数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 80-89

Lusztig's conjecture for special linear groups

名大 多元数理 庄司俊明 (Toshiaki Shoji)
Graduate school of Mathematics, Nagoya University

1. はじめに

G を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結な簡約代数群, $F: G \to G$ を $\mathbf{F}_q$ 構造に付随する G の Frobenius 写像とする. G の F による固定点からなる有限群 G^F を有限簡約群という. G^F の表現論の基本的な問題は $\mathbf{C}$ 上の既約表現を全て決定し, その既約指標を計算することである. 既約指標の分類については, 1980 年代に Lusztig が, まず G の中心が連結な場合に分類を完成し ([L1]), その後中心が非連結な場合は, 中心が連結な場合に帰着させることにより, 一般の有限簡約群の既約指標の分類を完成させた ([3]).

残された問題は G^F の既約指標の決定であるが, 有限簡約群の既約指標を決定する一般的なアプローチを求めて Lusztig は指標層の理論 ([L2]) を創始した. G の指標層 $\widehat{G}$ とは, G 上のある種の (G の共役の作用に関する) G-同変単純偏屈層の集合として定義される.

$$\widehat{G}^F = \{A \in \widehat{G} \mid F^*A \simeq A\}$$

とおく. $\widehat{G}^F$ は F 不変な指標層全体の集合である. 各 $A \in \widehat{G}^F$ に対し, 同型 $\phi_A: F^*A \simeq A$ を固定することにより, A の特性関数 $\chi_A = \chi_{A,\phi_A}: G^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ が定義される. χ_{A,ϕ_A} は G^F の類関数になる. また, A が単純であることから χ_A はスカラー倍を除いて, ϕ_A の選び方によらない. $C(G^F/\sim)$ を G^F の類関数全体からなる $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 空間とする. $C(G^F/\sim)$ には既約指標を正規直交基底とするような自然な内積が入る. Lusztig の基本的な結果は次の通りである. この定理は G の中心が連結か否かにかかわらず成立することに注意する.

定理 1 (Lusztig [L2]). G を連結簡約群, p を almost good (例えば, $p > 5$) とする. このとき

(i) 集合 $\{\chi_{A,\phi_A} \mid A \in \widehat{G}^F\}$ は (ϕ_A を適当に正規化することにより) $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底をなす.

(ii) 類関数 χ_{A,ϕ_A} を "計算する" 一般的なアルゴリズムが存在する.

注意. χ_{A,ϕ_A} の計算は G^F の一般 Greeen 関数の計算に帰着される. 一般 Green 関数は G^F の巾単元の上で定義された類関数であり, Lusztig はこれが簡単な (つまり計算可能な) 関数達の線形結合として具体的に表示されることを示した. しかしここに問題があって, Lusztig の理論では, この簡単な関数達の取り方にスカラー倍の不定性が残っている. Green 関数の場合には, この不定性は完全に除去されているが, 一般 Green 関数についてはこのスカラーを決定する必要がある. この問題は G が単連結な場合に帰着する. (G が随伴群の場合には比較的簡単で, Green 関数の場合はそれで片付く.)

Lusztig の定理により, G^F の既約指標の決定は, $C(G^F/\sim)$ の指標層の特性関数からなる基底と, 既約指標からなる基底との間の変換行列を決定すること, すなわち類関数 χ_{A,ϕ_A} を既約指標の和に分解することと同値である. G の中心が連結な場合, G^F の既約指標を分類する過程で, Lusztig は概指標 R_x といわれる G^F の類関数を構成した. (x はパラメータ集合 $X(G^F)$ を動く.) R_x は Delinge-Lusztig の一般指標 $R_T^G(\theta)$ と密接な関係を持ち (記号が似ていることに注意), 次の性質を有する.

(i) 概指標 R_x の全体は $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底をなす.

(ii) R_x は G^F の既約指標の線形結合として形式的に定義される. 特に, R_x の既約指標への分解は具体的に与えられる.

このような状況で, Lusztig は次のような予想を提案した.

