数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 103-114

$\mathcal{W}$代数の表現について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　荒川 知幸

1 Introduction

よく知られているように, Virasoro 代数は $\{L_n; n \in \mathbb{Z}\}$ と c のはるベクトル空間に, 次の交換関係を入れて定義される無限次元のリー環である:

$$[L_n, \mathbf{c}] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{\mathbf{c}}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \quad (n, m \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

このような Virasoro 代数, あるいはアフィンリー環などの無限次元リー環の持つ著しい特色の一つに, 一部の表現の持つ modular 不変性が挙げられる. アフィンリー環の可積分表現, あるいは Virasoro 代数の極小系列表現がそうした表現にあたる.

こうした現象は, 現在では共形場理論, あるいは頂点作用素代数 (vertex operator algebra, 以下 VOA と略) の立場から理解されている. すなわち, "良い VOA の表現" の指標は必然的に modular 不変になる, というわけである (文献 [FZ] 参照). 指標の modular 不変性のこうした捉え方は moonshine 予想の解決などに応用された.

VOA という概念は無限次元リー環のある種の拡張であり, 当然, 無限次元リー環という枠組みでは捉え切れない対称性も取り扱うことができる. そのような VOA として, 代表的なものに $\mathcal{W}$ 代数というものが存在する.

実は, 文献によって $\mathcal{W}$ 代数という言葉の意味するところはまちまちであるが, 一般に Virasoro 代数の一般化を総称して $\mathcal{W}$ 代数と言う. このような $\mathcal{W}$ 代数のなかに, 最も major なものとして, 有限次元複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して定義されるクラスのものが存在し, これを $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ とかく. この立場からいえば

$$\text{Virasoro 代数} = \mathcal{W}(\mathfrak{sl}_2) \text{ 代数}$$

ということになる. 歴史的には, 最初に Fateev-Zamolodchikov が $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3)$ 代数を定義し, 次に Fateev-Lukyanov が A, D 型一般の場合に拡張した. しかし, これらの代数は非常に複雑なものとなった.

例 1.1. $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3) = \mathcal{W}_3$ 代数は generating fields

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}, \quad W(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(n) z^{-n-3}$$

を持ち，これらの間の関係式は次で与えられる．

$$[L(n), L(m)] = (n-m)L(m+n) + \frac{n^3-n}{12}\delta_{n,m}\mathbf{c}, \tag{3}$$

$\mathbf{c}$ は中心元， (4)

$$[L(n), W(m)] = (2n-m)W(n+m), \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&[W(n), W(m)]\\ &= (n-m)\left\{\frac{1}{15}(n+m+3)(n+m+2) - \frac{1}{6}(n+2)(m+2)\right\}L(n+m)\\ &\quad + \frac{16}{22+5\mathbf{c}}(n-m)\Lambda(n+m) + \frac{\mathbf{c}}{360}n(n^2-1)(n^2-4)\delta_{n+m,0}.\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\Lambda(n)$ はここだけの記号であり，

$$\Lambda(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} : L(n+k)L(-k) : -\frac{3}{10}(n+2)(n+3)L(n). \tag{7}$$

(6) 式の右辺に表れる $1/(22+5\mathbf{c})$ は，実際には (6) の両辺に $22+5\mathbf{c}$ が掛かっているものとして理解する．また，(7) に現れる : : は normal ordering である．(7) 式では，無限和が現れているので，$L(n), W(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\mathbf{c}$ たちはブラケットで閉じていないということになる．したがって，$\mathcal{W}_3$ はリー環ではなく，あくまでも VOA として定義される (リー環と見ることもできるが，その場合生成元は無限個必要であり，関係式が書けない)．

Feigin-Frenkel[FF2] は，上のような複雑な $\mathcal{W}$ 代数を直接定義することを避け，$\bar{\mathfrak{g}}$ のアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ から，コホモロジカルな "還元法 (reduction)" によって $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}})$ を定義し，上に述べた場合には知られているものに一致することを示した．Feigin-Frenkel による $\mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}})$ の構成法は，複雑な関係式を直接扱わなくてすむ点，また，同様な "還元法" によって，その表現もアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ の表現から関手的に得ることができるという点でも優れており，現在知られている最も一般的で強力な $\mathcal{W}$ 代数の構成法である．

なお，$\mathcal{W}$ 代数の Feigin-Frenkel 構成法は，最近 Kac-Wakimoto 等によりスーパーリー環の場合へと (非自明に) 拡張され，現在までに知られている全てのスーパーコンフォーマル代数がこの方法で現れるという，著しい結果が得られている (文献 [KRW, KW4] 参照)．

