数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 37-58

量子化戸田格子の幾何学

池田　薫 (Kaoru Ikeda)
慶應義塾大学・経済学部
Keio University Hiyoshi Campus

January 28, 2004

次のような指数関数的な相互作用を及ぼしあう無限個の質点系を戸田格子という。

$$\ddot{q}_i = e^{q_{i+1}-q_i} - e^{q_i-q_{i-1}}, \quad i \in \mathbf{Z}$$

ここで $q_0 \to \infty$, $q_{n+1} \to -\infty$ とすることにより戸田格子はつぎの自由端の有限可積分系に帰着する（右から順に番号が増えるように粒子が並んでいると考えていただきたい)。

$$(*) \qquad \begin{cases} \ddot{q}_1 = e^{q_2-q_1} \\ \ddot{q}_i = e^{q_{i+1}-q_i} - e^{q_i-q_{i-1}} & 2 \le i \le n-1 \\ \ddot{q}_n = -e^{q_n-q_{n-1}} \end{cases}$$

今回は (*) の量子化を考える。本講究録では古典的戸田格子および量子化された戸田格子のそれぞれの背後にある幾何学について考察していく。内容について大まかに説明しよう。まず §1 では古典的戸田格子の幾何学を扱う。従来戸田格子に関連する幾何学的対象物として固有値が一定の対称３重対角行列であるところのラックス行列が扱われてきた [C-K],[T]。ラックス行列を対角化したときその成分が一定という方程式で定義される曲面を幾何学的な対象物として考えたのである。しかしこの曲面を論じるには固有値の並べ替えにより対称群の位数の数だけ同等な曲面を扱わなければならない。本稿では３重対角行列ではないいわゆる full 戸田格子のラックス行列を扱った。このラックス行列はユニポテント群（対角成分が１の下三角行列）の Adjoint 作用で標準形に変形でき、この標準形に対称群の作用する余地はない。本稿での幾何学的対象物はこの標準形の成分が一定という方程式で定義された曲面である。この曲面を本稿では（full 戸田格子の）等位集合と呼ぶ。この等位集合の定義には対称群はあらわれない。しかしこの等位集合をコンパクト化する際に対称群は自然にあらわれる。戸田格子はリー群のブリュワー分解により解が得られるため旗多様体は戸田格子の解のモヂュライ空間とみなされる。一方戸田格子は等位集合上の軌道であるから等位集合の各点をラックス行

列の初期値とみなすとやはり戸田格子の解のモヂュライ空間とみなせる。このことから戸田格子の等位集合と旗多様体が同相であることが期待される。実際 [T] では対称３重対角行列の等位集合の位相的性質が研究されているし、[C-K] では full ではない戸田格子の等位集合が旗多様体の中の実のトーリック部分多様体であることが示されている。本稿では full の戸田格子の等位集合が旗多様体と同相であることを微分幾何学的な手法を使い証明した。この手法は §2 で述べる量子化のプロセスに自然に拡張できる。その手順を手短に述べよう。我々はコンパクト化した full 戸田格子の等位集合上でラックス行列の固有ベクトルをファイバーとするファイバー束を考える。これはベクトル束ではない。直感的にいうと各ファイバーは等位集合の点上に錐状に広がっている。この錐の軸を集めることにより等位集合上に複素直線束を構成できる。そしてこの複素直線束より定義される 1-st チャーン類より等位集合のコホモロジー環が計算できる。等位集合から旗多様体へは自然な対応が定義できるがこの対応は２つの多様体のコホモロジー環の同型をあたえ、２つの多様体の同相を導く。この結果の応用としてブリュワー分解で得られた解が属する旗多様体のセルのラックス行列の初期値によるパラメーター付けが得られた。§2 は量子化戸田格子に伴う幾何学への試みといったほうがよいであろう。議論のなかで数学的に rigid でない点が多々あることを認めなくてはならない。[G],[G-K] により戸田格子のラックス行列の正準量子化が定義されその特性多項式の係数として量子化戸田格子の保存量が定義された。本稿では §1 の手法を踏襲し量子化されたラックス行列の固有ベクトルを考えた。興味深いことは古典論で固有ベクトルの錐状のファイバーの軸にあたるものが量子化のもとでは量子化された戸田格子の保存量たちの同時固有関数になっていることである。古典論の錐の軸にあたるものが何かさらに考えてみよう。full でない通常の戸田格子の等位集合を考えよう。この等位集合の上でフーリエ積分を考えることにより同時固有関数を構成することができる。この解の積分核は等位集合の一点を台とするデルタ関数である。本稿ではこのデルタ関数が古典論での直線束のファイバーの量子化であるという観点に立って議論を進めていく。

研究集会「組み合わせ論的表現論の諸相」において発表の機会を与えてくださった研究代表者　山根　宏之氏に感謝の意を表します。この研究は慶應義塾大学２１世紀 COE「統合数理科学：現象解明を通した数学の発展」の支援に基づいて行われています。

1 戸田格子の等位集合上の複素直線束の構成について

先ず最初に記号を定義する。$G=GL(n,\mathbb{C})$, $B\subset G$ を上三角のボレル群、$N\subset B$ をボレル群 B の部分群で対角成分がすべて1のものとする。さらに $H\subset G$ を対角行列のなすカルタン部分群とする。さらに $\bar{B},\bar{N}$ をそれぞれ B,N の下三角の対応物とする。$n\times n$ 行列

$$L=\begin{pmatrix} L_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots\dots & \vdots & \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix}$$

に関する方程式

$$\dot{L}=[L_+,L], \tag{1.1}$$

ただし L_+ は L の上三角部分への射影、を full 戸田格子という。上の形の行列 L を full 戸田格子のラックス行列という。以下 full 戸田格子のことも単に戸田格子と呼ぼう。L_0 を上の形のラックス行列で定数として固定する。$W_\infty(t)\in\bar{N}$ と $W_0(t)\in B$ が分解

$$W_\infty(t)^{-1}W_0(t)=e^{tL_0} \tag{1.2}$$

をみたすとする。このとき簡単な計算から $L(t)=W_\infty(t)L_0W_\infty(t)^{-1}$ は (1.1) の解となっていることがわかる。(1.2) より $e^{tL_0}\in G$ は戸田格子の解をパラメトライズしていることがわかる。しかし実際には旗多様体の点 $[e^{tL_0}]\in G/B$ でパラメトライズされていると考えたほうが自然である（ここで $g\in G$ にたいして $[g]$ で g が属する G/B での同値類とする)。実際 (1.2) では

$$(W_\infty(t)e^{tL_0})_-=0$$

で $W_\infty(t)$ よって $L(t)$ が定まるが $U\in B$ として $e^{tL_0}U$ にたいしてあらためて分解

$$W'_\infty(t)^{-1}W'_0(t)=e^{tL_0}U$$

を考えても

$$(W'_\infty(t)e^{tL_0})_-=(W'_0(t)U^{-1})_-=0$$

となり同じ解を得るからである。n 次対称群を $\mathcal{S}_n$ とし $\sigma\in\mathcal{S}_n$ としたときその行列表示も σ と書くことにする。G はブリュワー分解 $G=\sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\bar{N}\sigma B$ を持つ。それにともない旗多様体 $X:=G/B$ もセル分割

$$X=\sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\bar{N}\sigma B/B$$

を持つ。$X_\sigma = \bar{N}\sigma B/B$ とする。今 $\leq$ を $\mathcal{S}_n$ 内のブリュワー順序とすると $\bar{X}_\sigma = \sqcup_{\sigma\leq\tau} X_\tau$ が従う。

注意　$X = \sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} B\sigma B/B$ の形のブリューワー分解はよく知られている。今 $\sigma_0 \in \mathcal{S}_n$ を最大の長さの元とする。

$$G = \sigma_0 G = \sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \sigma_0 B\sigma B$$

$B = HN = NH$ より

$$= \sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \sigma_0 N\sigma\sigma^{-1}H\sigma B$$

$\sigma^{-1}H\sigma = H$ で $HB = B$ より

$$= \sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \sigma_0 N\sigma B = \sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \sigma_0 N\sigma_0^{-1}(\sigma_0\sigma)B$$

$\sigma_0 N\sigma_0^{-1} = \bar{N}$ より

$$= \sqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \bar{N}(\sigma_0\sigma)B$$

