数理解析研究所講究録 1383 巻 2004 年 103-113

Quiet Accumulation Game について

兵庫県立大学経営学部　菊田　健作 (Kensaku Kikuta)
School of Business Administration
University of Hyogo

1. はじめに

探索理論 (Search Theory) の対象としては，遭難漁船や魚群の捜索等のほか，通信線などの装置の故障の発見，鉱脈探し，犯人の捜査，図書館での本探し，ガンなどの予防検診，スーパー・マーケットにおける商品の配列、またコンピュータ関係では、プログラムのバグ箇所の探索、コンピュータウィルスのチェック、ハッカーの探索など種々考えられる。これらの問題は数学モデルとして抽象化されて表現され、意思決定者の最適方策を解析的に厳密に求める、あるいはシミュレーション等によって近似的に求める、というように現在でも盛んに研究されている。

本稿の目的は、査察や検証の２人ゼロ和ゲームモデルの一つである Accumulation Game を紹介し、研究成果や今後の研究課題等について述べることである。ここであげられている定理の証明は参考文献 [4], [9],[10] および [11] を参照されたい。[8] は Accumulation Game 全般についてのサーヴェイである。[1], [2], [3] および [7] は探索ゲーム (Search Game) について解説されている成書である。特に [1] は最近のものであり Accumulation Game の研究成果の一部が紹介されている。また、[3] においては、Accumulation Game と同様に多数の２人ゼロ和探索ゲームが紹介されており、種々のモデルにおいて解析的に厳密解を追求して得られた成果が述べられている。Accumulation Game を分析する際に参考になる本である。[5] および [12] は探索理論について手際よくまとめたサーヴェイである。[6] は探索理論の特集号である。

本報告の第２節では、Accumulation Game について概説した後、Noisy の場合に得られている成果の一部を述べる。第３節では、Quiet Accumulation Game についてこれまでに得られた成果を紹介する。第４節においては，探索領域が有限グラフ上のノード全体であり探索者の移動がグラフの辺上に制限された場合に Quiet Accumulation Game の最近の研究について紹介し、最後に第５節において、当面の研究課題について述べる。

2.Accumulation Game

本節では Accumulation Game について概説する。まず、探索領域が離散的で object も離散の場合のモデルを述べる。

<u>モデル１.</u>

- ２人の Players (Hider と Seeker) がいる。
- n 個の箱があり、１回目はすべての箱が空 である。
- 毎回（たかだか、k 回）Hider と Seeker は同時に次のように行動する：
  Hider は a 個の object を n 個の箱のうち、空である箱のいずれかに隠す。ただし各箱に高々１個とする。Seeker は Hider の選択を知らされずに、b 個の箱を調べる。
- Seeker が object が隠されている箱を調べたとき、確率１でそれを見つける。
- k 回のうちの任意の回の終了後、object が N 個以上の箱に隠された状態が生ずれば Hider の勝ちでありゲームはそこで終了する。
- k 回までのすべての回において、object が N 個以上の箱に隠された状態が生じないときは Seeker の勝ちであるとする。

モデル1を理解してもらうために次の例をおく。

例1．　$n=3, k=3, N=2, a=b=1$。

（1）　Hider が勝つ場合：その1。

	箱1	箱2	箱3
1回目の選択	Hider	Seeker	
1回目終了時	Object		
2回目の選択		Hider	Seeker
2回目終了時	Object	Object	

2回目終了時に $N=2$ 個隠された状態が生じたので Hider の勝ちである。

（2）　Hider が勝つ場合：その2。

	箱1	箱2	箱3
1回目の選択	Hider	Seeker	
1回目終了時	Object		
2回目の選択	Seeker	Hider	
2回目終了時		Object	
3回目の選択	Seeker		Hider
3回目終了時		Object	Object

3回目終了時に $N=2$ 個隠された状態が生じたので Hider の勝ちである。

（3）　Seeker が勝つ場合：その1。

	箱1	箱2	箱3
1回目の選択	Hider	Seeker	
1回目終了時	Object		
2回目の選択		Hider,Seeker	
2回目終了時	Object		
3回目の選択	Seeker		Hider
3回目終了時			Object

3回目終了時までに $N=2$ 個隠された状態が生じなかったので Seeker の勝ちである。

（4）　Seeker が勝つ場合：その2。

	箱1	箱2	箱3
1回目の選択	Hider,Seeker		
1回目終了時			
2回目の選択		Hider,Seeker	
2回目終了時			

2回目終了時までに $N=2$ 個隠された状態が生じず、しかも残り1回で $N=2$ 個隠された状態が生じることはないので Seeker の勝ちである。

次の表1のようにモデル1のヴァリエーションを考えることができる。

表 1. p.396 of Kikuta/Ruckle (1997)