Lusztig 予想. 適当な全単射 $X(G^F) \simeq \widehat{G}^F$ $(x \leftrightarrow A_x)$ のもとに, 以下を満たすスカラー $c_x \in \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ が存在する.

$$\chi_{A_x,\phi_x} = c_x R_x.$$

Lusztig 予想が解決しスカラー c_x が決定されると, 特性関数 $x\chi_{A_x,\phi_X}$ の既約指標への分解が得られる. χ_{A_x,ϕ_x} が計算できれば, G^F の既約指標は全て決定できる. そこで G の中心が連結な場合, G^F の既約指標決定のプログラムは次のようになる.

G^F の既約指標決定のプログラム:

(i) Lusztig 予想の解決.

(ii) Lusztig 予想に現れるスカラー c_x の決定.

(iii) 一般 Green 関数の計算に現れるスカラーの決定.

(i) については筆者により解決されている ([S3]). (ii) については, 指標層が巾単多様体上で消えない場合, あるいは対応する概指標が巾単指標の線形結合で書ける場合など, 特別

な場合にしか決まっていない. (iii) は必然的に G の中心が非連結な場合を考える必要が生ずる. $G = SL_n$ については筆者により (F が split, non-split のどちらも) 決定された. 他の場合については, まだ分かっていない.

G の中心が非連結な場合も, 指標層の理論が等しく機能していることから, 中心が連結な場合と基本的に同様なプログラムを考えることになる. しかしこの場合, G^F の概指標をうまく定義しなければならない. 概指標は中心が連結な場合にしか定義されていない. そして Luszitg による中心が非連結な場合の既約指標のラベル付けは, 概指標を定義するのに必要な程は精密でないのである.

本稿では次の結果を報告したい.

定理 2. $G = SL_n$, F は split 型とする, すなわち $G^F = SL_n(\mathbf{F}_q)$. さらに $p >> 0$ と仮定する (例えば, $p > 3n$). このとき G^F の概指標がしかるべく定義され, Luszitg 予想が成立する.

注意. 講演では, さらにプログラム (ii) のスカラー c_x の決定まで解決できたと述べたが, これについてはその後まだ少し問題が残っていることが分かったので, ここでは取りあえず保留にしておく. もしこのスカラーが決定できれば, SL_n については (i), (ii), (iii) が全て片付き, 従って既約指標が完全に求まることになる.

2. 新谷 descent と概指標

G の中心が非連結な場合にも概指標を定義する手段として, ここでは概指標と 新谷 descent との関係を説明しよう. まず 新谷 descent の定義から始める. G を (簡約とは限らない) $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結代数群, $F : G \to G$ を対応する Frobenius 写像とする. 整数 $m \geq 1$ に対し, $F^m : G \to G$ を $\mathbf{F}_{q^m}$ 構造に関する Frobenius 写像とする. このとき, G^{F^m} の F 不変な既約指標の個数は, G^F の既約指標の個数に一致することが知られている. この 2 種類の集合の間の関係を調べるのが新谷 descent (あるいは, 新谷 lifting) の理論である.

$x, y \in G^{F^m}$ に対し, $y = z^{-1}xF(z)$ となる $z \in G^{F^m}$ が存在するとき, x と y は F 共役であるという. $G^{F^m}/\sim_F$ で G^{F^m} の F 共役類の集合を表す. $m = 1$ の場合, F 共役類は, 普通の共役類にすぎない. この場合, 共役類の集合を単に $G^F/\sim$ と表す. ノルム写像といわれる $G^{F^m}/\sim_F$ から $G^F/\sim$ への全単射 $N_{F^m/F}$ が次のように定義される. G は連結なので, Lang の定理により $x \in G^{F^m}$ に対し $x = \alpha^{-1}F(\alpha)$ を満たす元 $\alpha \in G$ が存在する.