となる。$B\sigma B \simeq \sigma_0 B\sigma B$ より $B\sigma B \simeq \bar{N}(\sigma_0\sigma)B$ である。$\tau = \sigma_0\sigma$ とすると σ と τ ではブリュワー順序は逆転している。

X_{id} を X_ϕ と書こう。任意の $\sigma \in \mathcal{S}_n$ に対して $id \leq \sigma$ なので $\bar{X}_\phi = X$ が成り立つ。X のセル分割に対応する $\bar{X}_\phi$ のセル分解を考える。任意の $\sigma \in \mathcal{S}_n$ に対して $\sigma^{-1} : G \simeq G, g \mapsto \sigma^{-1}g$ は位相空間としての同相写像を与えるので $\bar{N}\sigma B$ を G の部分位相空間と考えると $\sigma^{-1}(\bar{N}\sigma B) \simeq \bar{N}\sigma B$. つぎの和集合による $\bar{X}_\phi$ の分解を考えよう（直和とはかぎらない）。

$$\bar{X}_\phi = \cup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (\sigma^{-1}\bar{N}\sigma B \cap \bar{N}B)/B \tag{1.3}$$

一方 ∂A で A の境界をあらわすと

$$\partial(\sigma^{-1}\bar{N}\sigma B \cap \bar{N}B) = (\sigma^{-1}\bar{N}\sigma \cap \bar{N})B$$

より $\bar{X}_\phi$ を旗多様体と見たときの $\sigma \in \mathcal{S}_n$ に対応するセルは

$$\{[W] | W = (w_{i,j}) \in \bar{N}, w_{i,j} = 0, i > j, \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)\}$$

となる。さてこの § では戸田格子の等位集合上にラックス行列の固有ベクトルにより構成される複素直線束を定義し等位集合と旗多様体が位相同型であることを見ていくが、この応用としてつぎの問題の解答が得られる。

問題 1　$W_\infty(t)^{-1}W_0(t) = e^{tL_0}$,　$W_\infty(t) \in \bar{N}, W_0(t) \in B$ で L_0 は定数のラックス行列とする。このとき上の分解から $[W_\infty(t)]$ は $\bar{X}_\phi$ の元とみなせるが、旗多様体 $\bar{X}_\phi$ の $[W_\infty(t)]$ が $\sigma \neq id$ のセルに入っているような分解は存在するか。

$[e^{L_0}] \mapsto [e^{tL_0}]$ は解析的な同相写像だから $t = 1$ のときに問題を考えればよい。すなわち

問題2　L_0 を任意のラックス行列とする。$W_\infty^{-1}W_0 = e^{L_0}$、もちろん $W_\infty \in \bar{N}, W_0 \in B$ である、としたとき $[W_\infty]$ が旗多様体 $\bar{X}_\phi$ のどのセルに入っているか L_0 によりパラメトライズできるか。

という問題に帰着される。次に戸田格子の等位集合を定義しそれが旗多様体と同相ならば問題2の解答が得られることを説明しよう。ラックス行列の集合 V を

$$V := \{L = \begin{pmatrix} L_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \dots & \vdots & \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix} | L_{i,j} \in \mathbb{C}\}$$

とする。任意の $L \in V$ にたいしある $W \in \bar{N}$ が一意的に存在し

$$W^{-1}LW = \begin{pmatrix} \varphi_1(L) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_2(L) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \vdots & \\ \varphi_n(L) & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\varphi_i(L) \in \mathbb{C}[L]^{\bar{N}}, i = 1, \dots, n$ すなわち $Ad\bar{N}$ 不変の $L \in V$ の成分に関する多項式。$m = {}^t(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{C}^n$ にたいし代数多様体 S_m を

$$S_m := \{p \in \mathbb{C}^{n(n+1)/2} | \varphi_i(p) = m_i, i = 1, \dots, n\}$$

で定義する。これを戸田格子の等位集合という。この S_m に無限遠点を付け加えてできるコンパクト化を $\bar{S}_m$ とする。このコンパクト化については後に詳述する。この§では以下の定理を証明する。

定理 $\bar{S}_m$ と旗多様体 $\bar{X}_\phi (\simeq G/B)$ は位相同型である。

この定理を認めよう。今 $\bar{S}_m$ から V への埋め込み ι を

$$(1.4) \qquad \iota(p) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & 1 & 0 \dots & 0 & \\ p_{2,1} & p_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \dots & \dots & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

で定義する。さらに V から G への埋め込みを $L \mapsto e^L$ で定義する。この二つを合成することにより $\bar{S}_m$ から旗多様体への埋め込み $p \mapsto [e^{L(p)}]$ が得られる。一方上の定理より $\bar{S}_m \simeq G/B$ だから上記埋め込みは同相写像となり特に $\bar{S}_m$ 上の点 p で $[e^{L(p)}]$ の点が旗多様体のどのセルにあるのかがパラメトライズできる。なお旗多様体と戸田格子の有理解についてはFlaschkaとHaineにより、ある $L_0 \in V$ をとると初期値を L_0 とする戸田格子の解は有限時間内に極を持ち、その解はブ

リュワー分解において ϕ 以外のセルに属すことが示された。またそのようなことが起こるセルが具体的に列挙された [F-H]。今回の結果では $\bar{S}_m$ の一番大きいセルの点を初期値としたときそれが戸田格子のフローに沿って有限時間内に他のセルに移るか否かについては言及していない。

さて定理を証明しよう。等位集合 S_m は前に定義したとおりである。$p \in S_m$ に対して $L(p)$ を (1.4) の右辺で定義する。今 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を $L(p)$ の固有値としよう。$\lambda_i = \lambda_i(m), i = 1, \ldots, n$ より $L(p)$ の固有値は S_m 上一定である。よって m に $i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ という条件を仮定する。

補題 1.1 $L(p)\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi}$ で $\vec{\psi} = {}^t(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ としたとき

$$\psi_i = \det(\lambda - L(p))_{i-1}\psi_1, \ i \geq 2$$

が成り立つ。ここで $\det(\lambda - L(p))_i$ は $\lambda - L(p)$ の i 次 principal minor determinant。

証明 $(\lambda - L)\vec{\psi} = 0$ より

$$\begin{pmatrix} \lambda - L_{1,1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -L_{i-1,1} & \ldots & \ldots & \lambda - L_{i-1,i-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_i \end{pmatrix} = 0$$

これより

$$\begin{pmatrix} \lambda - L_{1,1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -L_{i-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda - L_{i-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_i \end{pmatrix}$$

クラーメルの公式を使うと

$$\psi_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda - L_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \psi_i & \ldots & \ldots & \lambda - L_{i-1,i-1} \end{vmatrix} / \det(\lambda - L)_{i-1}$$

1 列目を最終列に置き換えると

$$= (-1)^{i-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & \ldots \\ * & -1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \ldots & \ldots & \psi_i \end{vmatrix} / \det(\lambda - L)_{i-1}$$

$$= (-1)^{i-2}(-1)^{i-2}\psi_i / \det(\lambda - L)_{i-1}$$

これより $\psi_i \doteq \det(\lambda - L)_{i-1}\psi_1$ が従う。（証明終わり）

$\vec{\psi}_1(p),\ldots,\vec{\psi}_n(p)$ を $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ に対応する $L(p)$ の固有ベクトルとする。$\Xi(p) = [\vec{\psi}_1(p),\ldots,\vec{\psi}_n(p)]$ を固有ベクトルを並べて出来る行列とする。補題 1 より固有ベクトルの各成分はラックス行列の成分、すなわち p の座標の多項式になっている。すなわち $\vec{\psi}_i(p) = {}^t(\psi_1^i(p),\ldots,\psi_n^i(p))$ としたとき $\psi_\mu^i(p) = \det(\lambda_i - L(p))_{\mu-1}\psi_1^i(p)$ となる。今 S_m の無限遠点の集合 $S_m(\infty,\sigma)$ を $\hat{p}\in S_m(\infty,\sigma)$ としたとき $p\to\hat{p}$ のとき $\Xi(p)$ の各行は一行目から順に $\sigma(1),\ldots,\sigma(n)$ のオーダーで無限大に発散するものとする。こうして定義した無限遠点を添加してできる S_m のコンパクト化を $\bar{S}_m$ と書く。$\bar{S}_m$ の座標近傍 $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{S}_n}$ をつぎをみたすようにさだめよう。(i)$\bar{S}_m = \cup_{\sigma\in\mathcal{S}_n}U_\sigma$, (ii) $U_\sigma \supset S_m(\infty,\sigma)$, (iii)$\sigma<\tau$ ならば $\bar{U}_\sigma\supset U_\tau$ で $\bar{U}_\sigma\neq U_\tau$。座標の変換則は $p\in U_\sigma\cap U_\tau$ で U_σ 上で $p=p_\sigma$、U_τ 上で $p=p_\tau$ とすると