さて，$\mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}})$ の表現のうち，応用上重要なのは，アフィンリー環の可積分表現のように，指標が modular 函数になるような "良い" 性質を持つ既約表現である．Virasoro 代数の場合，このような性質を持つ表現は，極小系列表現 (minimal series representations) と呼ばれた．一般の $\mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}})$ の場合も，このような性質を持つ表現は (conjectual な存在であったが) 極小系列表現と呼ばれている．

$\mathcal{W}$ 代数の極小系列表現に関しては，1992 年頃の Frenkel-Kac-Wakimoto 予想 ([FKW]) が基本的である．Frenkel-Kac-Wakimoto は，Feigin-Frenkel 理論によって，アフィンリー環 $\mathfrak{g}$ の principal admissible 表現が $\mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}})$ の極小系列表現に対応することを予想した．

以下，本稿では，最近の研究 [A1, A2] を基に，Feigin-Frenkel の $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}})$ の表現論について述べる．特に，我々の結果 [A1, A2] により，Frenkel-Kac-Wakimoto

予想はほぼ解決されたことになる．なお，証明等については論文 [A1, A2] を参照されたい．

2 Feigin-Frenkel construction の有限次元版 (Kostant の定理)

Feigin-Frenkel による $\mathcal{W}$ 代数の定義は，技術的には，semi-infinite cohomology という，現在のところあまり一般的でない概念を使う．そこで，彼らの定義を説明する前に，その有限次元版を簡単に説明することにする．図式的には次のようになる．

$$\begin{array}{ccc} \text{有限次元リー環 } \bar{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\text{アフィン化}} & \text{アフィンリー環 } \mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \\ {\scriptstyle \text{Kostant 1978}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \text{Feigin-Frenkel 1990}} \\ \text{中心 } \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\text{アフィン化}} & \mathcal{W} \text{ 代数 } \mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}}) \end{array}$$

以下，引き続き，$\bar{\mathfrak{g}}$ を有限次元複素単純リー代数とし，三角分解 $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{n}}_- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}_+$ を固定する．$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_+ \sqcup \bar{\Delta}_-$ を対応する $\bar{\mathfrak{g}}$ のルートの集合 $\bar{\Delta}$ の分解，$\bar{\Pi} \subset \bar{\Delta}_+$ を単純ルートの集合，$\bar{W}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ のワイル群とする．$U(\bar{\mathfrak{g}})$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の包絡環，$\mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}})$ を $U(\bar{\mathfrak{g}})$ の中心とする．また，$\{e_\alpha,\ f_\alpha,\ (\alpha \in \bar{\Delta}_+),\ h_1, \ldots, h_{\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}}\}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の Chevalley 基底とする．

$\bar{Cl}$ を，$\bar{\mathfrak{n}}_- \oplus \bar{\mathfrak{n}}_-^*$ とその標準的な 2 次形式に付随する Clifford 代数とする．したがって，$\bar{Cl}$ は，次を生成元と関係式とする $\mathbb{C}$ 代数である．

生成元: $\psi_\alpha, \psi_\alpha^*\ (\alpha \in \bar{\Delta}_+)$

関係式: $\{\psi_\alpha, \psi_\beta^*\} = \delta_{\alpha,\beta},\ \{\psi_\alpha, \psi_\beta\} = \{\psi_\alpha^*, \psi_\beta^*\} = 0\ (\alpha, \beta \in \bar{\Delta}_+)$.

ただし，$\{X, Y\} = XY + YX$．また，ψ_α は $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対応する $\bar{Cl}$ の元だとみなしている．$\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-)$, $\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-^*)$ を，それぞれ $\bar{\mathfrak{n}}_-$, $\bar{\mathfrak{n}}_-^*$ の Grassmann 代数とすると，ベクトル空間としては

$$\bar{Cl} = \Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-) \otimes \Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-^*)$$

である．また，$U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{Cl}$ には自然にスーパー代数の構造が入る．

元 $\bar{\partial} \in U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{Cl}$ を次で定義する．

$$\bar{\partial} = \bar{\partial}^{\mathrm{st}} + \bar{\chi},$$
$$\bar{\partial}^{\mathrm{st}} = \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}_+} f_\alpha \psi_\alpha^* - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \bar{\Delta}_+} c_{\alpha,\beta}^{\gamma} \psi_\alpha^* \psi_\beta^* \psi_\gamma, \quad \bar{\chi} = \sum_{\alpha \in \bar{\Pi}} \psi_\alpha^*.$$