Feature	*Easy alternative*	*Hard alternative*
Type of media	Discrete	Continuous
Nature of location	Discrete	Continuous
Relation of locations	Independent	Related
Numcer of searches per turn	Fixed	Variable
Finding probability	1	$p \in [0,1]$
Hiding rules	One of each location/ all at one location	Variable
Time	Limited	Unlimited
Movement of objects	No	Yes
Result of finding	Seeker wins/seizes object	Seizure or more searches
data from other locations	No	Yes
Seeker strategy	Random	Game theoretic optimal
Hider information	Location of each/no search	Location of finds

モデル 1 の説明では Hider が得る情報量に言及していなかった。毎回の終了後に、Seeker が調べた箱の番号を Hider がどの程度知ることができるかによって、ゲームを次の 3 つのタイプに分ける。

(i) Noisy Case: 毎回の終了後に, Hider はその回に Seeker が調べた箱の番号を知ることができる。

(ii) Quiet Case: 毎回の終了後に, その回に Seeker が object を見つけたときのみ、Hider はその回に Seeker が調べた箱の番号を知ることができる。

(iii) Very Quiet Case: 毎回の終了後に, Hider は Seeker が調べた箱の番号を知ることができない。

相手の行動についての情報量から考えると、Seeker にとって Very Quiet Case が最も有利であり、Noisy Case が最も不利である。以下本節では、Noisy Case の解析結果を報告する。

ある回の終了後, 発見されずに残っている object 数を M とする。あと k 回残っている時、以後最適にふるまった時のゲームの値を $V(M,k)$ で表すこととする。次の再帰方程式が成り立つ：

$$V(M,k) = \sum_{i=0}^{b} P_M(i) V(M+a-i, k-1),$$

$$V(M,k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \text{ and } M<N; \\ 1, & \text{if } M=N, \end{cases}$$

ここに, $P_M(i) = \binom{M+a}{i} \times \binom{n-M-a}{b-i} / \binom{n}{b}$。この再帰方程式を使って計算した例を以下に示す。

例 2. $n=100, N=42, a=b=3, M=0, k=20$ のとき, ゲームの値は 0.85324 である。$n=100, N=42, a=b=3, M=22, k=10$ のとき, ゲームの値は 0.5389 である。$n=100, N=30, a=2, b=6$ での計算例を以下の表に示す。

表 2. p.406 of Kikuta/Ruckle (1997)

k/M	0	3	15	25	28
5	0	0	0	0.47536	0.91556
10	0	0	0.05621	0.93249	0.99325
15	0.00002	0.00249	0.62132	0.99315	0.99994
20	0.14001	0.30757	0.93538	0.99934	0.99995
25	0.69564	0.81726	0.99234	0.99994	0.99999

さらに，発見確率を 0.6 としたら，次のようになる．

表 3. p.406 of Kikuta/Ruckle (1997)

k/M	0	3	15	25	28
5	0	0	0	0.9091	0.9947
10	0	0	0.05833	0.9991	1
15	0.0059	0.1496	0.9871	1	1
20	0.79	0.9231	0.9998	1	1
25	0.9942	0.9984	1	1	1

モデル2.

unit interval $I=[0,1]$ でのゲームを考える。Seeker は毎回、長さ $b<1$ の I の部分閉区間 A を調べる。一方、Hider は a 単位の物質を、上の境界が I 上の連続関数 f の形をとり $\int_0^1 f(t)dt=a$ を満たすように、I 上に隠す。 $\int_{I\setminus A} f(t)dt \geq 1$ ならば Hider の勝ち、そうでないときは Seeker の勝ちである。$b<1$ に対し、$p(b)=p$ を I を覆うのに必要な長さ b の閉区間の最小数であると定義する。

Seeker の被覆戦略とは、確率 $1/p$ で区間 $[j/p,(j+1)/p], j=0,1,\ldots,p-1$ を選ぶ戦略である。次に Hider の戦略 $P(t_0,M)$ を次の関数で表されるものとする.

$$f_{t_0,\epsilon}(t)=\begin{cases}\frac{M(t-t_0-\epsilon)}{\epsilon^2} & \text{if } t_0-\epsilon\leq t\leq t_0;\\ \frac{M(t_0+\epsilon-t)}{\epsilon^2} & \text{if } t_0\leq t\leq t_0+\epsilon;\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

1回限り（i.e., $k=1$）のゲームにおいて、$1\leq a<\frac{p}{p-1}$ ならば、ゲームの値は $\frac{p-1}{p}$ である。上記の被覆戦略は Seeker の一つの最適戦略である。また、$P(\frac{j}{p-1},\frac{a}{p}), j=0,1,\ldots,p-1$ を確率 $\frac{1}{p}$ で選ぶ戦略は Hider の一つの最適戦略である。

モデル3.