$$\Xi(p_\sigma) = \sigma\tau^{-1}\Xi(p_\tau)\tau\sigma^{-1}$$

となるものとする。これからこの座標近傍の上に複素直線束を定義しそれらを張りわせて $\bar{S}_m$ 上の複素直線束を構成しよう。今ひとつの座標近傍 U_σ を任意にとり固定する。簡単のためこれを U と略記する。以後この U 上に種々のファイバー束を定義するが本来ならそれぞれに σ を明記しなくてはならないが簡単のために略記する。必要なときは明記する。$p\in U_\sigma$ 上のファイバー $\mathcal{L}_p(\mathcal{L}_p^\sigma)$ を

$$\mathcal{L}_p := \{W^{-1}L(p)W \mid W\in\bar{N}\}$$

で定義し U 上のファイバー束 $\mathcal{B}(\mathcal{B}^\sigma)$ を $\mathcal{B} = \cup_{p\in U}\mathcal{L}_p$ で定義する。明らかに $\mathcal{B}$ は U 上の主 $\bar{N}$ 束である。さらに $p\in U$ 上の固有ベクトルのファイバー $\mathcal{K}_p^i(\mathcal{K}_p^{i,\sigma})$, $i=1,\ldots,n$ を

$$\mathcal{K}_p^i := \{\vec{\psi}_i \mid L\vec{\psi}_i = \lambda_i\vec{\psi}_i, \text{for } {}^\exists L\in\mathcal{L}_p\}$$

で定義し U 上のファイバー束 $\mathcal{C}^i(\mathcal{C}^{i,\sigma})$, $i=1,\ldots,n$ を $\mathcal{C}^i = \cup_{p\in U}\mathcal{K}_p^i$ で定義する。これら n 本のファイバー束をまとめて考えよう。$\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ とする。$p\in U$ 上のファイバー $\mathcal{K}_p(\mathcal{K}_p^\sigma)$ を

$$\mathcal{K}_p = \{\Xi\in G \mid L\Xi = \Xi\lambda \text{ for } {}^\exists L\in\mathcal{L}_p\}$$

で定義し U 上のファイバー束 $\mathcal{C}(\mathcal{C}^\sigma)$ を $\mathcal{C} = \cup_{p\in U}\mathcal{K}_p$ で定義する。

命題 1.2　$\mathcal{C}$ は U 上の主 $\bar{B}$ 束である。

証明　先ず $\mathcal{K}_p \simeq \{p\}\times\bar{B}$ を示す。前に述べた $\Xi(p)$ は $L(p)\Xi(p) = \Xi(p)\lambda$ より $\Xi(p)\in\mathcal{K}_p$ である。任意の $L\in\mathcal{L}_p$ にたいして一意的にある $W\in\bar{N}$ が存在して $L = W^{-1}L(p)W$ となる。よって $L\Xi = \Xi\lambda$ とすると $W^{-1}L(p)W\Xi = \Xi\lambda$。これから

$$L(p)W\Xi = W\Xi\lambda \tag{1.5}$$

を得る。$\Xi(p)$ は $L(p)$ の固有ベクトル $\vec{\psi}_1(p),\ldots,\vec{\psi}_n(p)$ を並べてできた行列であった。一方 (1.5) より $\Xi=[\vec{\psi}_1,\ldots,\vec{\psi}_n]$ とすると各 i について $\vec{\psi}_i$ も λ_i の固有ベクトルになっている。よって各 i についてある $h_i\neq 0$ が存在して $\vec{\psi}_i(p)=\vec{\psi}_i h_i$ となる。よって $h=\mathrm{diag}(h_1,\ldots,h_n)$ とすると $W\Xi h=\Xi(p)$ が成り立つ。$\bar{B}$ は H と $\bar{N}$ の半直積だから $\mathcal{K}_p\simeq\{p\}\times\bar{B}$ が成り立つ。次に $\bar{B}$ が $\mathcal{K}_p$ に右から作用していることを示す。$b\in\bar{B}$ とすると $b=hn,\ h\in H, n\in\bar{N}$ とかけるから先ず $\Xi(p)\cdot b:=n^{-1}\Xi(p)h$ で定義する。任意の $\Xi\in\mathcal{K}_p$ に対して一意的に $n_0\in\bar{N}$ と $h_0\in H$ が存在し $\Xi=n_0^{-1}\Xi(p)h_0$ とかける。よって $\Xi\cdot b:=n^{-1}h^{-1}n_0^{-1}h\Xi(p)h_0h$ により一般の Ξ への $b\in\bar{B}$ の右からの作用を定義する。今 $b_1,b_2\in\bar{B}$ とし $b_i=h_in_i,\ h_i\in H, n_i\in\bar{N}, i=1,2$ とする。定義より

$$\Xi(p)\cdot(b_1b_2)=\Xi(p)\cdot(h_1n_1h_2n_2)=\Xi(p)(h_1h_2h_2^{-1}n_1h_2n_2)$$

$$=n_2^{-1}(h_2^{-1}n_1h_2)\Xi(p)(h_1h_2)=(n_1^{-1}\Xi(p)h_1)\cdot b_2=(\Xi(p)\cdot b_1)\cdot b_2$$

となる。さて Ξ を $\mathcal{K}_p$ の一般の元とすると $\Xi=\Xi(p)\cdot b_0$ となる $b_0\in\bar{B}$ が存在する。$\Xi(p)$ への作用に関しては結合則が示せたから

$$\Xi\cdot(b_1b_2)=(\Xi(p)\cdot b_0)\cdot(b_1b_2)=\Xi(p)\cdot(b_0(b_1b_2))$$

$$=\Xi(p)\cdot((b_0b_1)b_2)=(\Xi(p)\cdot(b_0b_1))\cdot b_2=((\Xi(p)\cdot b_0)\cdot b_1)\cdot b_2$$

$$=(\Xi\cdot b_1)\cdot b_2$$

となる。(証明終わり)

補題 1.1 より固有ベクトルのファイバー $\mathcal{K}^i$ はそのベクトルの第一成分を軸とする錐とみなせる。この n 本の錐の軸を集めて U 上に複素直線束を構成しよう。具体的に述べよう。$\Xi(p)=[\vec{\psi}_1(p),\ldots,\vec{\psi}_n(p)]$ で $\vec{\psi}_i(p)={}^t(\psi_1^i(p),\ldots,\psi_n^i(p))$ とする。$E_{i,j}$ を i,j 行列単位として $e_i(p):=\psi_1^i(p)E_{1,i}$ として U 上の複素直線束 $\mathcal{E}^i(\mathcal{E}^{i,\sigma})$ を $\mathcal{E}^i:=\cup_{p\in U}\mathbb{C}e_i(p)$ で定義する。さらに $\mathcal{E}(\mathcal{E}^\sigma):=\oplus_{i=1}^n\mathcal{E}^i$ とする。

命題 1.3 $\mathcal{E}$ は U 上の主 H 束である。

証明　U 上のファイバー束の morphism $\rho:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ を $\Xi=[\vec{\psi}_1,\ldots,\vec{\psi}_n]$ で $\vec{\psi}_i$ の第一成分を ψ_1^i とすると $\rho(\Xi)=\sum_{i=1}^n\psi_1^ie_i(p)$ で定義する。命題 1.2 より $\mathcal{C}$ は主 $\bar{B}$ 束であった。$R_{\bar{B}}$ を命題 1.2 における $\mathcal{C}$ への $\bar{B}$ の右からの作用とする。$\rho_*R_{\bar{B}}$ を ρ に誘導された $\bar{B}$ の $\mathcal{E}$ への右からの作用とすると下の図式の可換性より $\mathcal{E}$ が主 $\bar{B}$ 束であることがわかる。一方 $\rho_*R_{\bar{B}}$ において $\bar{N}$ の作用は 1 に退化しているから $\mathcal{E}$ は U 上の主 H 束である。(証明終わり)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_m \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "R_{\bar{B}}"] & \mathcal{E}_m \arrow[d, "\rho_*R_{\bar{B}}"] \\
\mathcal{C}_m \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{E}_m
\end{tikzcd}$$

