数理解析研究所講究録 1381 巻 2004 年 182-189

ランダムタイリングの数値シミュレーション

熊本県立大学 総合管理学部 貞広泰造 (Taizo SADAHIRO)
Faculty of administration,
Kumamoto Prefectural University

概要

本稿で Kenyon[1] による平面のランダム (lozenges) タイル貼りの局所統計に関する結果を紹介し、その数値シミュレーションの結果を示す。

1 ランダムタイル貼りの局所統計

$$\hat{x} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}, \qquad \hat{y} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$$

$$V_0 = \mathbf{Z}\hat{x} + \mathbf{Z}\hat{y}, \qquad V_1 = V_0 + 1.$$

$$V = V_0 \cup V_1$$

とする。V_0 の各頂点 $x\hat{x}+y\hat{y}$, $x, y \in \mathbf{Z}$ を $(x, y, 0)$ で、V_1 の各頂点 $x\hat{x}+y\hat{y}+1$, $x, y \in \mathbf{Z}$ を $(x, y, 1)$ で表す。

V_0 の各点 $(x, y, 0)$ と、3 つの V_1 の点

$$(x, y, 1),\ (x-1, y, 1),\ (x, y-1, 1)$$

を辺 (長さ 1 の直線) で結ぶ。こうして得られた無限グラフを H で表すことにする。V_0 の元を黒頂点、V_1 の元を白頂点と呼ぶことにする。H を図 1 に示す。

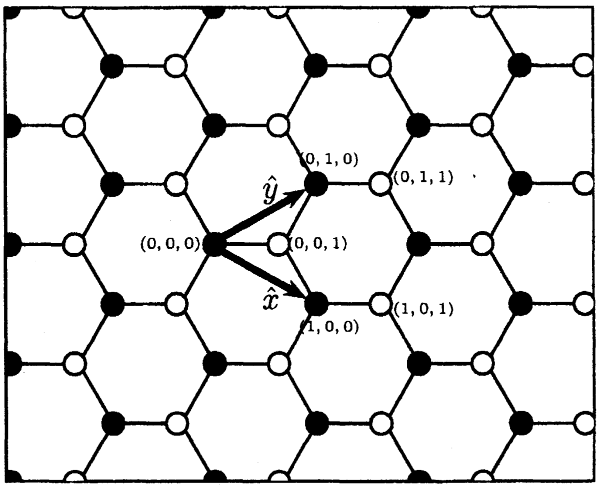


図 1: H

(無向) グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表す。$E(G)$ の部分集合 M が、グラフ G の**完全マッチング**であるとは $V(G)$ のすべての元が M の唯一の元の端点となっていることをいう。H の完全マッチング全体を X で表す。

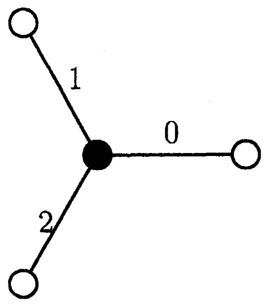


図 2: 黒頂点に隣接する頂点

X は次のようにして有限型の 2 次元記号力学系と考えることができる。$M \in X$ のある黒頂点 $(x,y,0) \in V_0$ は $(x,y,1),(x-1,y,1),(x,y-1,1) \in V_1$ のいずれかと結ばれている。$M : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \{0,1,2\}$ を

$$M(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{(x,y,1)と結ばれている} \\ 1 & \text{(x-1,y,1)と結ばれている} \\ 2 & \text{(x,y-1,1)と結ばれている} \end{cases}$$

と定める。すると $X \subset \{0,1,2\}^{\mathbf{Z}^2}$ は $\{0,1,2\}$ をアルファベットとする有限型の記号力学系と考えることができる。Kenyon は X 上にエントロピーを最大化する平行移動不変な測度 ν を構成し、X のシリンダ集合の測度を計算した。

定理 1 (Kenyon) $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\} = \{(x_1,y_1,0),(x_2,y_2,0),\ldots,(x_n,y_n,0)\}$ を黒頂点の集合、$\{w_1,w_2,\ldots,w_n\} = \{(\xi_1,\eta_1,1),(\xi_2,\eta_2,1),\ldots,(\xi_n,\eta_n,1)\}$ を白頂点の集合とする。マッチング $M = \{b_1w_1,b_2w_2,\ldots,b_nw_n\}$ が定義する X のシリンダセット、つまり、M を含むような H の完全マッチング全体を U_M で表すとき、

$$\nu(U_M) = \left| \det \begin{pmatrix} P(w_1-b_1) & P(w_1-b_2) & \cdots & P(w_1-b_n) \\ P(w_2-b_1) & \ddots & \cdots & P(w_2-b_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P(w_n-b_1) & P(w_n-b_2) & \cdots & P(w_n-b_n) \end{pmatrix} \right|$$