$x' = F^m(\alpha)\alpha^{-1}$ とおくと, $x' \in G^F$ であり, 対応 $x \mapsto x'$ が全単射 $N_{F^m/F}$ を誘導する. そこで $Sh_{F^m/F} = N^{*-1}_{F^m/F}$ として同型写像

$$Sh_{F^m/F} : C(G^{F^m}/\sim_F) \to C(G^F/\sim)$$

が定義される. $Sh_{F^m/F}$ を新谷 descent 写像という.

G^F の既約指標が $C(G^F/\sim)$ の基底を与えるが, 一方 G^{F^m} の F 不変な既約指標から次のようにして $C(G^{F^m}/\sim_F)$ の基底が得られる. 今, $\sigma = F|_{G^{F^m}}$ とし, G^{F^m} と σ で生成された位数 m の巡回群 $\langle\sigma\rangle$ との半直積 $\widetilde{G}^{F^m} = G^{F^m}\langle\sigma\rangle$ を考える. G^{F^m} の F 不変な既約指標 χ は $\widetilde{G}^{F^m}$ の既約指標 $\widetilde{\chi}$ に拡張され, $\widetilde{\chi}$ を剰余類 $G^{F^m}\sigma$ に制限することにより, $G^{F^m}\sigma$ 上の G^{F^m} 不変な関数 $\widetilde{\chi}|_{G^{F^m}\sigma}$ が得られる. ここで, 全単射 $G^{F^m}/\sim_F \simeq G^{F^m}\sigma/\sim$, $x \mapsto x\sigma$, により $C(G^{F^m}\sigma/\sim)$ と $C(G^{F^m}/\sim_F)$ が同一視され, $\widetilde{\chi}|_{G^{F^m}\sigma}$ は $C(G^{F^m}/\sim_F)$ の元とみなせる. $\widetilde{\chi}|_{G^{F^m}\sigma}$ はスカラー倍を除いて χ の拡大の取り方によらず, それらの全体が $C(G^{F^m}/\sim_F)$ の基底を与える.

次の結果が筆者により得られている. 以下では $(\mathrm{Irr}\, G^{F^m})^F$ で F 不変な G^{F^m} の既約指標の集合を表す.

定理 3 ([S1], [S2]). G を中心が連結な連結簡約群とする. このとき十分大きい m_0 が存在し, m_0 の倍数であるような任意の m に対して,

$$\{Sh_{F^m/F}(\widetilde{\chi}|_{G^{F^m}\sigma}) \mid \chi \in (\mathrm{Irr}\, G^{F^m})^F\} = \{R_x \mid x \in X(G^F)\}$$

がスカラー倍を除いて成り立つ. (以下では, このような m を sufficiently divisible な m ということにする.) すなわち新谷 descent により G^{F^m} の既約指標から自然な形で G^F の概指標が得られる.

新谷 descent はもちろん中心が非連結の場合でも意味を持つ. そこで次の予想はそれ程不自然ではないだろう.

新谷 descent 予想. G は連結簡約群, m は sufficiently divisible とする. このとき,

$$\{Sh_{F^m/F}(\widetilde{\chi}|_{G^{F^m}\sigma} \mid \chi \in (\mathrm{Irr}\, G^{F^m})^F\} = \{\chi_{A,\phi_A} \mid A \in \widehat{G}^F\}$$

がスカラー倍を除いて成立する.

新谷 descent 予想は, G^{F^m} の既約指標の新谷 descent による像が(中心が非連結の場合でも)概指標の役割を果たすことを要求しているのである. そこで各 $Sh_{F^m/F}(\widetilde{\chi}|_{G^{F^m}\sigma})$ を G^F の既約指標に分解することが重要になる. 次が成り立つ.

定理 4 ([S4]). $G = SL_n$, F は split 型とする. このとき, 各 $\chi \in (\mathrm{Irr}\, G^{F^m})^F$ に対し, $Sh_{F^m/F}(\widetilde{\chi}|_{G^{F^m}\sigma})$ の既約指標への分解が(スカラー倍を除いて)得られる.