長さ 1 の円周 C 上でのゲームを考える。$c_1,c_2\in C \quad mod \quad 1$ に対し $A(c_1,c_2)$ を c_1 から c_2 まで時計回りの開いた弧であるとする。C 上の点 c を一様分布によって選び、次に弧 $A(c,c+\delta c)$ を選ぶ戦略を、Seeker の一様戦略と呼ぶ。C 上の関数 $f(c)=a, \forall c\in C$ を Hider の一様戦略と呼ぶ。この戦略は、C 上のゲームでのそれぞれの player の最適戦略となり（ただし、Hider の場合は、$a\geq\frac{1}{1-b}$ のとき）、ゲームの値は次のようになる。$a<1$ のとき、0, $a\geq\frac{1}{1-b}$ のとき、1。しかし、$1\geq a<\frac{1}{1-b}$ のときは複雑である。

3.Quiet Accumulation Game

Quiet Accumulation Game（つまり、Accumulation Game の Quiet Case）は、Noisy Case に比して、分析された例が少ない。その理由の一つは player の持つ情報構造が複雑になることである。本節では、Quiet Accumulation Game のスペシアルケースを分析した論文 [9] および Quiet Accumulation Game のヴァリエーションを調べた論文 [10] の内容を述べる。本節では $a=b=1$ と仮定する。

3．1. Quiet Accumulation Game with $N=2, k=3$

モデル1において、Quiet Case である。回数（$k=3$）は Hider の目標個数（$N=2$）より1だけ多いので、2回目終了時に隠された object の個数が0であれば、Hider の負けである。各回の outcome を次のように定義する。

$\mathcal{N}$: Seeker がその回に目標物を見つけなかった。

$\mathcal{F}$: Seeker がその回に目標物を見つけた。

さらに、Hider の側から見た次の記号を用いる。

$\mathcal{F}i$: 2回目に、Seeker は、Hider が i 回め $(i=1,2)$ に隠した目標物を見つけた。

ゲームの定義により、次の6通りの outcome の列が起こりえる。

$$\mathcal{NN}, \mathcal{NFN}, \mathcal{FNN}, \mathcal{NFF}, \mathcal{FNF}, \mathcal{FF}$$

最初の3つは Hider が勝つ場合であり、その他は Seeker が勝つ場合である。Hider の純戦略を $\bar{h} \equiv (h_1, \bar{h}_N, \bar{h}_F)$ と表し、次のように定義する。ここに $\bar{h}_N \equiv (h_2^N, h_3^{F1}, h_3^{F2})$ と $\bar{h}_F \equiv (h_2^F, h_3^N)$ は第1回目の outcome がそれぞれ $\mathcal{N}$ and $\mathcal{F}$ であった場合の2、3回目の選択である。各添字は選択がなされる回を表す。

h_1:第1回目の Hider の選択
$h_i^N, i=2,3$:$(i-1)-$ 回目の outcome が $\mathcal{N}$ であったときの i 回目の選択
h_2^F: 1回目の outcome が $\mathcal{F}$ であったときの2回目の選択
$h_3^{Fi}, i=1,2$: 2回目の outcome が $\mathcal{F}i$ であったときの3回目の選択

Seeker の純戦略を $\bar{s} \equiv (s_1, \bar{s}_N, \bar{s}_F)$ と表し、次のように定義する。ここに $\bar{s}_N \equiv (s_2^N, s_3^F)$ および $\bar{s}_F \equiv (s_2^F, s_3^N)$。各添字は選択がなされる回を表す。

s_1:第1回目の Seeker の選択
$s_i^N, i=2,3$:$(i-1)-$ 回目の outcome が $\mathcal{N}$ であったときの i 回目の選択
$s_i^F, i=2,3$:$(i-1)-$ 回目の outcome が $\mathcal{F}$ であったときの i 回目の選択

両 player の選択は逐次に行われるので行動戦略を考える。Seeker の行動戦略は

$$\bar{q} \equiv (q(\cdot), q(\cdot|s_1,\mathcal{N}), q(\cdot|s_1,\mathcal{N},s_2^N,\mathcal{F}), q(\cdot|s_1,\mathcal{F}), q(\cdot|s_1,\mathcal{F},s_2^F,\mathcal{N})),$$

で与えられる。ここに、各成分は Seeker の各決定の点における確率分布である。$\bar{q}_N \equiv (q(\cdot|s_1,\mathcal{N}), q(\cdot|s_1,\mathcal{N},s_2^N,\mathcal{F}))$ および $\bar{q}_F \equiv (q(\cdot|s_1,\mathcal{F}), q(\cdot|s_1,\mathcal{F},s_2^F,\mathcal{N}))$ とおく。一方、Hider の行動戦略は

$$\bar{p} \equiv (p(\cdot), p(\cdot|h_1,\mathcal{N}), p(\cdot|h_1,\mathcal{N},h_2^N,\mathcal{F}1), p(\cdot|h_1,\mathcal{N},h_2^N,\mathcal{F}2), p(\cdot|h_1,\mathcal{F}), p(\cdot|h_1,\mathcal{F},h_2^F,\mathcal{N}))$$