と表される。ここで $b_i - w_i = (x_i-\xi_i, y_i-\eta_i)$ であり、P は

$$P(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\exp(i\theta x + i\phi y)}{1+\exp(-ix)+\exp(-iy)} dxdy$$

である。この P を Coupling function と呼ぶ。すべての $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ に対して $P(x,y) \in \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ である。

Coupling function $P(x,y)$ の値を $(x,y)\in\mathbf{Z}^2$ に対して評価できる。$x=-1$ のとき、

$$P(-1,y)=\frac{c_y\sqrt{3}}{2\pi y},\quad c_y=\begin{cases}0 & y\equiv 0 \mod 3\\ 1 & y\equiv -1 \mod 3\\ -1 & y\equiv 1 \mod 3\end{cases}$$

であり、P は次のような対称性をもっている: $r_i:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z}^2(i=1,2,\ldots,5)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} r_1(x,y) &= (y,x)\\ r_2(x,y) &= (-x-y+1,x)\\ r_3(x,y) &= (x,-x-y+1)\\ r_4(x,y) &= (-x-y+1,y)\\ r_5(x,y) &= (y,-x-y+1). \end{aligned}$$

すると r_1 は直線 (x=y) についての折り返し、r_2 は原点回りの 120 度回転を表す。$r_3=r_1\circ r_2$, $r_4=r_1\circ r_2^2$ $r_5=r_2^2$(240 度回転) である。これらの r_i について $P(x,y)=P(r_i(x,y))$ が成り立つ。また、

$$P(x,y)+P(x-1,y)+P(x,y-1)=\begin{cases}0 & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

これらの関係を用いることにより、$P(-1,\mathbf{Z})$ から出発して任意の $(x,y)\in\mathbf{Z}^2$ について $P(x,y)$ の値を正確に求めることができる。

例 1 $M=\{b_1w_1,b_2w_2,b_3w_3\}$, $b_1=(0,0,0), b_2=(0,1,0), b_3=(-1,1,0), w_1=(0,0,1), w_2=(-1,1,1), w_3=(-1,0,1)$ とする。

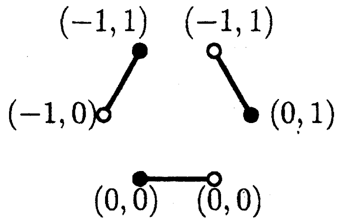


図 3: 正六角形

このとき

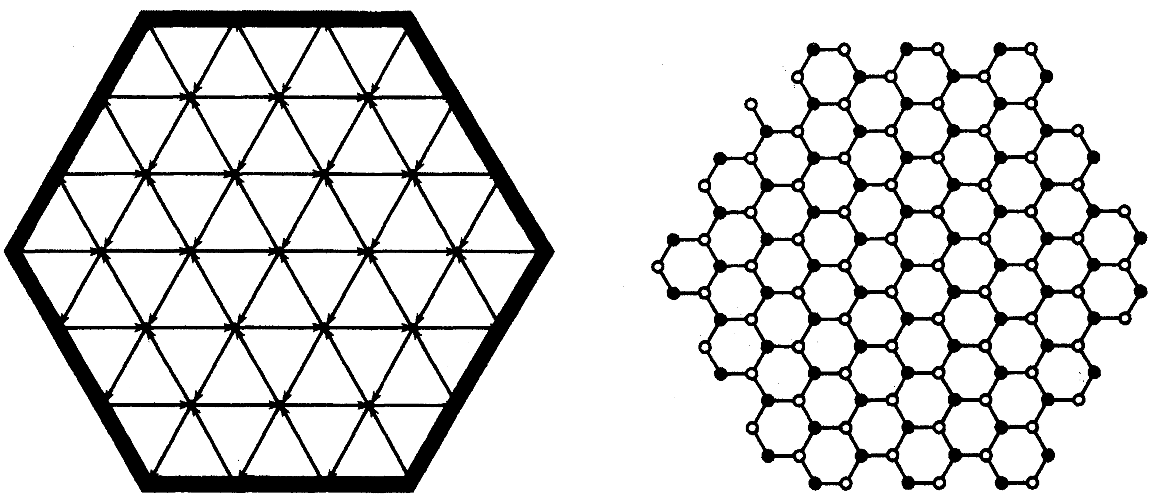
$$
\begin{aligned}
\nu(U_M) &= \begin{vmatrix} P(w_1-b_1) & P(w_1-b_2) & P(w_1-b_3) \\ P(w_2-b_1) & P(w_2-b_2) & P(w_2-b_3) \\ P(w_2-b_1) & P(w_3-b_2) & P(w_3-b_3) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & -\tau \\ 1/3 & -\tau & 1/3 \\ -\tau & 1/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{2}{27} + \frac{\sqrt{3}}{6\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi^3} \approx 14.51\%
\end{aligned}
$$