定理4の証明には G^F の既約指標の精密な分類が必要になる. その辺の事情を $SL_2(\mathbf{F}_q)$ の例でみてみよう. $G^F = SL_2(\mathbf{F}_q)$, $\widetilde{G}^F = GL_2(\mathbf{F}_q)$ とし, $\mathbf{F}_q$ の標数は2でないとする. $T \subset B$ を $\widetilde{G}$ の F 不変な極大トーラスと, F-不変な Borel 部分群の組とする. $W = N_{\widetilde{G}}(T)/T = \langle s \rangle$ であり, 鏡映 s に対応する F 不変な極大トーラスを T_s と表す. このとき, $\widetilde{G}$ の極大トーラス T_1 と T_1^F の既約指標 θ_1 に対して, Deligne-Lusztig 指標 $R_{T_1}(\theta_1)$ が定まり,

$$R_T(\theta) = \mathrm{Ind}_{B^F}^{\widetilde{G}^F}(\widetilde{\theta}) = \rho,$$
$$R_{T_s}(\theta') = \pm\rho'$$

となる. generic な θ, θ' に対して ρ, ρ' は既約になる. ここに ρ は主系列表現で $\deg\rho = q+1$, また $\deg\rho' = q-1$ となる. ここで ρ, ρ' の G^F への制限を考える. ほとんどの θ, θ' に対しては, $\rho|_{G^F}$, $\rho'|_{G^F}$ は既約になる. しかし, ある $\theta = \theta_0, \theta' = \theta_0'$ が唯一組存在して, このとき,

$$\rho|_{G^F} = \rho_1 + \rho_2$$
$$\rho'|_{G^F} = \rho_1' + \rho_2'$$

と分解される. ここで, ρ_1, ρ_2 は共に次数 $(q+1)/2$, ρ_1', ρ_2' は共に次数 $(q-1)/2$ の G^F の既約指標になる. G^F の既約指標の分類としては, これで一応十分であるが, 新谷 descent の像を決めようとすると, ρ_1, ρ_2 や, ρ_1', ρ_2' の間で2つを区別する必要が出てくる. もともとこれらの指標は, $\widetilde{G}^F$ の作用で共役であり, その区別が存外に面倒なのである. 次節で説明するように, 一般 Gelfand-Graev 指標を利用してこのラベル付けを行う. 上記の SL_2 の場合, 新谷 descent は次のようになる. 上に現れた $\rho_1, \rho_2, \rho_1', \rho_2'$ は F を F^m に置き換えることにより, G^{F^m} の F 不変な既約指標 $X = \{\rho_1^{(m)}, \rho_2^{(m)}, {\rho_1'}^{(m)}, {\rho_2'}^{(m)}\}$ を与える. 各 $\rho \in X$

に対して, $Sh_{F^m/F}(\tilde{\rho}|_{G^{F^m}\sigma})$ を R_ρ と表すことにする. このとき,

$$
\begin{aligned}
R_{\rho_1^{(m)}} &= \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2+\rho_1'+\rho_2'),\\
R_{\rho_2^{(m)}} &= \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2-\rho_1'-\rho_2'),\\
R_{\rho_1'^{(m)}} &= \frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2+\rho_1'-\rho_2'),\\
R_{\rho_2'^{(m)}} &= \frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2-\rho_1'+\rho_2')
\end{aligned}
$$

がそれぞれ, スカラー倍を除いて成立する. 右辺に現れる類関数が以下で定義する $SL_n(\mathbf{F}_q)$ の概指標の一例である.