以上定義した U_σ 上の複素直線束 $\mathcal{E}^\sigma$ を張り合わせ $\bar{S}_m$ の上の直線束を構成しよう。$h(p) \in \Gamma(\bar{S}_m, H)$ とし $p \in U_\sigma \cap U_\tau$ とする。U_σ 上 $p = p_\sigma$ で U_τ 上 $p = p_\tau$ とする。前に定義した $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{S}_n}$ 達の座標の変換則から $\xi = \sigma\tau^{-1}$ とすると

$$\Xi(p_\sigma)h(p_\sigma) = \xi\Xi(p_\tau)h(p_\tau)\xi^{-1} = \xi\Xi(p_\tau)\xi^{-1}\xi h(p_\tau)\xi^{-1}$$

となり $\Xi(p_\sigma) = \xi\Xi(p_\tau)\xi^{-1}$ より $h(p_\sigma) = \xi h(p_\tau)\xi^{-1}$ となる。今 $\mathcal{S}_n$ と H の半直積 $\mathcal{S}_n\dot{\times}H$ を

$$\{\sigma h\sigma^{-1} | \sigma \in \mathcal{S}_n, h \in H\}$$

で定義する。$\mathcal{S}_n\dot{\times}H$ は積に関して閉じている。実際

$$\sigma h_1\sigma^{-1}\tau h_2\tau^{-1} = \sigma\tau(\tau^{-1}h_1\tau)((\tau^{-1}\sigma\tau)^{-1}h_2(\tau^{-1}\sigma\tau))\tau^{-1}\sigma^{-1}$$

で一般に任意の $\sigma \in \mathcal{S}_n$ と $h \in H$ に対して $\sigma h\sigma^{-1} \in H$ より。$\bar{S}_m$ 上の複素直線束 $\mathcal{E}^i$ を $\mathcal{E}^i|_{U_\sigma} = \mathcal{E}^{\sigma(i),\sigma}$ により定義し $\mathcal{E} = \oplus_{i=1}^n\mathcal{E}^i$ と定義する。$\mathcal{E}$ は主 $\mathcal{S}_n\dot{\times}H$ 束だからその接続形式は $\sigma dh(p)\sigma^{-1}$ という形をしている。ここで $\sigma \in \mathcal{S}_n$ とし $dh \in \mathcal{H} \otimes \Omega^1(\bar{S}_m)$ で $\mathcal{H}$ は H のリー環とする。よってその曲率形式を R とすると

$$R = d(\sigma dh(p)\sigma^{-1}) + (\sigma dh(p)\sigma^{-1}) \wedge (\sigma dh(p)\sigma^{-1})$$

$$= \sigma d(dh(p))\sigma^{-1} + \sigma dh(p) \wedge dh(p)\sigma^{-1} = 0$$

となる。一方 $c_1^i(\mathcal{E}), i = 1, \ldots, n$ を複素直線束 $\mathcal{E}^i$ で定義された 1-st チャーン類としよう。$\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}^i$ 達の直和だから

$$\det(1 + R/2\pi i) = 1 = \Pi_{j=1}^n(1 + c_1^j(\mathcal{E}/2\pi i)$$

より

$$\sum_{i_1<\ldots i_k} c_1^{i_1}(\mathcal{E})\cdots c_1^{i_k}(\mathcal{E}) = 0,\ k = 1, \ldots, n$$

が従う。以上より $x_1, \ldots, x_n$ を不定元とすると代数同型

(1.6) $$H^*(\bar{S}_m, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/ < \sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x) >$$

となる。ここで $\sigma_i(x)$ は x にかんする i 次基本対称式。次に $\bar{S}_m$ から旗多様体 X への対応を考えよう。先ず二つの多様体は同じ次元を持つ。実際

$$\dim \bar{S}_m = n(n+1)/2 - n = n(n-1)/2 = n^2 - n(n+1)/2 = \dim X$$

より。X の点は $\mathbb{C}^n$ の部分空間の列であらわせる。前に U_σ 上にファイバー束 $\mathcal{C}^{i,\sigma}$ を構成した。直線束 $\mathcal{E}^i$ の定義より $\mathcal{C}^{i,\sigma}$ を張り合わせて $\bar{S}_m$ 上のファイバー束 $\mathcal{C}^i$ を定義できる。変換則は $p \in U_\sigma \cap U_\tau$ で U_σ 上 $p = p_\sigma$、U_τ 上 $p = p_\sigma$ とすると $\vec{\psi}_i(p_\sigma) = \vec{\psi}_{\xi(i)}(p_\tau)$ である。ここで $\xi = \sigma\tau^{-1}$ である。

$\theta : \bar{S}_m \to X$ を

$$\theta(p) :=< \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}\vec{\psi}_i(p) \supset \cdots \supset \mathbb{C}\vec{\psi}_1(p) >$$

で定義する。$\xi =< V_n \supset \cdots \supset V_1 > \in X$ としたとき $V_i/V_{i-1} := \mathbb{C}f_i(\xi)$ とする。X 上の複素直線束を $\mathcal{F}^i = \cup_{\xi \in X} \mathbb{C}f_i(\xi)$ で定義し $\mathcal{F} = \oplus_{i=1}^{n} \mathcal{F}^i$ とする。θ より誘導される、すなわち下の図式が可換になる $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への morophism を $\hat{\theta}$ とかく。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\hat{\theta}} & \mathcal{F} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\bar{S}_m}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ \bar{S}_m & \xrightarrow{\theta} & X \end{array}$$

ここで π_* はそれぞれファイバー空間から底空間への射影である。明らかに $\hat{\theta}^*(c_1^i(\mathcal{F})) = c_1^i(\mathcal{E}), i = 1, \ldots, n$ であるから (1.6) と旗多様体のよく知られたコホモロジー環の関係式より代数同型

$$\hat{\theta}^* : H^*(\bar{S}_m, \mathbb{C}) \simeq H^*(X, \mathbb{C})$$

を得る。コホモロジー環は多様体の位相的性質で決まるから。$\bar{S}_m$ が旗多様体 X と位相同型であることがわかった。(定理の証明終わり)

2 戸田格子の量子化と量子化コホモロジー

2.1 フーリエ積分とその双対について

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の急減少関数の空間とする。$P = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ を $P = (q, p)$ と略記する。フーリエ積分の空間を

$$S(\mathbb{R}^{2n}) := \{\int_{P \in \mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP | a(P) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})\}$$

で定義する。$b(P) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ に対して $S(\mathbb{R}^{2n})$ の双対 $T_b \in S(\mathbb{R}^{2n})'$ を

$$T_b(\int_{P \in \mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP) = \int_{P \in \mathbf{R}^{2n}} a(P)b(P)e^{ipq}dP$$

で定義する。この T_b の積分表示を考えよう。そのために δ 関数のみたすつぎの性質を用いる。

(i) $$\int_{x \in \mathbf{R}^n} f(x)\delta(x - q)dx = f(q)$$

(ii) $$\int_{P,Q \in \mathbf{R}^{2n}} \delta(P - Q)f(P)g(Q)dPdQ = \int_{P \in \mathbf{R}^{2n}} f(P)g(P)dP$$

上記 (i),(ii) より

$$T_b(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP) = \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)b(P)e^{ipq}dP$$

$$= \int_{P,P'\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)b(P')e^{ipq'}\delta(P-P')dPdP'$$

$$= \int_{P,P'\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)b(P')\delta(P-P')\{\int_{x\in\mathbf{R}^n} e^{ipx}\delta(x-q')dx\}dPdP'$$

$$\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)\int_{x\in\mathbf{R}^n} e^{ipx}\{\int_{P'\in\mathbf{R}^{2n}} b(P')\delta(P-P')\otimes\delta(x-q')dP'\}dxdP$$

以上より T_b は積分表示

$$T_b = \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} b(P')\delta(P-P')\otimes\delta(x-q')dP'$$

を持つ。フーリエ積分についての二つの性質

(a) $$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP = \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} (ip_j)a(P)e^{ipx}dP$$

(b) $$e^{ip'x}\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP = \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{i(p+p')x}dP$$

に注意する。一方双対の定義から T_b への $\partial/\partial x_j$、 e^{ipx} の作用は $\partial_j = \partial/\partial x_j$ とすると

(a') $$(\partial_j T_b)(\int a(P)e^{ipx}dP) = T_b(-\partial_j \int a(P)e^{ipx}dP)$$

(b') $$(e^{ip'x}T_b)(\int a(P)e^{ipx}dP) = T_b(e^{ip'x}\int a(P)e^{ipx}dP)$$

である。T_b はフーリエ積分の双対であることおよびその積分表示にデルタ関数を含むことからつぎの命題が成り立つ。

命題 2.1

(2.1) $$\partial_j T_b = T_{-ip_j}$$

(2.2) $$e^{ip''x}T_b = T_{e^{ip''q}b}$$

が成り立つ.

