数理解析研究所講究録 1380 巻 2004 年 52-62

Improved estimation of two ordered normal means with unknown variances

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 大野 洋平 (Youhei Oono)
Graduate School of Science and Technology,
Keio University
慶應義塾大学 理工学部 篠崎 信雄 (Nobuo Shinozaki)
Faculty of Science and Technology,
Keio University

1. はじめに

母分散の値が未知である 2 つの正規母集団の母平均に順序制約があるとき，母平均の推定問題を考える．母分散の値が既知である場合には，一般に k (≥ 2) 個の正規母集団の母平均の間に順序制約がある場合の母平均の推定問題に関しては広く論じられてきた．Lee (1981) は，k 個の正規母集団の母平均に simple order 制約 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k$ がある場合に，制約条件下での μ_i の最尤推定量 (RMLE) が制約条件がない下での μ_i の最尤推定量 (URMLE) を 2 乗誤差損失の下で一様に改良することを示した．Kelly (1989) は Lee の結果が，2 乗誤差損失を含む一般の損失関数 $\rho(|\hat{\mu}_i - \mu_i|)$ ($\rho(\cdot)$ は任意の非減少関数) の場合にも成立することを示した．さらに，Hwang and Peddada (1994) は，母平均の間に任意の順序制約がある場合に，ノードである母平均に関しては dummy simple order を想定して得られる RMLE が URMLE を，2 乗誤差損失を含む一般の損失関数 $\rho(|\hat{\mu}_i - \mu_i|)$ の下で一様に改良することを示した． ここで，ある母平均がノードであるとは，その母平均とその他の母平均との大小関係がすべて分かっていることをいう．

本発表では，母分散の値は未知であると仮定し，2 乗誤差損失のもとで 2 つの母集団の個々の母平均と，母平均の線形関数の推定について議論する．X_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \cdots, n_i$ は互いに独立に $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従っているとし，順序制約 $\mu_1 \leq \mu_2$

があるものとする．σ_1^2 と σ_2^2 の値が既知ならば，μ_1 と μ_2 の RMLE

$$\tilde{\mu_1} = \min\left\{\bar{X}_1, \frac{(n_1/\sigma_1^2)\bar{X}_1 + (n_2/\sigma_2^2)\bar{X}_2}{(n_1/\sigma_1^2)+(n_2/\sigma_2^2)}\right\},\ \tilde{\mu_2} = \max\left\{\bar{X}_2, \frac{(n_1/\sigma_1^2)\bar{X}_1 + (n_2/\sigma_2^2)\bar{X}_2}{(n_1/\sigma_1^2)+(n_2/\sigma_2^2)}\right\} \tag{1}$$

はそれぞれ URMLE $\bar{X}_1$ と $\bar{X}_2$ を一様に改良することが知られている．本発表では，(1) 式において σ_i^2 をその標本分散 $s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2/(n_i-1)$ で置き換えて得られる plug-in 推定量

$$\hat{\mu_1} = \min\left\{\bar{X}_1, \frac{(n_1/s_1^2)\bar{X}_1 + (n_2/s_2^2)\bar{X}_2}{(n_1/s_1^2)+(n_2/s_2^2)}\right\},\ \hat{\mu_2} = \max\left\{\bar{X}_2, \frac{(n_1/s_1^2)\bar{X}_1 + (n_2/s_2^2)\bar{X}_2}{(n_1/s_1^2)+(n_2/s_2^2)}\right\} \tag{2}$$

がそれぞれ $\bar{X}_1$ と $\bar{X}_2$ を一様に改良するための必要十分条件と，線形関数 $c_1\mu_1+c_2\mu_2$ の推定量として plug-in 推定量 $c_1\hat{\mu_1}+c_2\hat{\mu_2}$ が URMLE $c_1\bar{X}_1+c_2\bar{X}_2$ を一様に改良するための必要十分条件を与える．ただし，c_i は定数である．Garren (2000) は，$\mu_1=\mu_2$ かつ $\sigma_2^2/\sigma_1^2\to\infty$ の場合に (2) 式において，s_i^2 を $\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2/n_i$ で置き換えて得られる推定量のリスクが，$\bar{X}_1$ のリスクより小さくなるための n_1 と n_2 の条件を求めた．