3. 一般 Gelfand-Graev 指標と既約指標のラベル付け

一般 Gelfand-Graev 指標は川中によって導入された. 基本的な文献については [K] およびそこの参考文献を参照されたい. $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とし, $F:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を対応する Frobenius 写像とする. $\mathfrak{g}^F$ に含まれる巾零元 N に対し, Dynkin-Kostant 理論により F 不変な放物部分群 P とその F 不変な Levi 部分群 L が定まる. $P=LU_P$ を Levi 分解とする. N により, U_P の F 不変な閉部分群 U と, 一次指標 $\Lambda_N:U^F\to\bar{\mathbf{Q}}_l^*$ が定まる. $\Gamma_N=\mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}\Lambda_N$ を一般 Gelfand-Graev 指標という. 一般に, $N,N'\in\mathfrak{g}^F$ が G^F 共役でなければ, Γ_N と $\Gamma_{N'}$ は G^F の異なる指標を与える. N の G 軌道を $\mathcal{O}_N$ と表す. $\mathcal{O}_N$ の G^F 軌道への分解は $A_N=Z_G(N)/Z_G^0(N)$ の F 共役類 $A_N/\sim_F$ によって記述される. $A_N/\sim_F$ の元 c に対応する $\mathcal{O}_N$ の代表元を N_c, Λ_N を c で twist して得られる U^F の一次指標を $\Lambda_c:U^F\to\bar{\mathbf{Q}}_l^*$ と書く. $\Gamma_{N_c}=\mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}\Lambda_c$ である.

川中に従って 一般 Gelfand-Graev 指標から, 次のように変形一般 Gelfand-Graev 指標を構成する. ただし, SL_n の場合 [S4] で示されたように, U を L の作用で不変に取れるので, 川中の一般的な構成よりも簡単になっている. まず,

$$A_N=Z_G(N)/Z_G^0(N)\simeq A_L(N)/A_L^0(N)$$

であり, A_N はアーベル群になることに注意する. このとき, $A_N/\sim_F$ は A_N の $a^{-1}F(a)$ $(a\in A_N)$ で生成された部分群のよる商群として得られる. それを $(A_N)_F$ と表す. $(A_N)_F$ は F が自明に作用するような A_N の最大の商群である. $(A_N^F)^\wedge$ を A_N の既約指標全体の

集合とする．$\xi : A_N^F \to \bar{\mathbb{Q}}_l^*$ に対し，$Z_L(N_c)^F$ の一次指標 $\xi^\natural$ を次のように構成する．

$$\xi^\natural : Z_L(N_c)^F \to (Z_L(N_c)/Z_L^0(N_c))^F \simeq A_N^{cF} = A_N^F \to \bar{\mathbb{Q}}_l^*.$$

各組 $(c,\xi) \in (A_N)_F \times (A_N^F)^\wedge$ に対して半直積 $Z_L(N_c)^F U^F$ の一次指標 $\xi^\natural \otimes \Lambda_c$ が定義できる．ここで，(c,ξ) で定まる変形一般 Gelfand-Graev 指標 $\Gamma_{c,\xi}$ を

$$\Gamma_{c,\xi} = \mathrm{Ind}_{Z_L(N_c)^F U^F}^{G^F}(\xi^\natural \otimes \Lambda_c)$$

により定義する．$\Gamma_{c,\xi}$ は一般 Gelfand-Graev 指標 Γ_{N_c} の直和成分になっている．

$\Gamma_{c,\xi}$ による G^F の既約指標のラベル付けと family への分割を説明しよう．$G^*, \widetilde{G}^*$ をそれぞれ $G, \widetilde{G}$ の双対群とする．$\widetilde{G}^* \simeq GL_n$ であり，写像 $\pi : \widetilde{G}^* \to G^* = \widetilde{G}^*/\widetilde{Z}^*$ が得られる．$\widetilde{Z}^*$ は $\widetilde{G}^* = GL_n$ の中心である．G^F の既約指標全体の集合 $\mathrm{Irr}\, G^F$ は，次のように Lusztig series に分割される．