証明 (2.1) を示そう。上の (a) および (a') より

$$\partial_j T_b(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP) = T_b(-\partial_j\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP)$$

$$T_b(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}(-ip_j)a(P)e^{ipx}dP)=\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}(-ip_j)a(P)b(P)e^{ipq}dP$$

デルタ関数の性質から上記の $(-ip_j)$ を $(-ip'_j)$ にかえられる。すなわち

$$=\int_{P,P'\in\mathbf{R}^{2n}}(-ip_j)a(P)b(P')\delta(P-P')\int_{x\in\mathbf{R}^n}e^{ipx}\delta(x-q')dxdP'dP$$

$$=\int_{P,P'\in\mathbf{R}^{2n}}(-ip'_j)a(P)b(P')\delta(P-P')\int_{x\in\mathbf{R}^n}e^{ipx}\delta(x-q')dxdP'dP$$

$$=\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)\int_{x\in\mathbf{R}^n}e^{ipx}\{\int_{P'\in\mathbf{R}^{2n}}(-ip'_j)b(P')\delta(P-P')\otimes\delta(x-q')dP'\}dxdP$$

$$=T_{-ip'_jb}(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)e^{ipx}dP)$$

よって $\partial_jT_b=T_{-ip'_jb}$ を得た。つぎに (2.2) を示す。

$$e^{ip''x}T_b(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)e^{ipx}dP)=T_b(e^{ip''x}\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)e^{ipx}dP)$$

$$=\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)\int_{x\in\mathbf{R}^n}e^{i(p+p'')x}\int_{P'\in\mathbf{R}^{2n}}b(P')\delta(P'-P)\otimes\delta(x-q')dxdP'dP$$

$$=\int_{P,P'\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)b(P')\delta(P-P')\int_{x\in\mathbf{R}^n}e^{i(p''+p)x}\delta(x-q')dxdPdP'$$

$$=\int_{P,P'\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)b(P')\delta(P-P')e^{i(p+p'')q'}dPdP'=\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)b(P)e^{i(p+p'')q}dP$$

となる一方

$$T_{e^{ip''q'}b}(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)e^{ipx}dP)$$

$$=\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)\int_{x\in\mathbf{R}^n}e^{ipx}\{\int_{P'\in\mathbf{R}^{2n}}e^{ip''q'}b(P')\delta(P-P')\otimes\delta(x-q')dP'\}dxdP$$

$$=\int_{P,P'\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)b(P')\delta(P-P')e^{(p+p'')q'}dP'dP=\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}}a(P)b(P)e^{i(p+p'')q}dP$$

以上から $e^{p''x}T_b=T_{e^{ip''q'}b}$ が従う。(証明終わり)

$\mathbb{C}[q,p]$ には標準的なポアッソン構造がはいる。すなわち

$$\{p_i,p_j\}=\{q_i,q_j\}=0,\{p_i,q_j\}=\delta_{i,j}$$

命題 2.1 よりつぎの系が得られる。

系

$$[\partial_j,e^{ip''x}]T_b=T_{\{p_j,e^{ip''q}\}b}$$

証明　命題 2.1 より

$$[\partial_j, e^{ip"x}]T_b = ip"_j e^{ip"x} T_b = T_{ip"_j e^{ip"q}b}$$

$$= T_{\{p_j, e^{ip"q}\}b}$$

（証明終わり）

$\mathbb{R}^n$ 内のベクトル e_j を $e_j = {}^t(0, \ldots, \underbrace{1}_{j}, \ldots, 0)$ とする。$\alpha_j = e_{j+1} - e_j, j = 1, \ldots, n-1$ とし $\mathbb{C}[p, e^{<\alpha,q>}](= \mathbb{C}[p, e^{q_2-q_1}, \ldots, e^{q_n-q_{n-1}}])$ を考える。Δ_+ を α_j 達の $\mathbb{N}$ 係数の一次結合全体とする。$e^{i\alpha x}, \alpha \in \Delta_+$ 係数の微分作用素環を $\mathcal{D}_{\exp}$ とする。$\epsilon : \mathcal{D}_{\exp} \to \mathcal{D}_{\exp}$ を $\epsilon(\partial_j) = i\partial_j$ として代数準同型で $\mathcal{D}_{\exp}$ 全体に拡張するものとする。さらに正規積 $: \; : \mathcal{D}_{\exp} \to \mathcal{D}_{\exp}$ を

$$: \partial^\alpha f(x) \partial^\beta := f(x) \partial^{\alpha+\beta}$$

で定義する。$\eta : \mathcal{D}_{\exp} \to \mathbb{C}[p, e^{<\alpha,q>}]$ を $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ に対して $: \epsilon(P) : T_b = T_{\eta(P)b}$ で定義する。

命題 2.2 η はリー代数の準同型である。すなわち $A, B \in \mathcal{D}_{\exp}$ としたとき

$$\eta([A, B]) = \{\eta(A), \eta(B)\}$$

が成り立つ。

証明　A, B がともに単項式のとき、すなわち $A = f(x)\partial^\alpha, B = g(x)\partial^\beta$ のときを示せばよい。

$$[A, B] = [f\partial^\alpha, g\partial^\beta]$$

$$= f \sum_{j=1} \sum_{\gamma+\delta+e_j=\alpha+\beta} \partial^\gamma [\partial_j, g] \partial^\delta + g \sum_{j=1}^{n} \sum_{\gamma+\delta+e_j=\alpha+\beta} \partial^\gamma [f, \partial_j] \partial^\delta$$

よって

$$: \epsilon([A, B]) := f(x) \sum_{j=1}^{n} [\partial_j, g(x)] (i\partial)^{\alpha+\beta-e_j} + g(x) \sum_{j=1}^{n} [f(x), \partial_j] (i\partial)^{\alpha+\beta-e_j}$$

従って

$$\eta([A, B]) = \sum_{j=1}^{n} (f(q)\{p_j, g\} + g(q)\{f(q), p_j\}) p^{\alpha+\beta-e_j}$$

$$= \{f(q)p^\alpha, g(q)p^\beta\} = \{\eta(A), \eta(B)\}$$

以上よりリー代数の準同型になる。（証明終わり）

注意　$P \in \mathcal{D}_{\exp}$ で $: P := 0$ でも $P = 0$ とは限らない。しかし P は ∂ に関して 0 次である。すなわち関数の掛け算作用素になる。

補題 2.3 T_b が $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})'$ の元として 0 ならば $b=0$ である。
証明

$$T_b(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP) = \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)b(P)e^{ipq}dP = 0$$

が任意の $a(P)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ でなりたつから $b(P)=0$ である。(証明終わり)
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^* := \{T_b | b(P)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})\}$ とすると上の補題と $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^*$ の定義から

$$0\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^*\to 0$$

は完全である。よって抽象的な線型空間として $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})\simeq\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^*$ である。急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ には通常の位相が入り、$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^*$ には $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})'$ からの相対位相が入るものとする。

$$|\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)b(P)e^{ipq}dP| \le \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} |a(P)||b(P)|dP$$

より $b\mapsto T_b$ が連続なのは明らか。逆に $b_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ で $T_{b_n}\to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^*$ としたとき $b_n\to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ を示す。

$$T_{b_n}(\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)e^{ipx}dP) = \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} a(P)b_n(P)e^{ipq}dP \to 0 \ (n\to\infty)$$

が任意の $a(P)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ で成り立っているから広義一様に $b_n(P)\to 0$ となる。また $q^\alpha p^\beta = q_1^{\alpha_1}\cdots q_n^{\alpha_n}p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}$ とすると $q^\alpha p^\beta a(P)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ である。よって

$$\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} (q^\alpha p^\beta b_n(P))a(P)e^{ipq}dP = \int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} b_n(P)(q^\alpha p^\beta a(P))dP \to 0 \ (n\to\infty)$$