ただし，$[f_\alpha, f_\beta] = \sum_{\gamma \in \bar{\Delta}_+} c_{\alpha,\beta}^{\gamma} f_\gamma$．すると，

$$\{\bar{\partial}^{\mathrm{st}}, \bar{\chi}\} = 0,\ (\bar{\partial}^{\mathrm{st}})^2 = (\bar{\chi})^2 = 0$$

が成立することが確かめられる．従って，

$$\bar{\partial}^2 = 0,$$

よって

$$(\mathrm{ad}\,\bar{\partial})^2 = 0 \tag{8}$$

が $U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l$ 上で成立する．ただし，adjoint はスーパー代数での意味．

$U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l$ の次数付けを，

$$\deg\psi_\alpha = 1, \deg\psi_\alpha^* = -1 \ (\alpha\in\bar{\Delta}_+), \quad \deg u = 0 \ (u\in U(\bar{\mathfrak{g}}))$$

で定めると，定義から，$\mathrm{ad}\,\bar{\partial}$ は次数 -1 を持つ．従って，(8) から複体 $(U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l, \mathrm{ad}\,\bar{\partial})$ が定まり，ホモロジー

$$H_\bullet(U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l, \mathrm{ad}\,\bar{\partial}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i(U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l, \mathrm{ad}\,\bar{\partial})$$

が定義される．

$U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l$ の積構造は，$H_\bullet(U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l, \mathrm{ad}\,\bar{\partial})$ に，graded $\mathbb{C}$-algebra の構造を誘導する．このとき，Kostant の結果 [Kos] から，次を示すことができる．

定理 2.1. (1) $H_i(U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l, \mathrm{ad}\,\bar{\partial}) = 0 \ (i\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})$

(2) 対応

$$\begin{array}{ccc} Z(U(\bar{\mathfrak{g}})) & \to & H_0(U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l, \mathrm{ad}\,\bar{\partial}) \\ z & \mapsto & z\otimes 1. \end{array}$$

は $\mathbb{C}$ 代数の同型を与える．

さて，$\bar{\mathfrak{g}}$ 加群 M に対し，$\bar{C}_\bullet(\bar{\mathfrak{n}}_-, M) = M\otimes\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-)$ とおく．$\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-)$ 上には自然に $\bar{C}l$ が作用するので，$\bar{C}_\bullet(\bar{\mathfrak{n}}_-, M)$ は $U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l$ 加群となる．特に $\bar{\partial}$ が作用し，$(\bar{C}_\bullet(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial})$ は複体となる．元 $\bar{\chi}\in\bar{\mathfrak{n}}_-^*\subset\bar{C}l$ は，$\bar{\mathfrak{n}}_-$ の指標を定めることに注意すると，定義から $(\bar{C}_\bullet(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial})$ はリー環のホモロジー $H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M\otimes\mathbb{C}_{\bar{\chi}})$ を計算する Chevalley complex に他ならない．ここで，$\mathbb{C}_{\bar{\chi}}$ は $\bar{\chi}$ の定める $U(\bar{\mathfrak{n}}_-)$ の一次元表現である．故に，

$$H_i(\bar{C}_\bullet(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial}) = H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M\otimes\mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \quad (i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{9}$$

となる．

注意 2.2.

$$H_i(\bar{C}_\bullet(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial}^{\mathrm{st}}) = H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M) \quad (i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

である．

定理 2.1 による同一視

$$\mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) = H_0(U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes\bar{C}l, \mathrm{ad}\,\bar{\partial}) \tag{10}$$

を用いると, (9) から, $U(\bar{\mathfrak{g}})\otimes Cl$ の $\bar{C}_\bullet(\bar{\mathfrak{n}}_-, M)$ への作用は $\mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}})$ のホモロジー $H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M\otimes\mathbb{C}_{\bar{\chi}})$ への作用を誘導することがわかる. したがって, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ についての対応

$$M \rightsquigarrow H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M\otimes\mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \tag{11}$$

は $\bar{\mathfrak{g}}$ 加群の圏から $\mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}})$ 加群の圏への関手を与える.