$$\mathrm{Irr}\, G^F = \coprod_{\{s\}} \mathcal{E}(G^F, \{s\}).$$

アここに $\{s\}$ は G^* の F 不変な共役類を全て動く．今，$s \in G^{*F}$ とし，$\Omega_s = Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}^0(s)$ とおく．Ω_s は巡回群になる．s の G 共役類の中の G^F 共役の代表元は $\Omega_s/{\sim_F} = (\Omega_s)_F$ でラベル付けられる．$x \in (\Omega_s)_F$ に対応する G^{*F} の元を s_x と表す．各 s_x に対し，$\pi(\dot{s}_x) = s_x$ となる $\dot{s}_x \in \widetilde{G}^{*F}$ が取れる．T^* を $Z_{G^*}(s)$ の maximally split な F 不変極大トーラスとし，$\widetilde{T}^*$ を $\pi(\widetilde{T}^*) = T^*$ をみたす $\widetilde{G}^*$ の F 不変極大トーラスとする．$\dot{s}$ を $\pi(\dot{s}) = s$ となる $\widetilde{T}^{*F}$ の元を取る．$W = N_{\widetilde{G}^*}(\widetilde{T}^*)/\widetilde{T}^*$ とおく．W は $N_{G^*}(T^*)/T^*$ と同一視できる．$W_{\dot{s}}$ を W における $\dot{s}$ の固定化群とする．さらに

$$W_s = N_{Z_{G^*}(s)}(T^*)/T^*, \quad W_s^0 = N_{Z_{G^*}^0(s)}(T^*)/T^*$$

とおく．$W_s^0 \simeq W_{\dot{s}}$ であり，$W_s = \Omega_s \ltimes W_s^0$ となる．

一方，$\widetilde{G}^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標は $\dot{s} \in \widetilde{T}^{*F}$ と，$W_{\dot{s}}$ の F 不変な既約表現 E の組 $(\dot{s}, E)$ で与えられる．それを $\rho_{\dot{s},E}$ と表す．

$$\rho_{\dot{s},E} = \pm|W_{\dot{s}}|^{-1} \sum_{w \in W_{\dot{s}}} \mathrm{Tr}\,(wF, \widetilde{E}) R_{\widetilde{T}_w^*}(\dot{s})$$

となっている. $R_{\widetilde{T}_w^*}(\dot{s})$ は w で twist した F 不変な極大トーラス $\widetilde{T}_w^*$ に関する Deligne-Lusztig の一般指標 $R_{\widetilde{T}_w}^{\widetilde{G}}(\theta)$ を表す. $x \in (\Omega_s)_F$ で twist することにより, $\dot{s}_x$ に対しても $\widetilde{G}^F$ の既約指標 $\rho_{\dot{s}_x,E}$ が定義される. Clifford 理論により, G^F の既約指標は, $\widetilde{G}^F$ の既約指標の G^F への制限を分解することにより, 全て得られる (multiplicity free の分解になる). $x \in (\Omega_s)_F$ を全て動かした時, $\rho_{\dot{s}_x,E}$ を分解することにより得られる G^F の既約指標全体の集合を $\mathcal{T}_{s,E}$ と表す. Lusztig series $\mathcal{E}(G^F, \{s\})$ は

$$\mathcal{E}(G^F, \{s\}) = \coprod_{E \in (\mathrm{Irr}\, W_{\dot{s}}/\Omega_s)^F} \mathcal{T}_{s,E}$$

と分解される. ここで, $(\mathrm{Irr}\, W_{\dot{s}}/\Omega_s)^F$ は $\mathrm{Irr}\, W_{\dot{s}}$ の F 不変な Ω_s 軌道を意味する. $\mathcal{T}_{s,E}$ を既約指標の family という.

以下, ある種の $\mathcal{T}_{s,E}$ が変形一般 Gelfand-Graev 表現によってラベル付けできることを説明する. 一般の $\mathcal{T}_{s,E}$ のラベル付けはこの特殊な場合に帰着するのである. 中心が連結な群 $\widetilde{G}$ に対して, 各 $\rho \in \mathrm{Irr}\, \widetilde{G}^F$ に $\mathfrak{g}$ の巾零軌道 $\mathcal{O}_\rho$ を対応させる写像が Lusztig [L1] で構成された. 例えば, $s = 1$ の場合, $W_{\dot{s}} = W$ であり, W の既約表現 E の属する two sided cell の特殊表現 $E_0 \in \mathrm{Irr}\, W$ から Springer 対応により定まる $\mathfrak{g}$ の巾零軌道が $\mathcal{O}_\rho$ を与える. 各 $x \in (\Omega_s)_F$ に対して $\rho_{\dot{s}_x,E}$ は同じ巾零軌道を与えるので, family $\mathcal{T}_{s,E}$ に対して巾零軌道 $\mathcal{O}_{s,E}$ が定まる. 今, $N \in \mathcal{O}_{s,E}^F$ を取り, $\overline{A}_N$ を A_N の (ある条件で定まる) 商群とする.