2. 個々の母平均の推定

ここでは，μ_1 の plug-in 推定量が μ_1 の URMLE を一様に改良するための必要十分条件を与える．μ_2 の推定に関しても同様に議論できる．

Theorem 2.1. plug-in 推定量 $\hat{\mu_1}$ が URMLE $\bar{X}_1$ を一様に改良するための必要十分条件は，$\mu_1=\mu_2$ の時に，$\hat{\mu_1}$ のリスクが $\bar{X}_1$ のリスクを超えないことである．さらに，この必要十分条件は，$\mu_1=\mu_2$ の時に Graybill-Deal 推定量 $\hat{\mu}_{GD} = \{(n_1/s_1^2)\bar{X}_1+(n_2/s_2^2)\bar{X}_2\}/\{(n_1/s_1^2)+(n_2/s_2^2)\}$ のリスクが $\bar{X}_1$ のリスクを超えないことと同値である．すなわち，一様な改良のための必要十分条件は，$n_1\geq 4$ かつ $n_2\geq 9+16/(n_1-3)$ が成り立つことである．

Proof. $\gamma=(n_1/s_1^2)/(n_1/s_1^2+n_2/s_2^2)$ とおくと，$\hat{\mu_1}$ は $\hat{\mu_1}=\min(\bar{X}_1, \gamma\bar{X}_1+(1-\gamma)\bar{X}_2)$

と表せ，$\bar{X}_1$ のリスクと $\hat{\mu}_1$ のリスクの差は，

$$\begin{aligned} &R(\theta,\bar{X}_1)-R(\theta,\hat{\mu}_1)\\ &=E\left[(\bar{X}_1-\mu_1)^2-\left\{\gamma(\bar{X}_1-\mu_1)+(1-\gamma)(\bar{X}_2-\mu_1)\right\}^2\right]I_{\bar{X}_1\geq\bar{X}_2} \end{aligned} \tag{3}$$

となる．ここで，$\theta=(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，$I_C$：条件 C の定義関数である．リスク差の評価のために，変数変換

$$Z_1=\bar{X}_1-\mu_1,\ Z_2=\bar{X}_2-\mu_1, \tag{4}$$

をすることを考える．Z_1 と Z_2 は互いに独立にそれぞれ，$N(0,\tau_1^2)$ と $N(\mu,\tau_2^2)$ に従う．ただし，$\mu=\mu_2-\mu_1\geq 0$，$\tau_i^2=\sigma_i^2/n_i$ である．Z_1，Z_2 と γ は互いに独立であることより，リスクの差は

$$\begin{aligned} &R(\theta,\bar{X}_1)-R(\theta,\hat{\mu}_1)\\ &=E[Z_1^2-\{\gamma Z_1+(1-\gamma)Z_2\}^2]I_{Z_1\geq Z_2}\\ &=2E[\gamma(1-\gamma)]E[(Z_1-Z_2)Z_1I_{Z_1\geq Z_2}]+E[(1-\gamma)^2]E[(Z_1^2-Z_2^2)I_{Z_1\geq Z_2}] \end{aligned} \tag{5}$$

と評価できる．さらに，変数変換

$$Y_1=Z_1-Z_2,\ Y_2=Z_1+(\tau_1^2/\tau_2^2)Z_2, \tag{6}$$

をすることを考える．Y_1 と Y_2 は互いに独立に，$N(-\mu,\tau_1^2+\tau_2^2)$ と $N((\tau_1^2/\tau_2^2)\mu,\tau_1^2+(\tau_1^4/\tau_2^2))$ に従うことに注意する．すると，(6) 式の変数変換により，(5) 式の表現における Z_i に関する期待値の項について，

$$E[(Z_1-Z_2)Z_1I_{Z_1\geq Z_2}]\geq\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2+\tau_2^2}E[Y_1^2I_{Y_1\geq 0}], \tag{7}$$

$$E[(Z_1^2-Z_2^2)I_{Z_1\geq Z_2}]\geq\frac{\tau_1^2-\tau_2^2}{\tau_1^2+\tau_2^2}E[Y_1^2I_{Y_1\geq 0}] \tag{8}$$