であるから $q^\alpha p^\beta b_n(P)$ は広義一様に 0 に収束する。一方

$$\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} (\frac{\partial}{\partial q_j}b_n(P))a(P)e^{ipq}dP = -\int_{P\in\mathbf{R}^{2n}} b_n(P)(\frac{\partial a(P)}{\partial q_j}+ip_ja(P))e^{ipq}dP \to 0$$

より $\frac{\partial}{\partial q_j}b_n(P)$ も広義一様に 0 に収束する。同様に $\frac{\partial}{\partial p_j}b_n(P)$ も広義一様に 0 に収束するから、任意の $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に対して広義一様に

$$p^\alpha q^\beta \partial_p^\gamma \partial_q^\delta b_n(P)\to 0 \ (n\to\infty)$$

であるから $T_{b_n}\to 0$ ならば $b_n\to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ である。以上より線型位相空間としても $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})\simeq\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^*$ である。

命題 2.4 $A,B\in\mathcal{D}_{\exp}$ とする。$\{\eta(A),\eta(B)\}\doteq 0$ ならば $[A,B]:=0$ である。
証明　任意の $b\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ にたいして命題 2.2 より

$$:\epsilon([A,B]):T_b = T_{\{\eta(A),\eta(B)\}b} = 0$$

が成り立つ。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を示そう。$\psi(q) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\int_{\mathbf{R}^n} \psi(q)dq = 1$ となるようにさだめる。任意の $f(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$a(P) = \psi(q) \int_{y \in \mathbf{R}^n} f(y) e^{-ipy} dy$$

とする。このとき

$$\begin{aligned}
\int_{P \in \mathbf{R}^{2n}} a(P) e^{ipx} dP &= \int_{p \in \mathbf{R}^n} \int_{q \in \mathbf{R}^n} \psi(q) \int_{y \in \mathbf{R}} f(y) e^{-ipy} dy e^{ipx} dq dp \\
&= \int_{q \in \mathbf{R}^n} \psi(q) dq \{ \int_{p \in \mathbf{R}^n} \{ \int_{y \in \mathbf{R}^n} f(y) e^{-ipy} dy \} e^{ipx} dp \\
&= 1 \cdot Cf(x) = Cf(x)
\end{aligned}$$

ここで C はフーリエ変換に関する正の定数。以上より $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ となる。次に $I(q) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を

$$I(q) = \begin{cases} 1 & |1| \leq 1 \\ 0 & |q| \geq 2 \end{cases}$$

とする。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ への埋め込み ι を $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ としたとき

$$\iota(\varphi)(q,p) = I(q)\varphi(p)$$

で定義するから $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ となる。以上より

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})' \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^* \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

を得る。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})^*$ 上 : $\epsilon([A,B]) := 0$ より $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上 : $\epsilon([A,B]) := 0$ となる。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を超関数とみなしたときの微分作用素の作用と関数とみなしたときの作用は同等だから関数空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ への微分作用素として : $\epsilon([A,B]) := 0$ よって明らかに : $[A,B] := 0$ となる。(証明終わり)

$P \in \mathbb{R}^{2n}$ にたいして full でない通常の戸田格子のラックス行列はつぎの３重対角行列である。

$$L(P) = \Lambda + \sum_{j=1}^{n} p_j E_{j,j} + \sum_{j=2}^{n} e^{q_j - q_{j-1}} E_{j,j-1} \tag{2.4}$$

ここで $\Lambda = \sum_{j=1}^{n-1} E_{j,j+1}$ である。このラックス行列の正準量子化は

$$\hat{L} = \Lambda + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\hbar} \partial_j E_{j,j} + \sum_{j=2}^{n} e^{i(x_j - x_{j-1})} E_{j,j-1} \tag{2.5}$$

とするのが自然であろう。Givental と Kim はこの量子化されたラックス行列から n 個の量子化された保存量 $D_0, \ldots, D_{n-1} \in \mathcal{D}_{\exp}$ を次のようにして定義した。

$$\det(\lambda - \hat{L}) = \lambda^n + D_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + D_0 \tag{2.6}$$

(2.6) は微分作用素成分の行列の特性多項式であるが各 D_i においてその単項式は非可換なものを含んでいないので微分作用素として well-defined である。命題 2.4 の系としてつぎが成り立つ。

系 : $[D_i, D_j] := 0,\ i,j = 0,\ldots,n-1$

証明 $P = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して $\tilde{P} = (iq, \frac{1}{\hbar}p)$ とすると $\eta(D_i) = \mathcal{D}_i(\tilde{P})$ となる。ただし

$$\det(\lambda - L(P)) = \lambda^n + \mathcal{D}_{n-1}(P)\lambda^{n-1} + \cdots + \mathcal{D}_0(P)$$

とする。$\mathcal{D}_i(P)$ たちは戸田格子の保存量であるから $\{\mathcal{D}_i(P), \mathcal{D}_j(P)\} = 0$ よって $\{\mathcal{D}_i(\tilde{P}), \mathcal{D}_j(\tilde{P})\} = 0$ となる。よって命題 2.4 より : $[D_i, D_j] := 0$ を得る。(証明終わり)

すなわち D_i たちは準可換である [B-C]。実際にはこれらが可換であることを [I2] で示した。その証明の大筋は以下のとおりである。古典的戸田格子のレベル m の等位集合上の小領域 Ω_m を考え、その小領域の上のフーリエ積分で D_i たちの同時固有関数を構成する。その同時固有関数たちが $L^2(\Omega_m)$ を張るので $L^2(\Omega_n)$ の上で D_i たちは可換になる。次にレベル m をずらすことにより D_i たちが $L^2(\Omega)$ 上可換になるような n 次元の小領域 Ω を得る。D_i たちが $L^2(\Omega)$ の上で可換ならば結局これらは微分作用素として可換である。という流れである。本稿では今後可換性を用いないのでこれ以上触れない。

2.2 旗多様体の中のトーリック多様体とそのコホモロジー環の量子化について

第 1 章の古典論のアナロジーで量子化されたラックス行列 $\hat{L}$ の固有値問題

$$\hat{L}\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi} \tag{2.7}$$

を考える。今 $\vec{\psi} = {}^t(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ とする。このときつぎが成り立つ。

命題 2.5[I1]

$$\det(\lambda - \hat{L})\psi_1 = 0 \tag{2.8}$$

$$\psi_\mu = \det(\lambda - \hat{L})_{\mu-1}\psi_1,\ \mu \geq 2 \tag{2.9}$$

この命題より古典論からの類推で直感的な述べ方をすると固有ベクトルは錐状に広がり (2.9)、その軸は単なるスカラーではなく偏微分方程式 (2.8) の解である。この錐の軸である微分方程式 (2.8) の解 ψ_1 を詳しく見ていこう。

$$\det(\lambda - \hat{L}) = \lambda^n + D_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + D_0$$

であった。今 $M={}^t(M_0,\ldots,M_{n-1})\in\mathbb{C}^n$ を一つとって固定する。スカラー関数 ψ を同時固有値問題

$$D_j\psi=M_j\psi,\ j=0,\ldots,n-1 \tag{2.10}$$

の解とする。このとき ψ は (2.8) の解になっているただしこのときの λ は

$$\lambda^n+M_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+M_0=0$$

の根とする。従って量子化されたラックス行列の固有値問題 (2.7) は同時固有値問題 $D_j\psi=M_j\psi,\ j=0,\ldots,n-1$ に帰着された。(2.10) の解を構成しよう。$m={}^t(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{C}^n$ を固定する。多様体 $\mathcal{M}_n$ を

$$\mathcal{M}_n:=\{p\in\mathbb{C}^{n(n+1)/2}|\mathcal{D}_i(p)=m_i,\ i=0,\ldots,n-1\}$$

で定義する。$\mathcal{D}_0(p),\ldots,\mathcal{D}_{n-1}(p)$ たちは $\bar{N}$ 不変な多項式だからある多項式たち $F_1,\ldots,F_n$ が存在して

$$\varphi_i=F_i(\mathcal{D}_0,\ldots,\mathcal{D}_{n-1}),\ i=1,\ldots,n \tag{2.11}$$