3 $\mathcal{W}$ 代数の Feigin-Frenkel による定義

Feigin-Frenkel[FF2] は, 中心 $\mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}})$ に関する上の構成をアフィン化することにより $\mathcal{W}$ 代数を定義した. つまり, $\bar{\mathfrak{g}}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ に付随するアフィンリー環

$$\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}\otimes\mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

で置換え, 上の構成を行うのである. このとき, $\bar{\mathfrak{n}}_-$ は

$$L\bar{\mathfrak{n}}_- \underset{\text{def}}{=} \bar{\mathfrak{n}}_-\otimes\mathbb{C}[t, t^{-1}] \subset \mathfrak{g}$$

で置換わる. 対応して, $\bar{C}l$ は $L\bar{\mathfrak{n}}_- \oplus (L\bar{\mathfrak{n}}_-)^*$ とその上の標準的な 2 次形式に付随する Clifford 代数 Cl に置き換わる. ただし, $(L\bar{\mathfrak{n}}_-)^*$ は $L\bar{\mathfrak{n}}_-$ の graded dual. $L\bar{\mathfrak{n}}_-$ の元 $f_\alpha(n) = f_\alpha\otimes t^n$ に対応する Cl の元を $\psi_\alpha(n)$, その双対元を $\psi^*_\alpha(-n)$ と書く. したがって, Cl は次の生成元と関係式を持つ.

生成元: $\psi_\alpha(n), \psi^*_\alpha(n)$ $(\alpha \in \bar{\Delta}_+,\ n \in \mathbb{Z})$
関係式: $\{\psi_\alpha(m), \psi^*_\beta(n)\} = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{m+n,0}$ $(\alpha, \beta \in \bar{\Delta}_+, m, n \in \mathbb{Z})$,
$\{\psi_\alpha(m), \psi_\beta(n)\} = \{\psi^*_\alpha(m), \psi^*_\beta(n)\} = 0$ $(\alpha, \beta \in \bar{\Delta}_+, m, n \in \mathbb{Z})$.

また, $\bar{\partial}$ は次の作用素 ∂ に置き換わる.

$$\partial = \partial^{\mathrm{st}} + \chi.$$

ここで,

$$\partial^{\mathrm{st}} = \sum_{\alpha\in\bar{\Delta}_+, n\in\mathbf{Z}} f_\alpha(-n)\psi^*_\alpha(n) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\bar{\Delta}_+\\ k+l+m=0}} c^\gamma_{\alpha,\beta} : \psi^*_\alpha(k)\psi^*_\beta(l)\psi_\gamma(m) :, \tag{12}$$

$$\chi = \bar{\chi} = \sum_{\alpha\in\bar{\Pi}} \psi^*_\alpha(0). \tag{13}$$

すると, やはり

$$\{\partial, \chi\} = 0,\ \partial^2 = \chi^2 = 0$$

が成立することが確かめられ,

$$\partial^2 = 0,$$

従って,

$$(\mathrm{ad}\,\partial)^2 = 0 \tag{14}$$

となる.

ただし, 式 (12) において無限和が現れるので, ∂ はもはや $U(\mathfrak{g})\otimes Cl$ の元ではない. そこで, $\kappa \in \mathbb{C}$ について

$$U_\kappa(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})/(K - (\kappa - h^\vee))$$

とおき, $U_\kappa(\mathfrak{g})\otimes Cl$ の適当な意味の完備化 ([FZ] の意味での完備化)$\widehat{U_\kappa(\mathfrak{g})\otimes Cl}$ を考え, ∂ をそこの元だとみなす. ここで, $h^\vee$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ の dual Coxeter number. そうしておいて,

$$\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}}) := H_0(\widehat{U_\kappa(\mathfrak{g})\otimes Cl}, \mathrm{ad}\,\partial) \tag{15}$$

と定義し, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ に付随するレベル $\kappa - h^\vee$ の $\mathcal{W}$ 代数と呼ぶ.

ただし, 最初に述べたように本来, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ は VOA(vertex operator algebra) として定義される. したがって, (15) によって定義されているのは, 対応する field たちのフーリエ係数である. しかし, ここでは, VOA を説明する余裕は無いので省略する. VOA としての $\mathcal{W}$ 代数の定義, および上の定義との関係については [FF2, FKW, FB] を参照して頂きたい.

注意 3.1. (1) $\kappa = 0$ のときには Virasoro field が定義できないので, $\mathcal{W}_0(\bar{\mathfrak{g}})$ は VOA ではなく, vertex algebra として定義される. また, $\kappa \neq 0$ のとき, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ の Virasoro field $L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ は次の交換関係を満たす.

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c(\kappa)}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

ただし,

$$c(\kappa) = \mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}} - 12\left(\kappa|\bar{\rho}^\vee|^2 - 2\langle\bar{\rho}, \bar{\rho}^\vee\rangle + \frac{|\bar{\rho}|^2}{\kappa}\right). \tag{16}$$

ここで, $\bar{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\bar{\Delta}_+} \alpha$, $\bar{\rho}^\vee = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\bar{\Delta}_+} \alpha^\vee$.