と評価できる．上の二つの不等式においては $\mu=0$ の時のみ等号が成り立ち，$\mu>0$ の時 strict に不等式が成り立つ．(7) 式と (8) 式を (5) 式に対して用いると，リスクの差は次のように評価される．

$$\begin{aligned} &R(\theta,\bar{X}_1)-R(\theta,\hat{\mu}_1)\\ &\geq\frac{E[Y_1^2I_{Y_1\geq 0}]}{\tau_1^2+\tau_2^2}\left[\tau_1^2-\left\{\tau_1^2E[\gamma^2]+\tau_2^2E[(1-\gamma)^2]\right\}\right] \quad (9)\\ &=\frac{E[Y_1^2I_{Y_1\geq 0}]}{E_{\mu_1=\mu_2}[Y_1^2I_{Y_1\geq 0}]}\left\{R_{\mu_1=\mu_2}(\theta,\bar{X}_1)-R_{\mu_1=\mu_2}(\theta,\hat{\mu}_1)\right\}. \end{aligned}$$

$R_{\mu_1=\mu_2}$ と $E_{\mu_1=\mu_2}$ は，$\mu_1=\mu_2$ の時のリスクと期待値である．ここで，(9) において $\mu=0$ の時のみ等号が成立することに注意すると，一様な改良のための必要十分条件は，$\mu_1=\mu_2$ の時 $\forall\sigma_i^2>0$ に対して，$R_{\mu_1=\mu_2}(\theta,\bar{X}_1)\geq R_{\mu_1=\mu_2}(\theta,\hat{\mu}_1)$ が成り立つことである．

一方で，$\mu_1=\mu_2$ の時，$\bar{X}_1$ のリスクと Graybill-Deal 推定量 $\hat{\mu}_{GD}=\gamma\bar{X}_1+(1-\gamma)\bar{X}_2$ のリスクの差は，

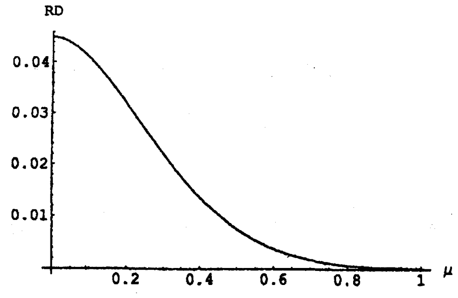
$$
\begin{aligned}
&R_{\mu_1=\mu_2}(\mu_1,\bar{X}_1)-R_{\mu_1=\mu_2}(\mu_1,\hat{\mu}_{GD})\\
&=E_{\mu_1=\mu_2}[(\bar{X}_1-\mu_1)^2]-E_{\mu_1=\mu_2}[\{\gamma(\bar{X}_1-\mu_1)+(1-\gamma)(\bar{X}_2-\mu_1)\}^2]\\
&=\tau_1^2-\{\tau_1^2E[\gamma^2]+\tau_2^2E[(1-\gamma)^2]\} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

と評価される．従って (9) 式と (10) 式より，$\hat{\mu}_1$ が $\bar{X}_1$ を一様に改良することと $\hat{\mu}_{GD}$ のリスクが $\bar{X}_1$ のリスクをを超えないということは同値である．すなわち，一様な改良のための必要十分条件は $n_1\geq 4$ かつ $n_2\geq 9+16/(n_1-3)$ が成り立つことである．(Graybill and Deal (1959)，Khatri and Shah (1974)，Shinozaki (1978)，Pal and Sinha (1996) などを参照せよ．)

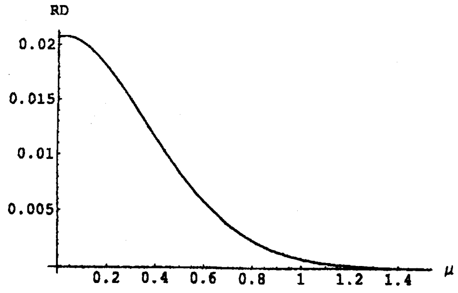
母分散の値が既知の場合，$\mu_1=\mu_2$ の時に RMLE は URMLE を最も大きく改良する．ところが母分散が未知の場合，$\mu_1=\mu_2$ の時に URMLE のリスク $R(\theta,\bar{X}_1)$ と plug-in 推定量のリスク $R(\theta,\hat{\mu}_1)$ の差は最大になるとは限らない．ここで，$\theta=(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ である．σ_i^2 の値を固定して，$R(\theta,\bar{X}_1)-R(\theta,\hat{\mu}_1)$ を $\mu=\mu_2-\mu_1\geq 0$ の関数として調べると，次の結果を得る．