$$\overline{\mathcal{M}}_N = (\overline{A}_N)_F \times (\overline{A}_N^F)^\wedge, \quad \overline{\mathcal{M}}_0 = (A_N)_F \times (\overline{A}_N^F)^\wedge$$

とおく. $\overline{\mathcal{M}}_0 \subset (A_N)_F \times (A_N^F)^\wedge$ なので, 各 $(c', \xi') \in \overline{\mathcal{M}}_0$ に対して $\Gamma_{c',\xi'}$ が定義される. $\varphi : \overline{\mathcal{M}}_0 \to \overline{\mathcal{M}}_N$ を自然な写像とする.

命題 5 ([S4]). (s, E) はある条件を満たす組とする. このとき, 集合 $\mathcal{T}_{s,E}$ は $\overline{\mathcal{M}}_N$ によってラベル付けされる. $(c, \xi) \in \overline{\mathcal{M}}_N$ に対応する $\mathcal{T}_{s,E}$ の元を $\rho_{c,\xi}$ と表すと次が成り立つ.

$$\langle \Gamma_{c',\xi'}, \rho_{c,\xi} \rangle_{G^F} = \begin{cases} 1 & \varphi(c', \xi') = (c, \xi) \text{ の場合 }, \\ 0 & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

命題 5 は, $\widetilde{G}^F$ の既約指標の制限として, 皆同じような外観を持っていた G^F の既約指標達の個性を, 変形一般 Gelfand-Graev 指標がみごとに識別してくれることを意味している.

4. Lusztig 予想

(s,E) は前節の通りとする．まず $\mathcal{T}_{s,E}$ に付随する G^F の概指標を定義しよう．

$$\mathcal{M}_N = \overline{A}_N^F \times (\overline{A}_N)^\wedge_{\mathrm{ex}}$$

とおく．ただし，$(\overline{A}_N)^\wedge_{\mathrm{ex}}$ は $\overline{A}_N$ の既約指標で F 不変なもの全体の集合を表す．pairing $\{\,,\,\} : \mathcal{M}_N \times \overline{\mathcal{M}}_N \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ を $x = (c,\xi) \in \mathcal{M}_N, y = (c',\xi') \in \overline{\mathcal{M}}_N$ に対して

$$\{x,y\} = |\overline{A}_N^F|^{-1}|\xi(c')\xi'(c)$$

により定義する．$\xi' \in (\overline{A}_N)^\wedge_{\mathrm{ex}}$ は $(\overline{A}_N)_F$ 上の指標とみなせることに注意する．各 $x \in \mathcal{M}_N$ に対し，G^F 上の類関数 R_x を

$$R_x = \sum_{y \in \overline{\mathcal{M}}_N} \{x,y\}\rho_y$$

により定義する．R_x を family $\mathcal{T}_{s,E}$ に付随する概指標という．定理 2 は次のように精密化される．

定理 2'. family $\mathcal{T}_{s,E}$ を前の通りとする．対応 $\mathcal{M}_N \to \widehat{G}^F$, $x \mapsto A_x$ が存在して次を満たす．

$$R_x = c_x \chi_{A_x,\phi_x}.$$

ただし，$c_x \in \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ は ϕ_x の取り方により定まるスカラーである．

定理の証明には，Lusztig による次の結果が本質的に使われる．

定理 6 ([L4]). $p >> 0$ とする．このとき，一般 Gelfand-Graev 指標 Γ_{N_c} は χ_{A,ϕ_A} 達の線形結合として具体的に表される．