(2) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合, $\kappa = p/q$ とおくと,

$$c(p/q) = 1 - 6(p-q)^2/pq$$

となる. これは, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $(p, q) = 1$, $p, q \geq 2$ のとき極小系列表現の中心電荷になる.

(3) Introduction で登場した $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3) = \mathcal{W}_3$ と上の $\mathcal{W}_\kappa(\mathfrak{sl}_3)$ との関係は次のようになる.

$$\mathcal{W}_\kappa(\mathfrak{sl}_3) = \mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3)/(\mathbf{c} - c(\kappa)).$$

$\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ については次が基本的である.

定理 3.2 (Frenkel-Ben-Zvi[FB]). $1 = d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_{\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の exponents とする. このとき, conformal dimension $d_1+1, \ldots, d_{\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}}+1$ を持つ $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ の $\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}$ 個の field 達 $W_1(z), W_2(z), \ldots, W_{\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}}(z)$ が存在し, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ は VOA として, これらの field たちで生成される.

$W_1(z)$ は定数倍を除き Virasoro field $L(z)$ に一致する. しかし, 一般の $W_i(z)$ 達の具体形及び交換関係は知られていない.

注意 3.3. $\kappa=0$, すなわち critical level のとき, $\mathcal{W}_0(\bar{\mathfrak{g}})$ は $U_0(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})/(K+h^\vee)$ の完備化 $\widehat{U_0(\mathfrak{g})}$ の中心と一致することが Feigin-Frenkel により知られている.

$\mathcal{O}_\kappa$ をアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ のレベル $\kappa - h^\vee$ の BGG 圏とする; すなわち, $\mathcal{O}_\kappa$ は, 次の条件を満たす加群 M からなる $\mathfrak{g}$ 加群の圏の充満部分圏である;

(1) M はレベル $\kappa - h^\vee$ である (中心 K は $\kappa - h^\vee$ で作用する),

(2) M への, $\mathfrak{g}$ の上三角巾零部分代数 $\mathfrak{n}_+$ の作用は locally nilpotent.

(3) M は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の作用に関してウエイト分解を持ち, 各ウエイト空間は有限次元.

(4) $\mathfrak{h}^*$ の有限部分集合 $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ が存在し, M のウエイトの集合は $\bigcup_{i=1}^{n} \mu_i - Q_+$ に含まれる. ここで, $Q_+ = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha$. また, Δ_+ は $\mathfrak{g}$ の正ルートの集合.

さて, $\mathcal{F}(L\bar{\mathfrak{n}}_-)$ を $\psi_\alpha(n)\mathbf{1} = 0$ $(n>0)$, $\psi^*_\alpha(n)\mathbf{1} = 0$ $(n \ge 0)$ なるベクトル $\mathbf{1}$ で生成される Cl の既約表現とする. $\mathcal{O}_\kappa \ni M$ について, $C_\bullet(L\bar{\mathfrak{n}}_-, M) = M \otimes \mathcal{F}(L\bar{\mathfrak{n}}_-)$ とおき,

$$H_i(M) := H_i(C_\bullet(L\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \partial) \tag{17}$$

と定める. ただし, 有限次元の場合と異なり, 添字 i は $\mathbb{Z}$ 全体を動く.

注意 3.4. $H_\bullet(M) = H_{\frac{\infty}{2}+\bullet}(L\bar{\mathfrak{n}}_-, M \otimes \mathbb{C}_\chi)$ である. ただし, 右辺は Feigin の semi-infinite homology. また, $\mathbb{C}_\chi$ は指標 $\chi : L\bar{\mathfrak{n}}_- \to \mathbb{C}$ によって定まる $U(L\bar{\mathfrak{n}}_-)$ の一次元表現.

かくして, $i \in \mathbb{Z}$ をパラメーターとして持つ, $\mathcal{O}_\kappa$ から $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ 加群の圏への関手

$$M \rightsquigarrow H_i(M) \tag{18}$$

を得た.

$M(\lambda)$ を最高ウエイト λ の Verma 加群, $L(\lambda)$ を $M(\lambda)$ の唯一の既約商加群とする. 次は本質的には教科書 [FB] の結果である.

