & A^t \\ \uparrow{\scriptstyle \tau\kappa} & & \uparrow{\scriptstyle \kappa} \\ {}^{\tau}B^d & \xrightarrow{\prod\phi_\tau} & B^d \end{array}$$

を満たす ([6]; Prop. 4.2-4.5). A は $\mathbf{Q}$ 上の E の作用と可換な同種を除き一意的に定まる.

$$L(A/\mathbf{Q},E,s)=\prod_{p\nmid D_K} L_p(p^{-s})^{-1}=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$$

を A の λ-進表現に付随する L-級数とする. (F の素イデアル λ の上にある E の素イデアルをあらためて λ とあらわす.) a_n は λ のとり方によらず, $\mathcal{O}_E$ の元となる. また, $a_n\beta(\sigma_n)$ は $\mathcal{O}_F$ の元となる.

命題 4.2. 任意の n に対し, $A_n=R(a_n\beta(\sigma_n)/\delta(\phi_{\sigma_n}))R(\phi_{\sigma_n})$ が成立する. 特に, *L-*級数 $L(B/K,s)$ は *well-defined* であり, $M_g(\mathcal{O}_{K,S})$-係数である.

4.3 building block の形式群

前節で定義した L-級数 $L(B/K,s)$ に対し, L-級数 $L(B/K,s)$ の形式群 $\hat{L}(x,y)$ を

$$\hat{L}(x,y):=g^{-1}(g(x)+g(y)),\quad g(x):=\sum_{n\geq 1}\frac{A_n}{n}x^n$$

により定義する. ただし, $x^n := {}^t(x_1^n,\ldots,x_g^n)$ とおく.

定理 4.3. *2-cocycle c* が *symmetric* であると仮定する. このとき, $\hat{L}(x,y)$ は $\mathcal{O}_{K,S}$ 上定義され, かつ, $\hat{L}(x,y)$ と $\hat{\mathcal{B}}_S(x,y)$ とは $\mathcal{O}_{K,S}$ 上強同型である.

定理 4.3 の証明は, S に属する素数 p を割らない素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $\hat{L}(x,y)$, $\hat{\mathcal{B}}_S(x,y)$ が $K_\mathfrak{p}$ 上で, ともに特殊元 $pI_g - A_pT + X_pT^2$ に属することにより得られる.

$g=1, K=\mathbf{Q}$ のとき, B は $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線となり,

$$L(B/K,s)=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$$

は B の l-進表現に付随する L-級数となる. この場合が Honda [4] の結果である. また, $K=\mathbf{Q}, t=1$ のとき, B は GL_2-type の Abel 多様体, $A=B$ となり,

$$L(B/K,s)=\sum_{n\geq 1} R(a_n)n^{-s}$$

は B の λ-進表現に付随する行列係数の L-級数となる. この場合は, Deninger-Nart [1] の結果である. $g=1$, K が 2 次体のとき, B は $\mathbf{Q}$-曲線, A は B の K から $\mathbf{Q}$ への Weil restriction となり,

$$L(B/K,s)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n\beta(\sigma_n)R(\phi_{\sigma_n})}{\delta(\phi_{\sigma_n})}n^{-s}$$

は A に付随する λ-進表現の L-級数 $L(A/\mathbf{Q},E,s)$ の $\mathbf{Q}$-共役な L-級数の一次結合となる. この場合は, 筆者 [10] の結果である.

References

[1] C. Deninger and E. Nart, *Formal groups and L-series,* Comment. Math. Helv. **65** (1990), 318-333.

[2] Y. Hasegawa, $\mathbf{Q}$*-curves over quadratic fields,* Manuscripta Math. **94** (1997), 347-364.

[3] T. Honda, *Formal groups and zeta-functions,* Osaka J. Math. **5** (1968), 199-213.

[4] T. Honda, *On the theory of commutative formal groups,* J. Math. Soc. Japan **22** (1970), 213-246.

[5] G. Karpilovsky, *Group representations,* Vol. 2 (Elsevier, Amsterdam, 1993).

[6] E. E. Pyle, *Abelian varieties over* $\mathbf{Q}$ *with large endomorphism algebras and their simple components over* $\overline{\mathbf{Q}}$. In J. Cremona, J.C. Lario, J. Quer and K. Ribet (ed.): Modular curves and abelian varieties, 189-239, Progress in Mathematics **224**, Birkhäuser, 2004.

[7] J. Quer, $\mathbf{Q}$*-curves and abelian varieties of* GL_2*-type,* Proc. London Math. Soc. **81** (2000), 285-317.

[8] J. Quer, *Fields of definition of* $\mathbf{Q}$*-curves,* Journal de Théorie Nombres de Bordeaux **55** (2001), 275-285.

[9] K. A. Ribet, *Abelian varieties over* $\mathbf{Q}$ *and modular forms,* In J. Cremona, J.C. Lario, J. Quer and K. Ribet (ed.): Modular curves and abelian varieties, 240-261, Progress in Mathematics **224**, Birkhäuser, 2004.

[10] F. Sairaiji, *Formal groups of certain* $\mathbf{Q}$*-curves over quadratic fields,* Osaka J. Math. **39** (2002), 223-243.

[11] F. Sairaiji, *Formal groups of building blocks completely defined over finite abelian extensions of* $\mathbf{Q}$, preprint.

[12] J. H. Silverman, The Arithmetic of Elliptic curves, Springer G.T.M. 106.

Fumio SAIRAIJI,
Hiroshima International University,
Hiro, Hiroshima 737-0112, Japan.
e-mail address: sairaiji@it.hirokoku-u.ac.jp