Result 2.2. $\tau_i^2=\sigma_i^2/n_i$，$\gamma=(n_1/s_1^2)/(n_1/s_1^2+n_2/s_2^2)$ とする．(i) $E[\gamma(1-\gamma)]\geq(\tau_2^2/\tau_1^2)E[(1-\gamma)^2]$ ならば，$R(\theta,\bar{X}_1)-R(\theta,\hat{\mu}_1)$ は μ の減少関数であり，$\mu=0$ で最大になる．(ii) $E[\gamma(1-\gamma)]<(\tau_2^2/\tau_1^2)E[(1-\gamma)^2]$ ならば，$R(\theta,\bar{X}_1)-R(\theta,\hat{\mu}_1)$ は $0\leq\mu<\zeta_3$ で増加し，$\mu=\zeta_3$ で最大となり，$\mu>\zeta_3$ で減少する．ここで，ζ_3 はある正の定数である．なお，(i) と (ii) の条件は n_i と σ_i^2 の値のみに依存して決まる条件であることを注意しておく．

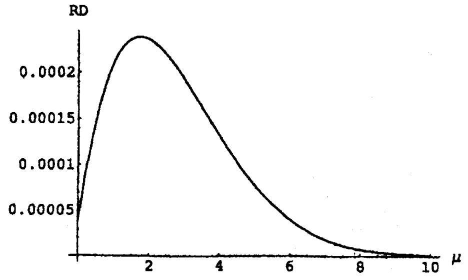
図 1 は，$n_1=n_2=11$，すなわち，$\hat{\mu}_1$ が $\bar{X}_1$ を一様に改良する場合（図 1. (a)-(c)）と，$n_1=n_2=10$，すなわち，$\hat{\mu}_1$ が $\bar{X}_1$ を一様に改良しない場合（図 1. (d)-(h)）に，σ_1^2 と σ_2^2 の値を固定して，$R(\theta,\bar{X}_1)-R(\theta,\hat{\mu}_1)$ を μ の関数として図示したものである．σ_2^2/σ_1^2 の値が小さい場合（図 1. (a)，(b)，(d)，(e)），リスクの差は μ の減少関数である．σ_2^2/σ_1^2 の値が大きい場合 (図 1. (c)，(f)，(g)，(h))，リスクの



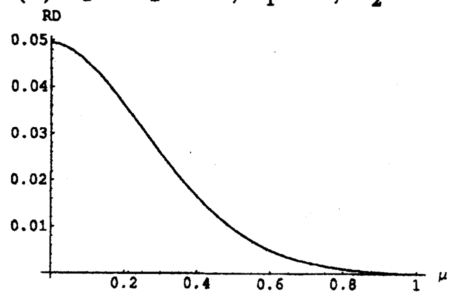
(a) $n_1 = n_2 = 11,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 0.1^2$.



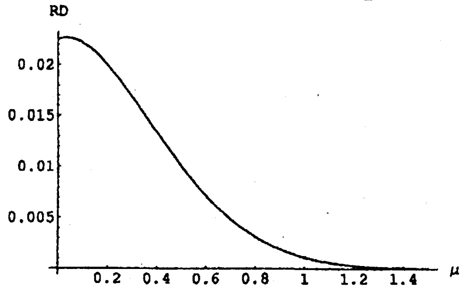
(b) $n_1 = n_2 = 11,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 1$.



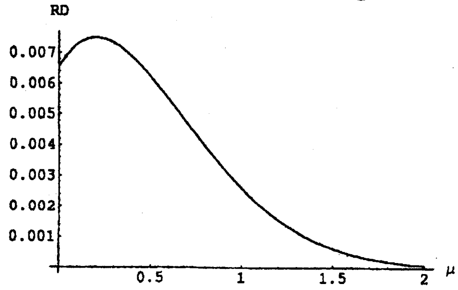
(c) $n_1 = n_2 = 11,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 10^2$.



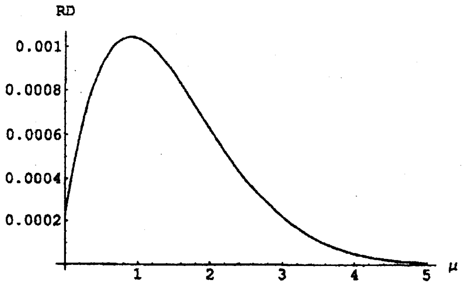
(d) $n_1 = n_2 = 10,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 0.1^2$.