となる。ここでもちろん φ_i たちは第 1 章で full 戸田格子のラックス行列を $\bar{N}$ の adjoint 変換で標準形に直したときに出てきた多項式である。$F={}^t(F_1,\ldots,F_n)$ とすると $\mathcal{M}_m=S_{F(m)}$ となる。$\mathcal{M}_m$ の $2n$ 次元複素部分多様体 $N_m^{\mathbb{C}}$ を

$$N_m^{\mathbb{C}}:=\{P\in\mathbb{C}^{2n}|\mathcal{D}_i(P)=m_i,\ i=0,\ldots,n-1\}$$

で定義する。$\mathbb{C}^{2n}=\mathbb{R}^{2n}\oplus\sqrt{-1}\mathbb{R}^{2n}$ とみなし $N_m^{\mathbb{C}}\cap\sqrt{-1}\mathbb{R}^{2n}\neq\phi$ と仮定する。今実多様体 N_m を $N_m:=N_m^{\mathbb{C}}\cap\sqrt{-1}\mathbb{R}^{2n}$ で定義すると

$$N_m=\{P=(q,p)\in\mathbb{R}^{2n}|\mathcal{D}_j(iq,ip)=m_j,\ j=0,\ldots,n-1\}$$

となる。さらに実座標変換 $(q,p)\mapsto(q,p/\hbar)$ を行い N_m の表示が

$$N_m:=\{P=(q,p)\in\mathbb{R}^{2n}|\mathcal{D}_j(iq,ip/\hbar)=m_j,\ j=0,\ldots,m-1\}$$

となるようにする。$S_{F(m)}$ のコンパクト化 $\bar{S}_{F(m)}$ に伴う N_m のコンパクト化を $\bar{N}_m$ とすると $\bar{N}_m$ は旗多様体 $\bar{S}_{F(m)}$ の中の実なトーリック多様体になる。$\omega(P)$ を $\bar{N}_m$ 上の適当な微分形式とする。$\bar{N}_m$ 上のフーリエ積分の空間 $S(\bar{N}_m)$ を

$$S(\bar{N}_m):=\{\int_{P\in\bar{N}_m}a(P)e^{ipx}\omega(P)|a(P)\in C^\infty(\bar{N}_m)\}$$

で定義する。$b\in C^\infty(\bar{N}_m)$ に対し $T_b\in S(\bar{N}_m)'$ を

$$T_b(\int_{P\in\bar{N}_m}a(P)e^{ipx}\omega(P))=\int_{P\in\bar{N}_m}a(P)b(P)e^{ipq}\omega(P)$$

で定義する。$\mathbb{R}^{2n}$ のときと同様 T_b は積分表示

$$T_b = \int_{P\in\bar{N}_m} b(P)\delta(P-P')\otimes\delta(x-q)\omega(P) \tag{2.12}$$

を持つ。$\delta(P-P')\otimes\delta(x-q')$ を $\delta_P(x-q)$ と略記しよう。

$$\partial_j T_b(\int_{P\in\bar{N}_m} a(P)e^{ipx}\omega(P)) = T_b(-\partial_j\int_{P\in\bar{N}_m} a(P)e^{ipx}\omega(P)$$

$$e^{ip''x}T_b(\int_{\bar{N}_m} a(P)e^{ipx}\omega(P)) = T_b(e^{ip''x}\int_{P\in\bar{N}_m} a(P)e^{ipx}\omega(P))$$

より

$$\partial_j T_b = T_{-ip_jb(P)},\quad e^{ip''x}T_b = T_{e^{ip''q}b} \tag{2.13}$$

が従う。(2.13) より T_b は $D_j, j=0,\dots,n-1$ の同時固有関数になっていることが分かる。実際

$$D_jT_b = T_{\mathcal{D}_j(\tilde{P})b} = T_{m_jb} = m_jT_b \tag{2.14}$$

が成り立つから。さて (2.13) を積分表示で書くと

$$\partial_j\int_{P\in\bar{N}_m} b(P)\delta_P(x-q)\omega(P) = \int_{P\in\bar{N}_m} b(p)(-ip_j)\delta_P(x-q)\omega(P)$$

$$e^{ip''x}\int_{P\in\bar{N}_m} b(P)\delta_P(x-q)\omega(P) = \int_{P\in\bar{N}} b(P)e^{ip''q}\delta_P(x-q)\omega(P)$$

となる。これが任意の $b(P)\in C^\infty(\bar{N}_m)$ で成り立つから上の事実をシンボリックに

$$\partial_j\delta_P(x-q) = (-ip_j)\delta_P(x-q) \tag{2.15}$$

$$e^{ip''x}\delta_P(x-q) = e^{ip''q}\delta_P(x-q) \tag{2.16}$$

と書ける。このシンボリックな計算は矛盾なく定義されている。今 $\bar{N}_m$ 上のベクトル場 X_j を $f\in C^\infty(\bar{N}_m)$ に対して $X_jf=\{\mathcal{D}_j,f\}$ で定義する。任意の $P\in\bar{N}_m$ において $X_0(P),\dots,X_{n-1}(P)$ は $T_P\bar{N}_m$ を張る。$\frac{\partial}{\partial t_j}f = X_jf$ とすると $D_j\delta_P(x-q) = m_j\delta_P(x-q)$ の両辺を t_i で微分すると

$$D_j\frac{\partial}{\partial t_i}\delta_P(x-q) = m_j\frac{\partial}{\partial t_i}\delta_P(x-q)$$

$\mathcal{D}_j(\tilde{P}) = m_j$ に注意すると

$$D_j\frac{\partial}{\partial t_i}\delta_P(x-q) = \frac{\partial\mathcal{D}_j(\tilde{P})}{\partial t_i}\delta_P(x-q) + \mathcal{D}_j(\tilde{P})\frac{\partial}{\partial t_i}\delta_P(x-q)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{D}_j(\tilde{P})}{\partial t_i}\delta_P(x-q) + m_j\frac{\partial}{\partial t_i}\delta_P(x-q)$$

以上から $\frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial t_i} = 0$ でなくてはならないが、これは

$$\frac{\partial \mathcal{D}_j(\tilde{P})}{\partial t_i}\delta_P(x-q) = \{\mathcal{D}_i(\tilde{P}), \mathcal{D}_j(\tilde{P})\}\delta_P(x-q) = 0$$

より従う。

同時固有値問題の基本解のシンボル $\delta_P(x-q)$ を第1章で考えたラックス行列の固有ベクトルからなる錐の軸の類似である $P \in \bar{N}_m$ 上の量子化されたファイバーと考えよう。今 $\bar{N}_m$ 上の量子化された複素直線束 $\cup_{P\in\bar{N}}\mathbb{C}\delta_P(x-q)\omega(P)$ を考える。この直線束の変換則を考えよう。$\{U_\alpha\}$ を $\bar{N}_m$ の座標近傍系とする。$P \in U_\alpha \cap U_\beta$ とし U_α 上 $P = P_\alpha$ で U_β 上 $P = P_\beta$ とする。$P_\alpha = (q_\alpha, p_\alpha)$, $P_\beta = (q_\beta, p_\beta)$ で座標の変換関数は

$$P_\alpha = F_{\alpha,\beta}(P_\beta) = (q_{\alpha,\beta}(P_\beta), p_{\alpha,\beta}(P_\beta))$$

とする。この記号のもとで計算を行うと

$$\delta_{P_\alpha}(x-q_\alpha)\omega(P_\alpha) = \delta(P'-P_\alpha)\otimes\delta(x-q_\alpha)\omega(P_\alpha)$$

$$= \delta(P'-F_{\alpha,\beta}(P_\beta))\otimes\delta(x-q_{\alpha,\beta}(P_\beta))\omega(F_{\alpha,\beta}(P_\beta))$$

デルタ関数の座標変換による変換性 ([KKK]) と ω の変換性により

$$= |\det dF_{\alpha,\beta}(P_\beta)|^{-1}\delta(P-P_\beta)\otimes\delta(x-q_{\alpha,\beta})|\det dF_{\alpha,\beta}(P_\beta)|\omega(P_\beta)$$

$$= \delta(P'-P_\beta)\otimes\delta(x-q_{\alpha,\beta}(P_\beta))\otimes\omega(P_\beta)$$