命題 3.5. 任意の λ について次が成立する.

$$H_i(M(\lambda)) = 0 \quad (i \neq 0),$$

$$\mathrm{ch}\, H_0(M(\lambda)) = \frac{q^{\frac{|\lambda+\rho|^2}{2\kappa}}}{\eta(\tau)^{\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}}}.$$

ここで, $\mathrm{ch}\,H_0(M(\lambda))$ は正規化された指標. すなわち,

$$\mathrm{ch}\,H_0(M(\lambda)) = \mathrm{tr}_{H_0(M(\lambda))}\, q^{L_0 - \frac{c(\kappa)}{24}},$$

また, $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{i\geq 1}(1-q^i)$, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$.

4 Frenkel-Kac-Wakimoto 予想

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ で λ の $\bar{\mathfrak{h}}$ への制限を表す. $\kappa \in \mathbb{C}$ について, $\mathfrak{h}^*_\kappa$ をレベル $\kappa - h^\vee$ のウエイトの集合とする;

$$\mathfrak{h}^*_\kappa = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*; \langle \lambda + \rho, K\rangle = \kappa\}.$$

$\Delta^{\mathrm{re}} = \Delta^{\mathrm{re}}_+ \sqcup \Delta^{\mathrm{re}}_-$ を $\mathfrak{g}$ の実ルートの集合, W を $\mathfrak{g}$ のワイル群とする. また, $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ について,

$$R^\Lambda = \{\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}; \langle \Lambda + \rho, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}\} \subset \Delta^{\mathrm{re}} \tag{19}$$

とし, W^Λ を Λ の integral Weyl group とする. すなわち,

$$W^\Lambda = \langle s_\alpha; \alpha \in R^\Lambda\rangle \subset W.$$

ここで, s_α は α に付随する reflection.

定義 4.1 (Kac-Wakimoto[KW2]). $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ は次を満たすとき, principal admissible であると呼ばれる.

(1) Λ は regular dominant である. すなわち, 任意の $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}_+$ について $\langle \Lambda + \rho, \alpha^\vee\rangle \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$.

(2) $W^\Lambda \cong W$.

Λ が principal admissible のとき, $L(\Lambda)$ は principal admissible module と呼ばれる. principal admissible module は modular property を持つ ([KW1, KW2]).

注意 4.2. $\mathfrak{g}$ の既約な可積分表現は principal admissible module である. しかし, V が $\mathfrak{g}$ の可積分表現のときは, $H_\bullet(V) \equiv 0$ となってしまうことが知られている ([FKW]).

Pr^κ をレベル $\kappa - h^\vee$ の principal admissible weight のなす集合とする. 次が知られている.

命題 4.3 (Kac-Wakimoto[KW2]).
$Pr^\kappa \neq \emptyset \iff \kappa = p/q$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq h^\vee}$, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $(p,q) = 1$, $(q, r^\vee) = 1$. ただし, $r^\vee$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ の lacing number.

定義 4.4. (1) $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ は全ての $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+$ について $\langle \Lambda, \bar{\alpha}^\vee\rangle \notin \mathbb{Z}$ であるとき非退化であると呼ばれる.

(2) $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ は $\bar{\Lambda}$ が非退化なとき, すなわち, 全ての $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+$ について $\langle \Lambda, \bar{\alpha}^\vee\rangle \notin \mathbb{Z}$ であるとき非退化であると呼ばれる.

$Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}}$ で非退化な principal admissible weight のなす Pr^{κ} の部分集合を表す. もちろん, 支配的整ウエイトは $Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}}$ に入らない.

次の事実が知られている.

命題 4.5. $\kappa = p/q$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq h^{\vee}}$, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $(p,q)=1$, $(q, r^{\vee})=1$ のとき,
$Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}} \neq \emptyset \iff$ さらに $q \geq h (= \bar{\mathfrak{g}}$ の Coxeter 数$)$.

例 4.6. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のとき, $Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}} \neq \emptyset$ である必要十分条件は, $\kappa = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $(p,q)=1$ となる. つまり, 極小系列表現の中心電荷に丁度対応している (注意 3.1(2) 参照).

さて, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合は, これまで知られていることを組み合わせると次がわかる.

命題 4.7 ([FKW]). $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ かつ $\Lambda \in Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}}$ のとき次が成立する.

(1) $H_i(L(\Lambda)) = 0$ $(i \neq 0)$.

(2) $H_0(L(\Lambda))$ は Virasoro 代数の既約な極小系列表現.

Frenkel-Kac-Wakimoto [FKW] は一般に次が成立することを予想した.

予想 1 (Frenkel-Kac-Wakimoto[FKW]). $\Lambda \in Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}}$ のとき次が成立する.

(1) $H_i(L(\Lambda)) = 0$ $(i \neq 0)$

(2) $H_0(L(\Lambda))$ は既約な $\mathcal{W}_{\kappa}(\bar{\mathfrak{g}})$ 加群.