で与えられる。 $\bar{p}_N \equiv (p(\cdot|h_1,\mathcal{N}), p(\cdot|h_1,\mathcal{N},h_2^N,\mathcal{F}1), p(\cdot|h_1,\mathcal{N},h_2^N,\mathcal{F}2))$ および $\bar{p}_F \equiv (p(\cdot|h_1,\mathcal{F}), p(\cdot|h_1,\mathcal{F},h_2^F,\mathcal{N}))$ とおく。$f(\bar{p},\bar{q})$ は Hider と Seeker がそれぞれ行動戦略 $\bar{p}$ と $\bar{q}$ を用いたとき Hider が勝つ確率を表す。

An optimal strategy for the seeker

ゲームの minimax 値とそれに対応する Seeker の行動戦略を与えよう。次の図はゲームツリーではないが、Seeker が行動戦略を用い Hider が純戦略を用いたときの Hider の期待利得を計算するときに有用である。

$$
h_1 \begin{cases}
\xrightarrow[s_1 \neq h_1]{N} \; h_2^N \begin{cases}
\xrightarrow[s_2^N \neq h_1, h_2^N]{N} \; 1 \\
\xrightarrow[s_2^N = h_2^N]{F} \; h_3^{F2} \; \xrightarrow[s_3^F \neq h_1, h_3^{F2}]{N} \; 1 \\
\xrightarrow[s_2^N = h_1]{F} \; h_3^{F1} \; \xrightarrow[s_3^F \neq h_2^N, h_3^{F1}]{N} \; 1
\end{cases} \\
\\
\xrightarrow[s_1 = h_1]{F} \; h_2^F \; \xrightarrow[s_2^F \neq h_2^F]{N} \; h_3^N \; \xrightarrow[s_3^N \neq h_2^F, h_3^N]{N} \; 1
\end{cases}
$$

図 1

Seeker の問題は Hider が勝つ確率を最小にすることである、すなわち行動戦略 $\bar{q}$ を

$$max\{f(\bar{h}, \bar{q}) : \bar{h} = (h_1, \bar{h}_N, \bar{h}_F)\}$$

が最小になるように選ぶことである。第 1 回目には Seeker は箱を区別できないので、最適戦略の下では各箱を等確率で選ぶ、すなわち、すべての $s_1 \in I$ に対し $q(s_1) = \frac{1}{n}$。したがって、Seeker は目標物を確率 $\frac{1}{n}$ で見つける。もし Seeker が目標物を見つけたなら、Seeker と Hider はそれぞれ戦略 $\bar{q}_F$ と $\bar{h}_F$ を用いる: 見つけなかったならば, Seeker と Hider はそれぞれ戦略 $\bar{q}_N$ と $\bar{h}_N$ を用いる。Hider の期待利得は $f(\bar{h}, \bar{q}) = \frac{n-1}{n} f(\bar{h_N}, \bar{q_N}) + \frac{1}{n} f(\bar{h_F}, \bar{q_F})$ と計算される、ここに $\bar{q} = ((\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}), \bar{q}_N, \bar{q}_F)$ および $\bar{h} = (h_1, \bar{h}_N, \bar{h}_F)$ である。このようにして、1 回目の outcome に応じて、$\mathcal{NN}$、$\mathcal{NFN}$ の場合と $\mathcal{FNN}$ の場合に別々に計算できることがわかる。この議論は Hider の戦略を考えるときにも適用できる。よって以下では、両 player の minimax または maximin 戦略を場合に応じて別々に与える。

$\mathcal{NN}$ と $\mathcal{NFN}$ の場合の **Seeker** の戦略

まず、$\mathcal{NN}$ と $\mathcal{NFN}$ の場合の Seeker の戦略を定義する。 $s_1 \neq h_1$ と仮定して,

$$q(s_2^N | s_1, \mathcal{N}) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{for } s_2^N \in I \setminus \{s_1\}; \\ 0, & \text{for } s_2^N = s_1. \end{cases} \tag{1}$$

とおく。$s_1 \neq h_1$ および $s_2^N \in \{h_2^N, h_1\}$ と仮定して,

$$q(s_3^F | s_1, \mathcal{N}, s_2^N, \mathcal{F}) = \begin{cases} 0, & \text{for } s_3^F = s_1; \\ \frac{1}{n}, & \text{for } s_3^F = s_2^N; \\ \frac{n-1}{n(n-2)}, & \text{for } s_3^F \in I \setminus \{s_1, s_2^N\}. \end{cases} \tag{2}$$