となる。一方

$$\delta(x-q_{\alpha,\beta}(P_\beta)) = \delta(x-q_\beta+(q_\beta-q_{\alpha,\beta}(P_\beta))$$

$$= \sum_\alpha \frac{\varphi(P_\beta)^\alpha}{\alpha!}\partial_x^\alpha\delta(x-q_\beta)$$

ここで $\varphi(P_\beta) = q_\beta - q_{\alpha,\beta}(P_\beta)$。よって

$$\delta(P'-P_\beta)\otimes\sum_\alpha \frac{\varphi(P_\beta)^\alpha}{\alpha!}\partial_x^\alpha\delta(x-q_\beta)\omega(P_\beta)$$

$$= \sum_\alpha \frac{\varphi(P_\beta)^\alpha}{\alpha!}\partial_x^\alpha\delta_{P_\beta}(x-q_\beta)\omega(P_\beta)$$

$$= \sum_\alpha \frac{\varphi(P_\beta)^\alpha}{\alpha!}(-ip_\beta)^\alpha\delta_{P_\beta}(x-q_\beta)\omega(P_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{(-i\varphi_1(P_\beta)p_{\beta_1})^{\alpha_1}\cdots(-i\varphi_n(P_\beta)p_{\beta_n})^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\delta_{P_\beta}(x-q_\beta)\omega(P_\beta)$$

$$= e^{-ip_{\beta_1}\varphi(P_{\beta_1})_1}\cdots e^{-ip_{\beta_n}\varphi(P_\beta)_n}\delta_{P_\beta}(x-q_\beta)\omega(P_\beta)$$

$$= \exp(-iG_{\alpha,\beta}(P_\beta)\delta_{P_\beta}(x-q_\beta)\omega(P_\beta)$$

となる。ここで $G_{\alpha,\beta}(P_\beta)=\sum_{j=1}^{n}p_{\beta_j}\varphi(P_\beta)_j$ とする。$\mathcal{A}$ を $\bar{N}_m$ のアファイン代数とする。すなわち $\bar{N}_m$ の座標近傍 $U=\{P=(q,p)\}$ において

$$\Gamma(\mathcal{A},U)\simeq\mathbb{C}[e^{\alpha q},p]/<M_0-\mathcal{D}_0(\tilde{P}),\ldots,M_{n-1}-\mathcal{D}_{n-1}(\tilde{P})>$$

となる。ここで $\alpha\in\Delta_+$ であった。$G_{\alpha,\beta}\in\Gamma(\mathcal{A},U_\alpha\cap U_\beta)$ である。$f\in\Gamma(\mathcal{A},U_\alpha\cap U_\beta)$ であるとは U_α 上 $f=f_\alpha(P_\alpha)$ で U_β 上 $f=f_\beta(P_\beta)$ であるとき

$$f_\beta(P_\beta)=((F_{\alpha,\beta})^*f_\alpha)(P_\beta)=f_\alpha(F_{\alpha,\beta}(P_\beta))$$

であること。

$P\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ のとき $c_{\alpha,\beta,\gamma}\in\Gamma(\mathcal{A},U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma)$ を

$$c_{\alpha,\beta,\gamma}(P)=\frac{-1}{2\pi}(G_{\alpha,\beta}(P)+G_{\beta,\gamma}(P)+G_{\gamma,\delta}(P))$$

で定義する。この $c_{\alpha,\beta,\gamma}$ を量子化された複素直線束により定義された 1-st チャーン類と考えよう。この 1-st チャーン類から生成された代数を $\bar{N}_m$ の量子化されたコホモロジー環と考えるのである。古典論では 1 次独立な n 本の固有ベクトルから構成された n 個の複素直線束により定義された 1-st チャーン類たちを考えそれらが生成する代数が等位集合のコホモロジー環であった。今ひとつの直線束 $\bigcup_{P\in\bar{N}_m}\mathbb{C}\delta_P(x-q)$ とそれから定義された一つの 1-st チャーン類 c が定義されている。古典論における n 個の 1-st チャーン類の存在を量子化の場合になぞって考えると以下のようになる。$\tilde{\bar{N}}_m$ をつぎで定義される $\bar{N}_m$ の n-被覆空間とする。$\pi:\tilde{\bar{N}}_m\to\bar{N}_m$ を射影とし $\pi^{-1}(P)=\{P_1,\ldots,P_n\}$ とする。ここで

$$\lambda_j^n+\mathcal{D}_{n-1}(P_j)\lambda_j^{n-1}+\cdots+\mathcal{D}_0(P_j)=0$$

ただし $\lambda_j, j=1,\ldots,n$ は

$$\lambda^n+m_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+m_0=0$$

の n 個の根とする。$c\in\Gamma(\mathcal{A},\bar{N}_m)$ を $c|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}=c_{\alpha,\beta,\gamma}$ となるものとする。この c の π による引き戻しを $\pi^*c=\{c_1,\ldots,c_n\}$ とする。各 c_j 達で生成される $\mathbb{C}$ 上の代数を $\bar{N}_m$ のコホモロジー環 $H^*(\bar{N}_m,\mathbb{C})$ の量子化と考えよう。各 c_i は $\mathcal{A}$ の独立した生成元と考えられるから

$$\text{量子化された } H^*(\bar{N}_m,\mathbb{C})\simeq\mathcal{A}$$

となる。最後にパラメーター $\hbar \to 0$ の極限を考えよう。$\tilde{P} = (iq, ip/\hbar)$ より

$$\mathcal{D}_j(\tilde{P}) = (i/\hbar)^{n-j}\sigma_{n-j}(p) + o((\frac{1}{\hbar})^{n-j})$$

となる。もちろん $\sigma_j(p)$ は j 次の基本対称式である。従って関係式 $\mathcal{D}_j(\tilde{P}) = m_j$ は

$$i^{n-j}\sigma_{n-j}(p) + \hbar^{n-j}o((\frac{1}{\hbar})^{n-j}) = \hbar^{n-j}m_j$$

で $\hbar \to 0$ で

$$\sigma_{n-j}(p) = 0,\ j = 0, \ldots, n-1$$

となる。さらに $\mathbb{C}[iq, ip/\hbar]$ において $\hbar \to 0$ とすると q は無視できるから $\mathbb{C}[iq, ip/\hbar] \to \mathbb{C}[p]$ となる。以上より

$\lim_{\hbar \to 0}$ 量子化された $H^*(\tilde{N}_m) \simeq \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]/ < \sigma_1(p), \ldots, \sigma_n(p) > \simeq H^*_{\tilde{N}_m}(\tilde{S}_{F(m)})$

となる。

References

[B] A.Borel, Sur la cohomologie des espace fibrés principaux et des espaces homogénes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math. **57**(1953),115-207

[C-K] L.Casian and Y Kodama, Toda lattice and toric varieties for real split semisimple Lie algebras, Pacific Journal **207**(2002),77-124.

[F-H] H.Flascka and L.Haine, Variétés de drapeaux et résaux de Toda, Math.Z.**208**(1991),545-556.

[G] A.Givental, Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture, A.M.S. Transl(2) **180**(1997),103-115.

[G-K] A.Givental and B.Kim, Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices, Commun.Math.Phys.**168**(1995), 609-641

[I1] K.Ikeda, On the spectral resolution of the quantum Toda lattice, Jour.Funct.Anal.**185**(2001),404-424.

[I2] -, Fourier integrals on the iso-level set of the Toda lattice and the commutative ring of the partial differential operators, preprint.

[I3] -, Chern classes on the compact iso-level set of the Toda lattice,preprint

[KKK] M.Kashiwara,T.Kawai and T.Kimura, Foundation of algebraic analysis, Princeton University Press, New Jersey 1986.

[K] B.Kim, Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices, Ann.of Math.**149**(1999),129-148.

[Kos1] B.Kostant, Quantization and unitary representation, Springer Lecture Notes in Mathematics, No.170 pp87-207(Springer 1970).

[Kos2] -, On Whittaker vectors and representation theory, Invent.Math.**48**(1978), 101-184.

[Kos3] -,Flag manifold, quantum cohomology, the Toda lattice and representation with highest weight ρ, Selecta Math.(N.S.)**2**(1996),43-91.

[Y] K.Yosida, Functional analysis, Die Grundlehren der mathematischen Wissenscaften in Eizeldarstellungen Band 123, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.

[Tom] C.Tomei, The topology of isospectral manifolds of tridiagonal matrices, Duke Math.Jour.**51**(1984),981-996.