注意 4.8. 予想 (1) を認めると, Euler-Poincaré principal から, $\Lambda \in Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}}$ についての $H_0(L(\Lambda))$ の正規化された指標 $\mathrm{ch}\, H_0(L(\Lambda))$ が次の様に計算される.

$$\mathrm{ch}\, H_0(L(\Lambda)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \, \mathrm{tr}_{H_i(L(\Lambda))}\, q^{L_0 - \frac{c(\kappa)}{24}} \tag{20}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \, \mathrm{tr}_{C_i(L\bar{\mathfrak{n}}_-, L(\Lambda))}\, q^{L_0 - \frac{c(\kappa)}{24}}. \tag{21}$$

Frenkel-Kac-Wakimoto [FKW] は (21) の右辺を計算し, それが, modular property を持つことをを示した ($q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$).

5 $\mathcal{W}$ 代数の既約表現のパラメータ付け

標準的な議論により, $\mathcal{W}_{\kappa}(\bar{\mathfrak{g}})$ の最高ウエイト既約表現が, その最高ウエイト, すなわち生成場 $W_1(z), \ldots, W_{\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}}(z)$ の 0-mode $W_1(0), \ldots, W_{\mathrm{rank}\,\bar{\mathfrak{g}}}(0)$ の固有値でパラメータ付けされる事は容易にわかる. しかし, $W_i(z)$ 達の具体形がわからないため, 現在のところこのパラメータ付けは実用的ではない.

一方, $\mathcal{W}_{\kappa}(\bar{\mathfrak{g}})$ は実際には VOA として定義される. 一般に, V を VOA としたとき, V に対応する Zhu 代数 $\mathcal{A}(V)$ というものが定義され, 次が成立する.

命題 5.1 (Zhu). L_0 固有空間分解を持つ V の既約表現と $\mathcal{A}(V)$ の既約表現とは一対一に対応する

ここでは, Zhu 代数の定義はしない ([FZ] 参照) が, 上の命題において, V の既約加群 M に対応する $\mathcal{A}(V)$ の既約表現は, M の L_0 の最低固有値に対応する固有空間である.

さて, 定理 2.1 を使い, 次を示すことができる.

定理 5.2 ([A2]). $\mathbb{C}$ 代数としての次の自然な同型が存在する

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) \tag{22}$$

注意 5.3. 定理 5.2 の同一視のもとで,

$$[L_0] = \frac{1}{2\kappa}\Omega - \frac{\kappa}{2}|\bar{\rho}^\vee|^2 + \langle\bar{\rho}, \bar{\rho}^\vee\rangle,$$

となる. ここで, $[L_0]$ は L_0 の $\mathcal{A}(\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}}))$ の中でのクラスで, Ω は $U(\bar{\mathfrak{g}})$ の Casimir 元である.

Harish-Chandra isomorphim を $\gamma : \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} S(\bar{\mathfrak{h}})^{\bar{W}}$ とし,

$$\gamma_{\bar{\lambda}} = (\text{evaluation at } \bar{\lambda} - \bar{\rho}) \circ \gamma : \mathcal{A}(\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})) = \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) \to \mathbb{C}$$

とおく. $\mathbf{L}(\gamma_{\bar{\lambda}})$ を, infinitesimal character $\gamma_{\bar{\lambda}}$ に, 命題 5.1 によって対応する $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ の既約表現とする.

定理 5.4.

$$\{\mathbf{L}(\gamma_{\bar{\lambda}}); \bar{\lambda} + \bar{\rho} \in \bar{W}\backslash\bar{\mathfrak{h}}^*\}$$

は L_0 固有値分解を持つ既約な $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ 加群の完全代表系である.

6 主結果

以下, κ は non-critical, すなわち, $\kappa \neq 0$ であるとする.

$\Lambda \in \mathfrak{h}_\kappa^*$ について, その local composition factor に $L(w \circ \Lambda)$, $w \in W^\Lambda$, に同型な既約表現しか現れない加群からなる $\mathcal{O}_\kappa$ の充満部分圏を $\mathcal{O}_\kappa^{[\Lambda]}$ で表す. すると, 圏として,

$$\mathcal{O}_\kappa = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{h}_\kappa^*/\sim} \mathcal{O}_\kappa^{[\Lambda]}$$

となる. ここで, $\sim$ は $\lambda \sim \mu \Leftrightarrow \mu \in W^\lambda \circ \lambda$ で定義された同値関係である.

定理 6.1. $\Lambda \in \mathfrak{h}_\kappa^*$ が非退化であるとき, 以下が成立する.