と定義する。(1) により $s_2^N \neq s_1$ である。(1) と (2) は、目標物を見つけることができなかった箱以外を選択することを意味している。それぞれ $\mathcal{NN}$ や $\mathcal{NFN}$ の場合に、Hider が任意の戦略 $\bar{h}$ を用いた場合に、ケースバイケースで Hider の期待利得を計算することにより、期待利得の最大値は $\frac{(n-2)^2}{{}_nP_2} + \frac{1}{{}_nP_2}\{n-2+\frac{(n-1)(n-3)^2}{n(n-2)}\}$ であることがわかる。

$\mathcal{FNN}$ の場合の **Seeker** の戦略

次に、$\mathcal{FNN}$ の場合の Seeker の戦略を定義する。$s_1 = h_1$ と仮定して、

$$q(s_2^F | s_1, \mathcal{F}) = \frac{1}{n} \text{ for all } s_2^F \in I. \tag{3}$$

$$q(s_3^N | s_1, \mathcal{F}, s_2^F, \mathcal{N}) = \begin{cases} 0, & \text{for } s_3^N = s_2^F; \\ \frac{1}{n-1}, & \text{for } s_3^N \in I \setminus \{s_2^F\}. \end{cases} \tag{4}$$

と定義する。$\mathcal{FNN}$ の場合に、Hider が任意の戦略 $\bar{h}$ を用いた場合に、ケースバイケースで Hider の期待利得を計算することにより、期待利得の最大値は $\frac{(n-2)^2}{n^2(n-1)}$ であることがわかる。 ゆえに、Seeker が上記の戦略 (1) – (4) を用いるならば Hider の期待利得を高々

$$P_H^* \equiv \frac{1}{n}\frac{(n-2)^2}{{}_nP_2} + \frac{(n-2)^2}{{}_nP_2} + \frac{1}{{}_nP_2}\{n-2+\frac{(n-1)(n-3)^2}{n(n-2)}\}$$

とすることができる。

Hider の最適戦略

ここでは、ゲームの maximin 値とそれに対応する Hider の行動戦略を与える。次の図はゲームツリーではないが、Hider が行動戦略を用い Seeker が純戦略を用いたときの Hider の期待利得を計算するときに有用である。

$$s_1 \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow[h_1\neq s_1,s_2^N,s_3^N]{N} \; s_2^N \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow[h_2^N\neq h_1,s_2^N]{N} \; 1 \\ \xrightarrow[h_2^N=s_2^N]{F} \; s_3^F \; \xrightarrow[h_3^{F2}\neq\ h_1,s_3^F]{N} \; 1 \end{array}\right. \\ \xrightarrow[h_1=s_1]{F} \; s_2^F \; \xrightarrow[h_2^F\neq s_2^F,s_3^N]{N} \; s_3^N \; \xrightarrow[h_3^N\neq h_2,s_3^N]{N} \; 1 \\ \xrightarrow[h_1=s_2^N]{N} \; s_2^N \; \xrightarrow[h_2^F\neq h_1,s_3^F]{F} \; s_3^F \; \xrightarrow[h_3^{F1}\neq h_2,s_3^F]{N} \; 1 \\ \xrightarrow[h_1=s_3^N]{N} \; s_2^N \; \xrightarrow[h_2^N\neq h_1,s_2^N]{N} \; 1 \end{array}\right.$$

図 2

Hider の問題は自分が勝つ確率を最大にすることである、すなわち、行動戦略 $\bar{p}$ を

$$min\{f(\bar{p},\bar{s}) : \bar{s} = (s_1, \bar{s}_N, \bar{s}_F)\}$$

が最大になるように選ぶことである。

$\mathcal{NN}$ と $\mathcal{NFN}$ の場合の Hider の戦略

次に、$\mathcal{NN}$ と $\mathcal{NFN}$ の場合に Hider の戦略を定義する。

$$p(h_2^N|h_1,\mathcal{N}) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{for } h_2^N \in I \setminus \{h_1\}; \\ 0, & \text{for } h_2^N = h_1, \end{cases} \tag{5}$$

$$p(h_3^{F1}|h_1,\mathcal{N},h_2^N,\mathcal{F}1) = \begin{cases} 0, & \text{for } h_3^{F1} = h_2^N; \\ \frac{4n-9}{n(n-2)}, & \text{for } h_3^{F1} = h_1; \\ \frac{(n-3)^2}{n(n-2)^2}, & \text{for } h_3^{F1} \in I \setminus \{h_1, h_2^N\}, \end{cases} \tag{6}$$

$$p(h_3^{F2}|h_1,\mathcal{N},h_2^N,\mathcal{F}2) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{for } h_3^{F2} \in I \setminus \{h_1, h_2^N\}; \\ 0, & \text{for } h_3^{F2} \in \{h_1, h_2^N\}. \end{cases} \tag{7}$$