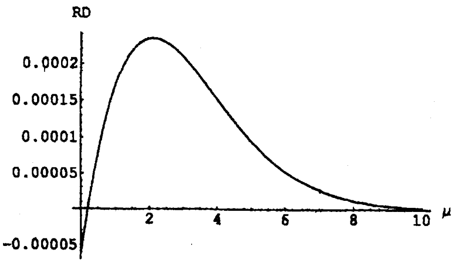
(e) $n_1 = n_2 = 10,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 1$.



(f) $n_1 = n_2 = 10,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 2^2$.



(g) $n_1 = n_2 = 10,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 5^2$.



(h) $n_1 = n_2 = 10,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 10^2$.

図1. リスクの差 $RD = R(\theta, \bar{X}_1) - R(\theta, \hat{\mu}_1)$.

差は μ がある値より小さいとき増加関数であり，μ がある値より大きいとき減少関数である．また，$n_1 = n_2 = 10$ の時，σ_2^2/σ_1^2 の値が十分大きい場合（図 1. (h)）にリスクの差は $\mu = 0$ で負となる．この事は，Graybill-Deal 推定量 $\hat{\mu}_{GD}$ が $\bar{X}_1$ を最も改良しにくい場合が σ_2^2/σ_1^2 が十分大きい場合であったことから直感的に理解可能である．

3.　母平均の線形関数の推定

線形関数 $c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ の推定を考える．母分散の値が既知であれば次の結果を得る．

Theorem 3.1. $c_1(\sigma_1^2/n_1) = c_2(\sigma_2^2/n_2)$ でなければ，RMLE $c_1\tilde{\mu}_1 + c_2\tilde{\mu}_2$ は URMLE $c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ を一様に改良し，$\mu_1 = \mu_2$ の時に最も大きく改良する．

Note. 上の定理で，$c_1(\sigma_1^2/n_1) = c_2(\sigma_2^2/n_2)$ の場合を除いているのは，この条件が成り立つと，$c_1\tilde{\mu}_1 + c_2\tilde{\mu}_2 = c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ となってしまうからである．

次に母分散の値が未知の場合に，plug-in 推定量が URMLE を一様に改良するかどうかを考える．一様な改良のための必要十分条件は次の定理で与えられる．証明に関しては，Oono and Shinozaki (2004) を参照のこと．

Theorem 3.2. plug-in 推定量 $c_1\hat{\mu}_1 + c_2\hat{\mu}_2$ が URMLE $c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ を一様に改良するための必要十分条件は，$\mu_1 = \mu_2$ の時に，$c_1\hat{\mu}_1 + c_2\hat{\mu}_2$ のリスクが $c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ のリスクを超えないことである．さらに，この必要十分条件は，$\mu_1 = \mu_2$ の時に $(c_1 + c_2)\mu_1$ の推定量として $(c_1 + c_2)\hat{\mu}_{GD}$ のリスクが $c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ のリスクを超えないことと同値である．

Theorem 3.2 より，plug-in 推定量が URMLE を一様に改良するための n_1 と n_2 の十分条件を求める．一様な改良が成り立つための必要十分条件は，$\mu_1 = \mu_2$ の時に $\forall\sigma_i^2 > 0$ に対して，$(c_1 + c_2)\mu_1$ の推定量として $(c_1 + c_2)\hat{\mu}_{GD}$ のリスクが $c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ のリスクを超えないことである．従って，

$$c_1^2\tau_1^2 + c_2^2\tau_2^2 - (c_1 + c_2)^2\left\{\tau_1^2 E[\gamma^2] + \tau_2^2 E[(1-\gamma)^2]\right\} \geq 0 \tag{11}$$