注意. Lusztig の結果を適用して計算するためには，一般 Green 関数の計算に関するスカラーを決定する必要がある．1 節に述べたように，$G = SL_n$ に関してはこのスカラーは筆者により決定されている．また，Lusztig の公式には，一般 Gelfand-Graev 指標の Fourier 変換に関連した 1 の 4 乗根が含まれている．この 4 乗根こそが，GL_n にはない SL_n の算術的な性質を反映していると考えられる．それはある意味で SL_2 の場合の Gauss 和の符号の拡張に相当する．この 4 乗根は SL_n については Digne-Lehrer-Michel [DLM] により決定されている．

定理の証明の細部については触れることができないので，ここでは N が正則巾零元の場合に，cuspidal 指標を含む family の概指標がどのように指標層の特性関数と関係するか例をあげるにとどめておく．N を正則巾零元とすると，$\overline{A}_N = A_N = Z$ は G の中心に一致する．このとき，

$$\overline{\mathcal{M}}_N = Z_F \times (Z^F)^\wedge, \quad \mathcal{M}_N = Z^F \times Z_{\mathrm{ex}}^\wedge$$

である．ここでは，N を Jordan 標準型に取る．C を G の正則巾単類とし，$u \in C^F$ を Jordan 標準型から選ぶ．$z \in Z^F$ に対し，zC は zu を含む共役類になる．$Z_G(zu)/Z_G^0(zu) \simeq Z$ であり，組 $(z, \eta) \in \mathcal{M}_N$ に対して，交差 cohomology 複体 $\mathrm{IC}(\overline{zC}, \mathcal{E}_\eta)$ が定義される．ただし，$\mathcal{E}_\eta$ は $\eta \in (Z_G(zu)/Z_G^0(zu))^\wedge$ で定まる，zC 上の単純局所系である．このとき (シフトを無視して) $A_{z,\eta}|_{zG_{\mathrm{uni}}} = \mathrm{IC}(\overline{zC}, \eta)$ となる指標層 $A_{z,\eta}$ が唯ひとつ存在する．ただし，G_{uni} は G の巾単多様体である．そこで ϕ_A を適当に決めることにより

$$\chi_{A_{z,\eta}} = \zeta^{-1} R_{z,\eta^{-1}}$$

が成立する．ここで ζ は 1 の 4 乗根で，一般 Springer 対応により $\mathrm{IC}(\overline{C}, \mathcal{E}_\eta)$ に対応するブロックに関する 1 の 4 乗根である (詳細は [L4] 参照).

References

[DLM] F. Digne, G.I. Lerher and J. Michel, On Gel'fand-Graev characters of reductive groups with disconnected centre, J. reine ange. Math., **491** (1997), 131 - 147.

[K] N. Kawanaka, Sintani lifting and Gelfand-Graev representations, in "The Arcata conference on representations of finite groups," Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol.**47–1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 147–163

[L1] G. Lusztig, "Characters of reductive groups over a finite field", Ann. of Math. Studies, Vol.**107**, Princeton Univ Press, Princeton , 1984.

[L2] G. Lusztig, Character sheaves, I Adv. Math. **56** (1985), 193–237, II Adv. in Math. **57** (1985), 226–265, III, Adv. in Math. **57** (1985), 266–315, IV, Adv. in Math. **59** (1986), 1–63, V, Adv. in Math. **61** (1986), 103–155.

[L3] G. Lusztig, On the representations of reductive groups with disconnected centre, Astérisque **168** (1988), 157–166.

[L4] G. Lusztig, A unipotent support for irreducible representations , Adv. in Math., **94** (1992), 139–179.

[S1] T. Shoji, Some generalization of Asai's result for classical groups, Advanced Studies in Pure Math. Vol 6, pp.207–229, Kinokuniya and North-Holland, 1985.

[S2] T. Shoji, Shintani descent for exceptional groups over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 34 (1987), 599–653.

[S3] T. Shoji, Character sheaves and almost characters of reductive groups, Adv. in Math., 111 (1995), 244–313, II Adv. in Math., 111 (1995), 314–354.

[S4] T. Shoji; Shintani descent for special linear groups, J. of Algebra **199** (1998), 175 - 228.