とおく。$\mathcal{NN}$ や $\mathcal{NFN}$ の場合に、Seeker が任意の戦略 $\bar{s}$ を用いた場合に、ケースバイケースで Hider の期待利得を計算することにより、期待利得の最小値は $\frac{(n-2)^2}{{}_nP_2} + \frac{1}{{}_nP_2}\{n-2+\frac{(n-1)(n-3)^2}{n(n-2)}\}$ であることがわかる。

$\mathcal{FNN}$ の場合の Hider の戦略

まず、$\mathcal{FNN}$ の場合の Hider の戦略を定義する。すべての $h_1 \in I$ に対し、$p(h_1) = \frac{1}{n}$ とおく。さらに

$$p(h_2^F|h_1,\mathcal{F}) = \frac{1}{n} \text{ for all } h_2^F \in I. \tag{8}$$

$$p(h_3^N|h_1,\mathcal{F},h_2^F,\mathcal{N}) = \begin{cases} 0, & \text{for } h_3^N = h_2^F; \\ \frac{1}{n-1}, & \text{for } h_3^N \in I \setminus \{h_2^F\}. \end{cases} \tag{9}$$

とおく。$\mathcal{FNN}$ の場合に、Seeker が任意の戦略 $\bar{s}$ を用いた場合に、ケースバイケースで Hider の期待利得を計算することにより、期待利得の最小値は $\frac{(n-2)^2}{n^2(n-1)}$ であることがわかる。

ゆえに、Hider が上記の戦略 (5) − (9) を用いるならば、期待利得を少なくとも P_H^* とすることができる。以上の分析により次の定理を得る。

定理 1. Quiet Accumulation Game with $N=2, k=3$ の値は P_H^* である。両 player の最適戦略は (1)-(9) で与えられる。ただし、第1回目は両 player とも at random に選択する。

参考文献 [9] では、ゲームの様々の進行に関して場合分けをして、それぞれの場合において Hider の期待利得を計算することにより、(1)-(9) が最適戦略であることが初等的な方法で示されている。一方、[8] の p.186-189 においては、定理1を得るためのエレガントな考察が与えられている。さらに、[8] の p.189 において、P_H^* と Very Quiet Case や Noisy Case のゲームの値との比較がなされている。

3．2.Quiet Accumulation Game with $N=k$

次に $N=k$ の場合、つまり (n,k,k) を解こう。回数が Hider の目標に等しいので、Seeker が一度でも目標物を見つけるとゲームはその時点で終了する。したがって、両 player にとって、発見が起った後の戦略というものを考える必要がない。そこで、過去 t 回において Hider と Seeker がそれぞれ $h_1,\dots,h_t$ と $s_1,\dots,s_t$ を選んだと仮定して、$H_t \equiv (h_1,\dots,h_t)$ および $S_t \equiv (s_1,\dots,s_t)$ とおく。混乱を生じない限り、H_t および S_t はそれぞれ要素 $h_1,\dots,h_t$ および $s_1,\dots,s_t$ の集合をも表すことにする。$p(i|h_1,\dots,h_t) \equiv p(i|H_t)$ は Hider が $i \in I\backslash H_t$ を選ぶ確率である。$q(i|s_1,\dots,s_t) \equiv q(i|S_t)$ は seeker が $i \in I$ を選ぶ確率である。

定理 2. Quiet Accumulation Game with $N=k$ の値は $v \equiv v(n,k) = \frac{(n-k)^k}{{}_nP_k}$ である。両 player の一つの最適戦略は $p(h_i|H_{i-1}) = \frac{1}{n-i+1}$ for $h_i \notin H_{i-1}$ および $q(s_i|S_{i-1}) = \frac{1}{n-i+1}$ for $s_i \notin S_{i-1}$ である。

3．3.モデルのヴァリエーション

さて、3.1. で分析されたゲームの最適戦略から予想されるように、Quiet Accumulation Game を一般的に解くことは困難である。そこで、ゲームの特徴を部分的につかんだり、またゲームの値の上下界を求めるために、player の行動に制約を加える、ということが考えられる。ここでは、モデルにおいて Seeker の行動に次のような制約を加える：

Seeker は毎回、過去に自分が選択したことがない箱を選ばなければならない。

この制約により、Seeker は元のモデルの場合より不利になるので、ゲームの値は元のモデルより大きくなることが予想される。すなわち、新たなモデルのゲームの値は元のモデルのゲームの値の上界である。さて、outcome の列を次のようであるとする。

$$\underbrace{\mathcal{NN}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_1}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{NN}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_2}\mathcal{FN}\cdots\mathcal{NF}\underbrace{\mathcal{NN}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_i}\mathcal{FN}\cdots\mathcal{NF}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_{m+1}}$$