定理 2 (Kenyon) ν は強混合的である。つまり、M_1, M_2 を二つのマッチングとするとき、

$$\nu(U_{M_1} \cap (U_{M_2} + x)) = \nu(U_{M_1})\nu(U_{M_2}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

2 Temperley bijection

Kenyon と Propp,Wilson[2] は平面グラフ $\mathcal{G}$ の全域木全体と $\mathcal{G}$ から誘導されるグラフ $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ の完全マッチングの間の全単射 (Temperley bijection) の存在を示した。図 4 はその一例であり、ある種のグラフ $\mathcal{G}$ とそれから誘導されるグラフ $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ を示したものである。ここで $\mathcal{G}$ の周囲の太い線は辺ではなく 1 つの頂点である。この太い線で表される頂点 v_r を根とするような $\mathcal{G}$ の全域木は誘導された右側のグラフ $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ と一対一で対応する。



$\mathcal{G}$ $\mathcal{H}(\mathcal{G})$

図 4: Temperley bijection

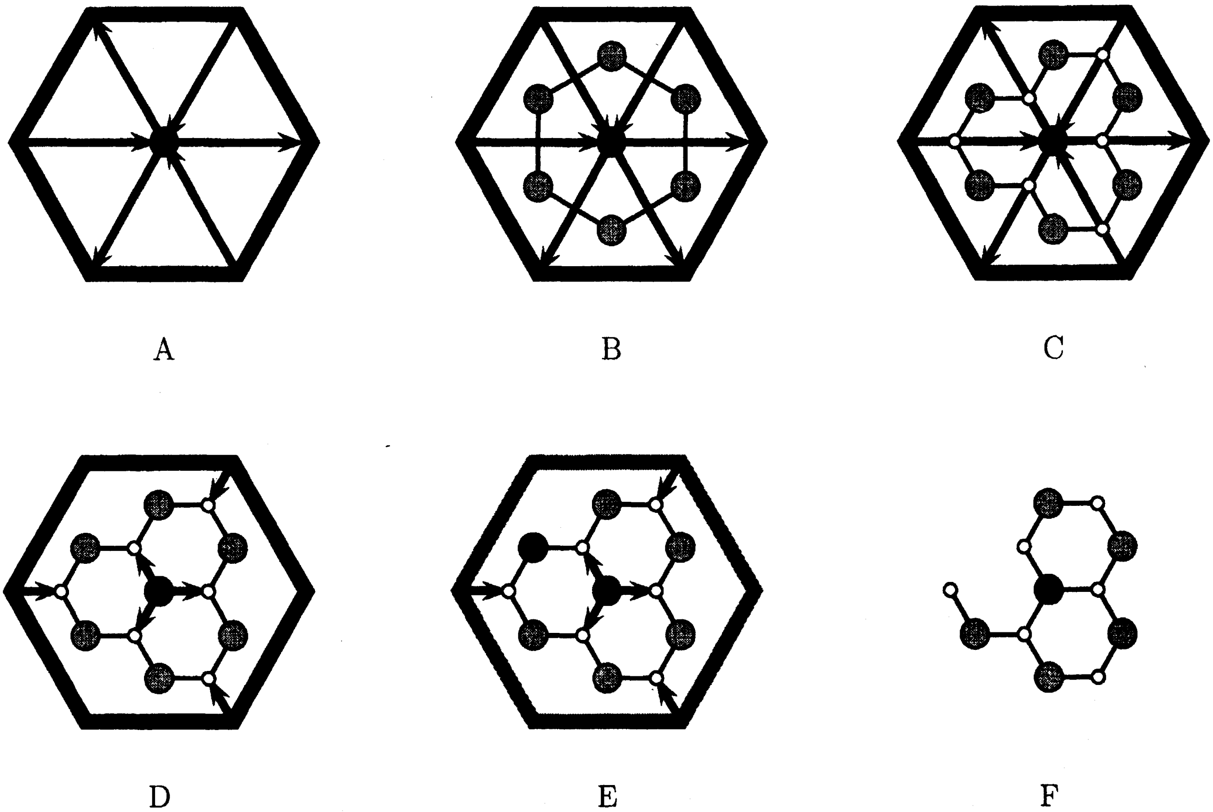


図 5: $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ を誘導する

この対応 (Temperley bijection) をもう少し小さな例を用いて説明する。まず、$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ を誘導するにはまず、もとのグラフ G(図 5:A) の双対グラフ $\bar{G}$ を G に重ねて描き (図 5:B)、G と $\bar{G}$ の辺の交点に新たに頂点をおく。また、正六角形を作るために双対グラフの辺を折り曲げる (図 5:C)。G の辺と $\bar{G}$ の辺の交点で G の辺をきりとる (図 5:D)。外周の頂点と外周頂点に隣接する左上部の頂点 $\bar{r}$、及び、それらに隣接する辺をすべて削除すると $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ ができ上がる。