が，$\forall\sigma_i^2 > 0$ に対して成り立つ n_i の範囲を求めればよい．$c_1c_2 = 0$ の場合は Section

2 で議論したので，c_1 と c_2 が同符号か異符号かで場合分けして (11) 式が成り立つ n_1 と n_2 の範囲に関して議論する．

<u>$c_1c_2>0$ の場合．</u> $c_1>0$，$c_2>0$，$c_1+c_2=1$ として一般性を失わない．$E[\gamma^2]>(E[\gamma])^2$ と $E[(1-\gamma)^2]>(E[1-\gamma])^2$ より，(11) 式左辺は

$$
\begin{aligned}
&c_1^2\tau_1^2+(1-c_1)^2\tau_2^2-\left\{\tau_1^2E[\gamma^2]+\tau_2^2E[(1-\gamma)^2]\right\}\\
&<c_1^2\tau_1^2+(1-c_1)^2\tau_2^2-\left\{(E[\gamma])^2\tau_1^2+(1-E[\gamma])^2\tau_2^2\right\}\\
&=Var[c_1\bar{X}_1+(1-c_1)\bar{X}_2]-Var\left[E[\gamma]\bar{X}_1+(1-E[\gamma])\bar{X}_2\right].
\end{aligned}
$$

と評価される．従って，どんな $0<c_1<1, n_1, n_2$ に対しても，$c_1=\tau_2^2/(\tau_1^2+\tau_2^2)$ となる σ_1^2 と σ_2^2 が存在する．そのような σ_1^2 と σ_2^2 に対して，$Var[c_1\bar{X}_1+(1-c_1)\bar{X}_2]\le Var\left[E[\gamma]\bar{X}_1+(1-E[\gamma])\bar{X}_2\right]$ が成り立つので，一様な改良は不可能である．

<u>$c_1c_2<0$ の場合．</u> (11) 式は，

$$
1+d^2a-(1+d)^2\left\{E[\gamma^2]+aE[(1-\gamma)^2]\right\}\ge 0 \tag{12}
$$

と同値であることに注意する．ここで，$d=c_2/c_1<0$，$a=\tau_2^2/\tau_1^2>0$ である．従って，(11) 式が $\forall\sigma_i^2>0$ に対して成り立つことは，(12) 式が $\forall a>0$ に対して成り立つことと同値であり，これが成り立つための n_1 と n_2 の条件を求める．ここでさらに，$-2\le d\le -1/2$ と $-1/2<d<0$ と $d<-2$ の場合に分けて考える．$d<-2$ の場合は，$-1/2<d<0$ の場合と同様にして考えることができるので，ここでは，$d<-2$ の場合は省略する．

<u>$-2\le d\le -1/2$ の場合．</u> $E[\gamma^2]<1$ と $E[(1-\gamma)^2]<1$ が成り立つことに注意すると，(12) 式左辺は

$$
\begin{aligned}
&1+d^2a-(1+d)^2\left\{E[\gamma^2]+aE[(1-\gamma)^2]\right\}\\
&\ge\{1-(1+d)^2\}+a\{d^2-(1+d)^2\}
\end{aligned}
$$

と評価され，$-2\le d\le -1/2$ であることより，非負である．従って，常に一様な改良が成り立つ．

<u>$-1/2<d<0$ の場合．</u> まず，$\hat{\mu}_1$ が $\bar{X}_1$ を一様に改良するとき，すなわち，$n_1\ge 4$ かつ $n_2\ge 9+16/(n_1-3)$ が成り立つとき，(12) 式は $\forall a>0$ に対して成り立つこ

とを示す．$\hat{\mu}_1$ が $\bar{X}_1$ を一様に改良するとき，Graybill and Deal (1959) より

$$E[\gamma^2]+aE[(1-\gamma)^2]\leq 1$$

が得られる． 従って $(1+d)^2<1$ と合わせて考えると，(12) 式は $\forall a>0$ に対して成り立つ．次に，(12) 式左辺を別の方法で評価することにより，(12) 式が成り立つための別の十分条件を与える．なお，これから求める n_1 と n_2 に関する十分条件は，さらに厳しい不等式評価をすればより広げられることを断っておく．$(1+d)^2<1$ であることより，$a\leq 1$ ならば，$E[\gamma^2]+aE[(1-\gamma)^2]<1$ が成り立つ．従って，$a\leq 1$ ならば (12) が成り立つことが示せる．続いて，$a>1$ の場合を考える．まず，Cauchy-Schwartz の不等式より

$$\begin{aligned}1-\gamma=\frac{s_1^2/n_1}{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}&=\frac{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)}{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)+a\times\chi^2_{n_2-1}/(n_2-1)}\\&\leq\frac{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)}{2\sqrt{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)\times a\times\chi^2_{n_2-1}/(n_2-1)}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{\frac{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)}{\chi^2_{n_2-1}/(n_2-1)}},\end{aligned}\tag{13}$$