ここに

$$\ell_1+\cdots+\ell_{m+1}=N \text{ かつ } 0 \le \ell_i \le N \text{ for } 1 \le i \le m+1.$$

まず、Hider の行動戦略を定義する。第 t 回目に

$$p_t^*(h) = \frac{1}{n-t+r}. \tag{10}$$

ここに、$\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}+r+1 \le t \le \ell_1+\cdots+\ell_r+r$ かつ $2 \le r \le m$ $\big(r=m+1$ のとき, $\ell_1+\cdots+\ell_m+m+2 \le t \le k+m$, そして $r=1$ のとき, $1 \le t \le \ell_1+1\big)$。さらに、

$$p_t^*(s_{t-1}) = 1 \quad \text{かつ} \quad p_t^*(h) = 0 \quad \text{for} \quad h \neq s_{t-1}. \tag{11}$$

ここに、$t=\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}+r$ かつ $1\le r\le m$。

次に、Seeker の行動戦略を

$$q_t^*(s)=\frac{1}{n-t+1}\quad \text{for}\quad s\in I\backslash S_{t-1}, 1\le t\le N+m. \tag{12}$$

と定義する。関数 $\{f_a\}_{1\le a\le m+1}$ を

$$f_a(x;y_1,\ldots,y_a)=f_1(x;y_a)\{f_{a-1}(x;y_1,\ldots,y_{a-1})-f_{a-1}(x-1;y_1,\ldots,y_{a-1})\},$$

$$f_1(x;y)=x^y.$$

と定義する。

$$v(n,N,1)\equiv\frac{f_1(x;N)}{{}_nP_N},$$

とおく。さらに、$r=2,\ldots,m+1$ に対し、

$$v(n,N,r)=v(n,N,r-1)+\frac{1}{{}_nP_N}\sum_{\ell_1=0}^{N-1}\sum_{\ell_2=0}^{N-\ell_1-1}\cdots\sum_{\ell_{r-1}=0}^{N-\ell_1-\cdots-\ell_{r-2}-1}f_r(x;\ell_1+1,\ell_2,\ldots,\ell_{r-1},\ell_r-1),$$

とおく。ここに $\ell_1+\cdots+\ell_r=N$ である。

定理3. $k=N+2$ とする。(10), (11) および (12) はそれぞれ Hider および Seeker の最適戦略である。ゲームの値は $v(n,N,3)$ で与えられる。

4. グラフ上の Accumulation Game

参考文献 [11] の証明等を省略したものが、すでに講究録に掲載予定になっている。本節では参考文献 [11] の内容を紹介しながら、さらに今後の検討課題について述べる。ここで扱うモデルは第3節のモデルに次の仮定を加えたものである。本節でも $a=b=1$ を仮定する。Seeker はリニアグラフ上を動くので、箱をノードと言い替える。

仮定：n 個のノードからなるリニアグラフ (V,E), ここに $V=\{1,\ldots,n\}$ および $E=\{(1,2),\ldots,(n,n-1)\}$、を考える。Seeker は最初にノード1にいる。Hider は Seeker の初期位置を知っている。各回において Seeker は次の2つのうち1つの行動をとることができる。(1) 前回終了時にいるノードにとどまり、そのノードを調べる、および (2) 前回終了時にいるノードに隣接するノードに移動してノードを調べる。一方、Hider は毎回、任意の、object がおいてないノードを選択できる。

ゲームを一般に解析的に解くのは難しいので、次の仮定をおく。

$$N=k(\le n).$$

$n\ge 2k+1$ の場合、Hider は object をノード $n,n-1,n-2,\ldots$ にこの順におくことにより確実に勝つことができる。一方、$n=k$ の場合は、Seeker は毎回任意のノードを選択することにより、確実に Hider の目標を阻止できる。さらに、$n=2k$ の場合は、両 player の最適戦略を容易に求めることができ、ゲームの値は $k/(k+1)$ であることがわかる。結局、

$$k+1\le n\le 2k-1$$

の場合を調べればよい。特に、$n=k+1$ かつ $n\le 7$ の場合、Seeker の最適戦略は次のような戦略の混合であることが、[11] に述べられている。ここでは、Seeker の第 j 回目の選択を $s(j)$ とし、戦略を $s=(s(1),\ldots,s(k))$ のように表している。

$$s^1\equiv(2,3,\ldots,k+1),\quad s^2\equiv(1,2,\ldots,k),$$

$$
s^{2k-1} \equiv \begin{cases} (1,2,\ldots,\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}-1,\ldots,2,1), & k \text{ が奇数のとき}; \\ (2,3,\ldots,\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2},\ldots,2,1), & k \text{ が偶数のとき}, \end{cases}
$$