図6は $\mathcal{G}$ の全域木と $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ の完全マッチングの対応を示したものである。$\mathcal{G}$ の全域木 T を一つ選ぶと、$\bar{r}$ を根とし T と交わらない $\bar{G}$ の全域木 $\bar{T}$ が唯一つ定まる。T と $\bar{T}$ に対して、$\mathcal{H}(\mathcal{G})$ の完全マッチング M を次のように選ぶ : T の辺 e が G の頂点 v_s から出発して $\bar{G}$ の辺を横切る点を v_t とし、$\mathcal{H}(\mathcal{G})$ の辺 v_sv_t を M の要素とする。$\bar{T}$ の各辺 $\bar{e}$ についても同様の操作を行うと $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ の完全マッチングが得られる。

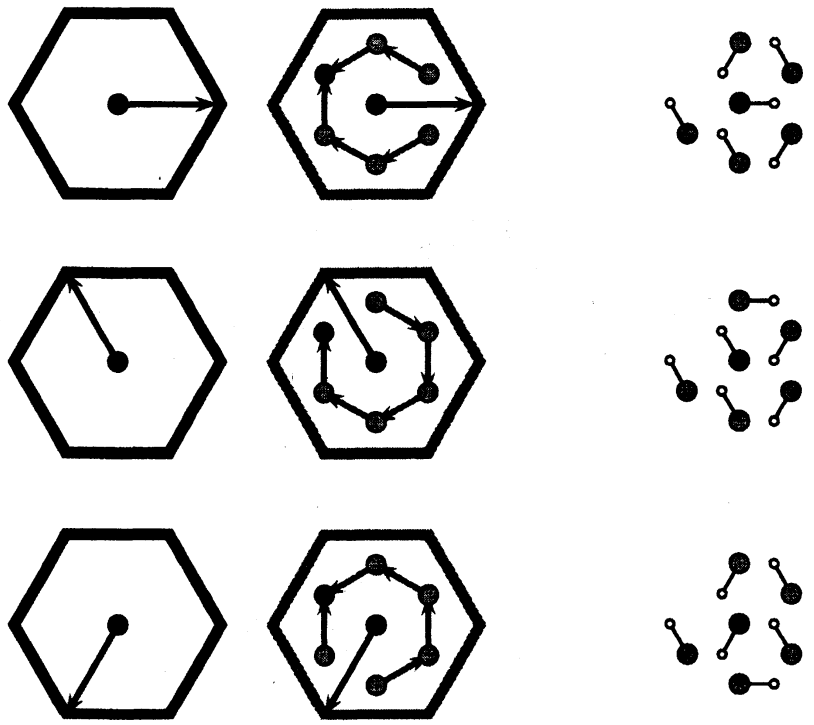


図 6: $\mathcal{G}$ の全域木と $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ の完全マッチング

3 数値シミュレーション

高速にグラフの全域木全体から uniform sampling を行う Wilson[3] のアルゴリズムがあり、この対応を用いて、上述のグラフの完全マッチング、つまりある領域を埋める lozenges tiling 全体の集合からランダムサンプリングを高速に行うことができる。

図 7 は上述の Temperley bijection を用いて生成したタイル貼りの絵である。一辺 300 程度の正六角形の中央付近を切りぬいたものである。図中の六角形は例 1 で計算したパターンで、全体で 1586 個ある。タイルの総数が 11073 個でその比率は 1586/11073=0.1432 で、例 1 で計算した結果とほぼ一致する。

参考文献

[1] R. Kenyon. Local statistics of lattice dimers. *Ann. IHP Prob. Stat. 33, 591–618.*, 1997.