が成り立つことに注意する．ここで，$\chi^2_{n_i-1}=(n_i-1)s_i^2/\sigma_i^2$ は自由度 n_i-1 の χ^2 分布に従う確率変数である．従って，$n_2\geq 4$ (これは $E[(\chi^2_{n_2-1})^{-1}]$ が存在するための条件である) が成り立つならば，

$$E[(1-\gamma)^2]\leq\frac{1}{4a}\frac{n_2-1}{n_2-3}\tag{14}$$

が成り立つ．(14) 式と，$E[\gamma^2]<1$ より，

$$n_2\geq 4\quad\text{かつ}\quad\frac{1}{4}\frac{n_2-1}{n_2-3}\leq\frac{-2d}{(1+d)^2}\tag{15}$$

が成り立つならば，(12) 式は $\forall a>1$ に対して成り立つ．すなわち，d と n_2 が (15) 式を満たすならば， (12) 式は $\forall a>0$ に対して成り立つ．例えば，$d=-1/3$ または $d=-1/4$ の場合，$n_2\geq 4$ であれば成り立ち，$d=-1/5$ ならば $n_2\geq 5$ であれば成り立ち， $d=-1/6$ ならば $n_2\geq 6$ であれば成り立つ．以上をまとめると次の結果が得られる．

Conclusion 3.3. plug-in 推定量 $c_1\hat{\mu}_1+c_2\hat{\mu}_2$ は，URMLE $c_1\bar{X}_1+c_2\bar{X}_2$ を次の場合に一様に改良する．

(i) $c_1 = 0$ ならば，$n_2 \geq 4$ かつ $n_1 \geq 9 + 16/(n_2 - 3)$ が成り立つ時．
(ii) $c_2 = 0$ ならば，$n_1 \geq 4$ かつ $n_2 \geq 9 + 16/(n_1 - 3)$ が成り立つ時．
(iii) $-2 \leq c_2/c_1 \leq -1/2$ ならば，$n_i \geq 2$ が成り立つ時．
(iv) $c_2/c_1 < -2$ ならば，$n_2 \geq 4$ かつ $n_1 \geq 9 + 16/(n_2 - 3)$，または

$$n_1 \geq 4 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{4}\frac{n_1 - 1}{n_1 - 3} \leq \frac{-2c_2/c_1}{(1 + c_2/c_1)^2} \quad \text{が成り立つ時.}$$

(v) $-1/2 < c_2/c_1 < 0$ ならば，$n_1 \geq 4$ かつ $n_2 \geq 9 + 16/(n_1 - 3)$，または

$$n_2 \geq 4 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{4}\frac{n_2 - 1}{n_2 - 3} \leq \frac{-2c_2/c_1}{(1 + c_2/c_1)^2} \quad \text{が成り立つ時.}$$

しかしながら，$c_1c_2 > 0$ の時は一様な改良は不可能である．

Remark 3.4. $c_1c_2 \leq 0$ とする．Conclusion 3.3 より，$\forall\sigma_i^2 > 0$ に対して $\mu_1 = \mu_2$ の時の $\hat{\mu}_{GD}$ のリスクが $\bar{X}_1$ と $\bar{X}_2$ のリスクを超えないならば，すなわち，Graybill and Deal (1959) の与えた条件 (a) $n_1 \geq 11$ かつ $n_2 \geq 11$，または (b) $n_1 = 10$ かつ $n_2 \geq 19$，または (c) $n_2 = 10$ かつ $n_1 \geq 19$ が成り立つならば，$c_1\hat{\mu}_1 + c_2\hat{\mu}_2$ は $c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ を一様に改良する．