(1) ([A1]) 任意の $\mathcal{O}_\kappa^{[\Lambda]}$ の対象 V について $H_i(V) = \{0\}$ $(i \neq 0)$.

(2) ([A2]) $H_0(L(w \circ \Lambda)) = \mathbf{L}(\gamma_{\overline{w \circ \Lambda}})$ $(\forall w \in W^\Lambda)$.

注意 6.2. Λ が非退化であることと, $w \circ \Lambda$ $(w \in W^{\Lambda})$ が非退化であることは同値である.

上の定理 6.1 を $\Lambda \in Pr^{\kappa}_{\mathrm{non-deg}}$ の場合に適用すれば, 先に述べた Frenkel-Kac-Wakimoto の予想は解けた事になる. したがって, modular property を持つ $\mathcal{W}_{\kappa}(\bar{\mathfrak{g}})$ の既約表現が得られた.

さらに, 一般に, $\Lambda \in \mathfrak{h}^*_{\kappa}$ が非退化なとき, 定理 6.1(1) より, 対応

$$V \rightsquigarrow H_0(V)$$

は圏 $\mathcal{O}^{[\Lambda]}_{\kappa}$ から $\mathcal{W}_{\kappa}(\mathfrak{g})$ 加群の圏への完全関手を与える. 従って, 命題 3.5 とあわせると, 非退化な $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ に対応する $\mathcal{W}_{\kappa}(\bar{\mathfrak{g}})$ の既約表現 $\mathbf{L}(\gamma_{\bar{\lambda}})$ の指標がわかったことになる.

References

[A1] Arakawa, T.; Vanishing of cohomology associated to quantized Drinfeld-Sokolov reduction, math.QA/0303172, to appear in Int. Math. Res. Not.

[A2] Arakawa, T.; Quantized reduction and representations of $\mathcal{W}$-algebras, to appear

[Bac] Backelin, E.; Representation of the category $\mathcal{O}$ in Whittaker categories. Int. Math. Res. Not. 1997, no. 4, 153–172.

[Fei] Feigin, B. L.: Semi-infinite homology of Lie, Kac-Moody and Virasoro algebras. Uspekhi Mat. Nauk 39 (1984), no. 2(236), 195–196.

[FF1] Feigin, Boris L. and Frenkel, Edward V.: Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, Comm. Math. Phys., 128, 1990, no. 1, 161–189

[FF2] Feigin, B., Frenkel, E.: Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikii algebras. Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991), 197–215, Adv. Set. Math. Phys., 16, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 199

[Fre] Frenkel, E; $\mathcal{W}$-algebras and Langlands-Drinfeld correspondence. New symmetry principles in quantum field theory (Cargse, 1991), 433–447, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 295, Plenum, New York, 1992.

[FB] Frenkel, E., Ben-Zvi, D.: Vertex algebras and algebraic curves. Mathematical Surveys and Monographs, 88.

[FKW] Frenkel, E., Kac, V., Wakimoto, M.: Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reduction. Comm. Math. Phys. 147 (1992), no. 2, 295–328.

[FM] Frenkel, I. B., F.Malikov, F.; Kazhdan-Lusztig tensoring and Harish-Chandra categories, q-alg/9703010

[FZ] Frenkel, I. B., Zhu, Y Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, Duke Math. J. 66 (1992), no. 1, 123–168.

[KRW] Kac, V. G., Roan, Shi-shyr., Wakimoto, M.: math-ph/0302015.

[KW1] Kac, V. G., Wakimoto, M.: Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 85 (1988), no. 14, 4956–4960.

[KW2] Kac, V. G., Wakimoto, M.: Classification of modular invariant representations of affine algebras. Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), 138–177, Adv. Set. Math. Phys., 7, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.

[KW3] Kac, V. G., Wakimoto, M.: Branching functions for winding subalgebras and tensor products. Acta Applicandae Math. 21, 3-39 (1990)

[KW4] Kac, V. G., Wakimoto, M.: math-ph/0304011

[Kos] Kostant, B.: On Whittaker vectors and representation theory. Invent. Math. 48 (1978), no. 2, 101–184. 329–387.

[Zhu] Zhu, Y.: Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. American Math. Soc. vol. 9, No. 1, 1996, 237-302.

[V1] Voronov, A. A.: Semi-infinite homological algebra. Invent. Math. 113 (1993), no. 1, 103–146.

[V2] Voronov, A. A.: Semi-infinite induction and Wakimoto modules. Amer. J. Math. 121 (1999), no. 5, 1079–1094.