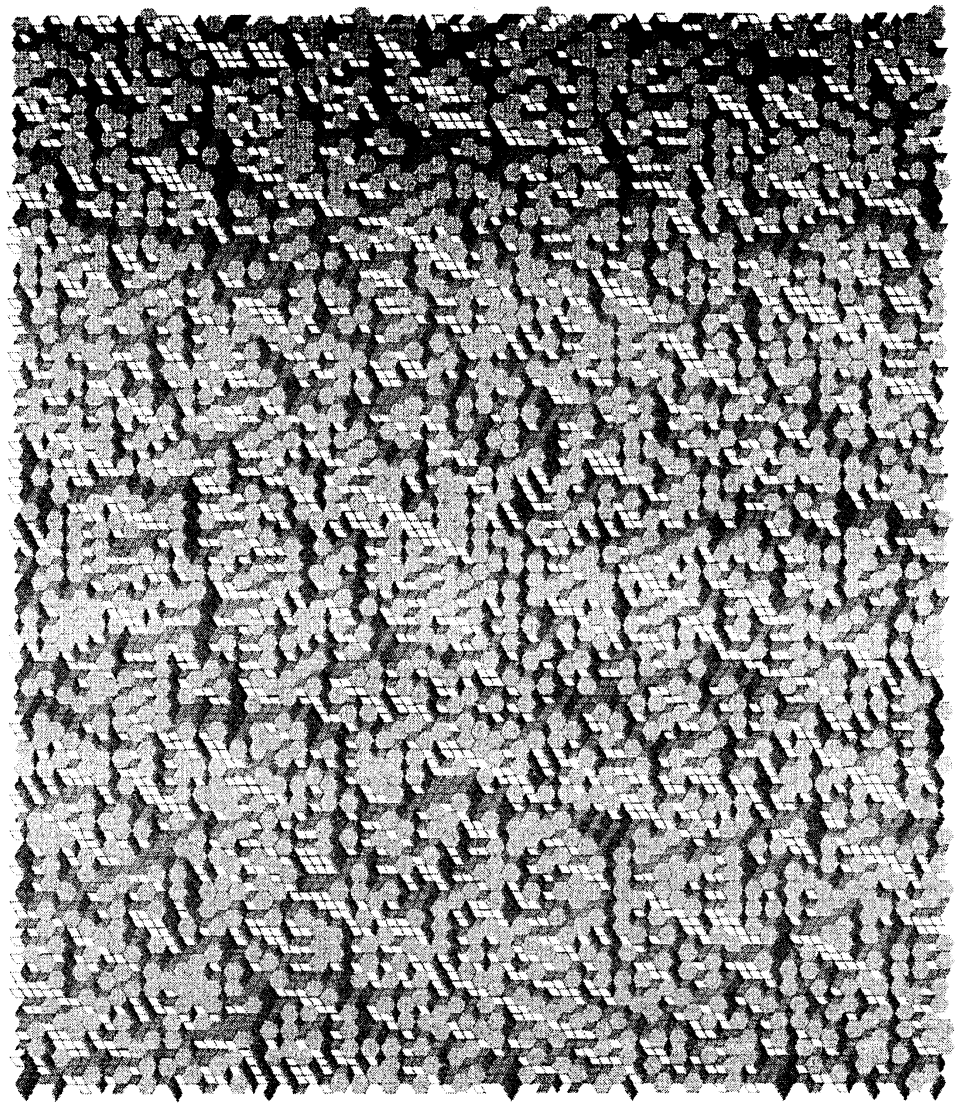


図 7: 数値シミュレーションの結果

[2] R. Kenyon, J. Propp, and D. Wilson. Trees and matchings. *Elec. J. Combinatorics*, Vol. 7, , 2000.

[3] J. Propp and D. Wilson. How to get a perfectly random sample from a generic markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph. *J.Algorithms*, Vol. 27, pp. 170–217, 1998.