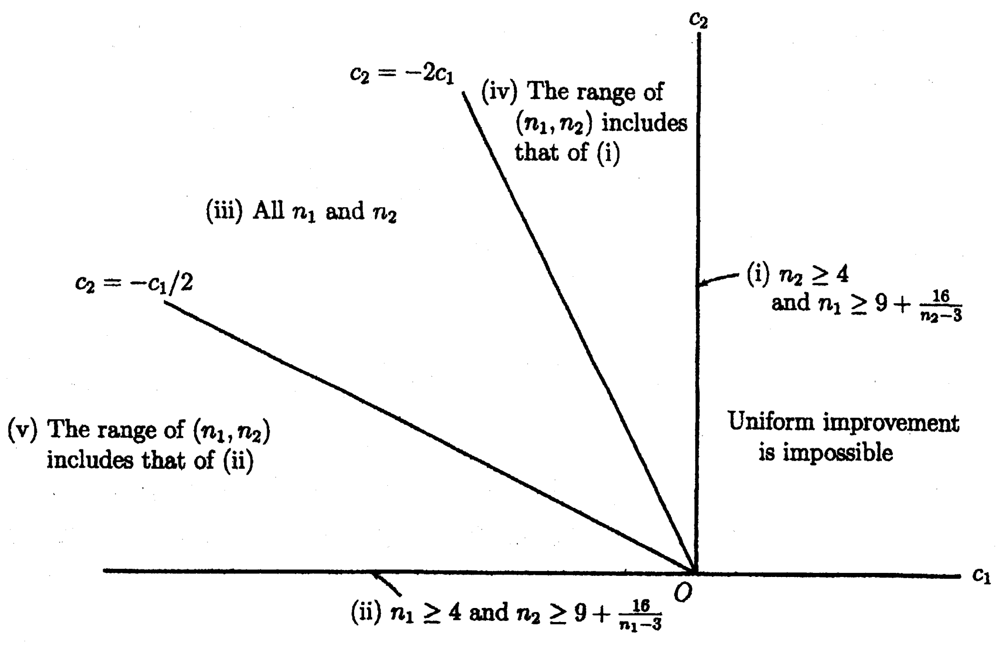


図 2.　一様な改良が成り立つための n_1 と n_2 の範囲．

Conclusion 3.3 より，一様な改良が成り立つための n_1 と n_2 の範囲を (c_1, c_2) 平面上に図示すると図 2 を得る．$c_1 = 0$ の時，n_1 と n_2 が (i) を満たすならば一様に改良する．$c_2/c_1 < -2$ の時，一様な改良のための n_1 と n_2 の範囲は (i) より広くなり，c_2/c_1 が大きくなるにつれ広くなる．$-2 \leq c_2/c_1 \leq -1/2$ の時，常に一様な改良が成り立つ．$-1/2 < c_2/c_1 < 0$ の時，c_2/c_1 が大きくなるほど一様な改良のための n_1 と n_2 の範囲は狭くなる．$c_1c_2 > 0$ の時，一様な改良は不可能である．

参考文献

[1] Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M., Brunk, H. D., 1972. Statistical Inference under Order Restrictions: The Theory and Application of Isotonic Regression. Wiley, New York.

[2] Garren, S. T., 2000. On the improved estimation of location parameters subject to order restrictions in location-scale families. Sankhyā Ser. B 62, 189-201.

[3] Graybill, F. A., Deal, R. B., 1959. Combining unbiased estimators. Biometrics. 15, 543-550.

[4] Hwang, J. T., 1985. Universal domination and stochastic domination: estimation simultaneously under a broad class of loss functions. Ann. Statist. 13, 295-314.

[5] Hwang, J. T. G., Peddada, S. D., 1994. Confidence interval estimation subject to order restrictions. Ann. Statist. 22, 67-93.

[6] Kelly, R. E., 1989. Stochastic reduction of loss in estimating normal means by isotonic regression. Ann. Statist. 17, 937-940.

[7] Khatri, C. G., Shah, K. R., 1974. Estimation of location parameters from two linear models under normality. Comm. Statist. 3, 647-663.

[8] Lee, C. I. C., 1981. The quadratic loss of isotonic regression under normality. Ann. Statist. 9, 686-688.

[9] Oono, Y., Shinozaki, N., 2004. Estimation of two order restricted normal means with unknown and possibly unequal variances. To appear in J. Statist. Plann. Inference.

[10] Pal, N., Sinha, B. K., 1996. Estimation of a common mean of several normal populations: a review. Far East J. Math. Sci. Special Volume, Part I, 97-110.

[11] Robertson, T., Wright, F. T., Dykstra, R. L., 1988. Order Restricted Statistical Inference. Wiley, New York.

[12] Shinozaki, N., 1978. A note on estimating the common mean of k normal distributions and the Stein problem. Comm. Statist. A—Theory Methods. 7, 1421-1432.