さらに、$y=2,\ldots,k-1$ に対し, $k+y$ が偶数ならば,

$$
s^{y1}(j) = \begin{cases} j, & \text{if } 1 \le j \le \frac{k-y}{2}+1; \\ s^{y1}(j-1)-1, & \text{if } \frac{k-y}{2}+2 \le j \le k-y+1; \\ j+y-k, & \text{if } k-y+2 \le j \le k, \end{cases}
$$

また $k+y$ が奇数ならば,

$$
s^{y1}(j) = \begin{cases} j+1, & \text{if } 1 \le j \le \frac{k-y+1}{2}; \\ s^{y1}(j-1)-1, & \text{if } \frac{k-y+1}{2}+1 \le j \le k-y+1; \\ j+y-k, & \text{if } k-y+2 \le j \le k, \end{cases}
$$

さらに

$$
s^{y2} = \begin{cases} (1,2,\ldots,\frac{k+y}{2},\frac{k+y}{2}-1,\ldots,y), & k+y \text{ が偶数のとき}; \\ (2,3,\ldots,\frac{k+y+1}{2},\frac{k+y-1}{2},\ldots,y), & k+y \text{ が奇数のとき}. \end{cases}
$$

$n=k+1, n \ge 8$ のときでも、最適戦略は上記の戦略を含むようなものになることが推測される。実際、$n=8$ のとき、最適戦略は上記の戦略にさらに次の２つの純戦略を加えたものの混合になることが示される。

$$
(2,3,4,5,4,3,4) \text{ および } (2,3,2,1,2,3,2).
$$

戦略を時間（回）と場所（ノード）の２次元で表現すれば、ここで与えられた様々の戦略の特徴がよりつかみやすくなる。詳細は参考文献 [11] を参照されたい。Seeker にとって、複数個の純戦略を一様に使うような最適戦略を考えるとき、純戦略の個数は多い方が望ましい。そこで、純戦略の間で支配関係が生じないようにしてどれくらい多くの純戦略を取り出すことができるか、ということが課題である。ただし、 上記の戦略のうち、s^1, s^2 および s^{2k-1} は必ず含まれていなければならないことが予想される。

5. おわりに

第３節において Quiet Accumulation Game の研究成果を紹介し、第４節において、Seeker の行動がリニアグラフ上に制約されている場合の Quiet Accumulation Game を紹介した。これらを踏まえて、今後検討すべき課題として次の点をあげることができる：

（１）Quiet Accumulation game を一般に分析するのは難しいので、 player の行動に制約を課して、ゲームの値の上界、下界を求めること、近似的に最適な戦略を考えること、等がある。このうち、player の行動に制約を課する場合の一部を、第２節の後半において紹介した。

（２）第４節において、Seeker の行動がリニアグラフ上に制約されている場合を扱った。これも player の行動に制約を課する場合であるが、この分析は、player の行動に制約を課さない場合よりも難しくなる。車輪型グラフの方がリニアグラフよりも分析が容易であることが予想される。

（３）Seeker の行動がリニアグラフ上に制約されている場合、ノード数が８以下までは最適な探索戦略が求められた。ノード数が９以上の場合に Seeker の最適戦略を求めるために、より精緻な検討を加えていきたい。

（４）player の行動に制約を課すと、動的計画法のような手法を適用できる可能性がある。実際、[9] では関数方程式が得られている。

（５）Seeker の行動がリニアグラフ上に制約されており、Hider の情報が Noisy や Very Quiet であるような場合はまだ手がつけられていない。

（６）3.3 で扱われたモデルと Very Quiet Case との間には、関連がある可能性がある。

参考文献

[1]Alpern, S. and S.Gal: *The Theory of Search Games and Rendezvous*, Kluwer Academic Publishers, Boston,2003. esp. p.97.

[2]Gal,S.:*Search Games*, Academic, New York, 1980. esp, pp.17-33.

[3]Garnaev,A.: *Search Games and Other Applications of Game Theory* , Springer, 2000.

[4]Kikuta, K. and W.H.Ruckle:Accumulation Games I-Noisy Search. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.94, No.2, August 1997, 395-408.

[5] 中井暉久：探索理論展望, mimeo. , 1986.

[6] *Naval Research Logistics.*, Vol.38, No.4.1991.

[7] W.H.Ruckle:*Geometric Games and Their Applications*, Pitman, Boston, 1983.

[8] —— : Accumulation Games. *Scientiae Mathematicae Japonica*,Vol.54,No.1, 2001,173-203.

[9] —— and K.Kikuta : Variations of Quiet Accumulation Games. Working paper No.177, Institute of Economic Research, Kobe University of Commerce, August 1999.

[10] —— :Special Classes of Quiet Accumulation Games. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.46, No.4, 2003,487-502.

[11] —— : The Quiet Accumulation Game on a Linear Graph—- A Special Case —-. mimeo. 2004.

[12] 坂口実：探索理論, BASIC 数学　Vol.14(1981), 61-67