数理解析研究所講究録 1383 巻 2004 年 9-17

複数の倉庫における在庫の推移について

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1 Introduction

本研究では、販売するまでに３つの倉庫を経由する在庫管理問題における在庫レベルの推移について調べる。販売に直結している倉庫では一定の補充間隔により補充が行われるが、その他の倉庫では任意の時刻に補充が可能である。すべての倉庫で不足を許さないモデルと、販売に直結した倉庫において最後の補充が終わった後でのみ不足が許されるモデルを扱う。これらの問題を輸送、在庫保持、品切れに伴う総費用最小化の基準のもとで数学的に定式化し、計画期間、補充間隔および補充時刻に関する最適政策について言及する。

2 モデル

計画期間長Tにおいて販売するまでに３つの倉庫（倉庫１，２，３）を経由する多段階在庫管理問題について考える。各倉庫では、期首に製品がいっぱいに満たされている状態から出発する。客に対する供給は倉庫３から満たされる。時刻tでの需要率は正の値をとる一般的な連続関数$f(t)$で与えられている。倉庫３の低下した在庫レベルは倉庫２からの一定の補充間隔$\bar{T}$毎に最大許容量まで回復される。倉庫２は倉庫３への一定間隔の補充により在庫レベルが低下し、不足が起こる前により大きな容量をもつ倉庫１から補充される。倉庫１は任意の時刻における倉庫２への補充により在庫レベルが低下する。倉庫１での補充は期首のみである。補充におけるリードタイムは0とする。

$W_i, i = 1,2,3$を各倉庫の最大許容量とし、$W_1 >> W_2 > W_3$を仮定する。m, nをそれぞれ倉庫１から倉庫２および倉庫２から倉庫３への固定された補充回数とする。補充は常に在庫レベルがいっぱいになるようにされる。本稿では、すべての倉庫で不足を許さない場合と、販売に直結した倉庫（倉庫３）において最後の補充が終わった後でのみ不足が許される場合を扱う。$r_i, i = 1,2$をそれぞれ倉庫１から倉庫２と倉庫２から倉庫３への１回当たりの輸送費用、h_iを倉庫i $(i = 1,2,3)$における単位時間単位製品当たりの在庫保持費用とする。またpを倉庫３での不足に対して負われる単位時間単位製品当たりの品切損失費用とする。$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3$を仮定する。$\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$を$k_1 < k_2 < \ldots < k_m$を満たす任意の$2, 3, \ldots, n$の部分列とし、$\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$とおく。

目的はこの在庫管理において必要とされる輸送、在庫保持、品切れに伴う費用の総和を最小にすることである。補充におけるリードタイムが0であることと仮定$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3$から、倉庫１から倉庫２への補充は補充間隔で区切られた時刻上のある時点で起こることを簡単に導くことができる。よって、この問題における決定変数は倉庫１から倉庫２への補充時刻の係数$\mathbf{x}$、補充間隔$\bar{T}$および計画期間Tである。

3 不足を許さないモデル

3.1 定式化

本節では、不足を許さないモデルにおいて、３つの各倉庫における在庫レベルの推移および期間$[0, T]$上での累積在庫量を求めることから始める。

倉庫1は期首に最大許容量W_1までいっぱいになるように補充される。その後、倉庫1に保持されている製品は離散的な補充時刻$k_j\bar{T}$, $j=1,\cdots,m$に倉庫2への補充として消費される。計画期間$[0,T]$における倉庫1への補充は期首の1度きりである。ゆえに時刻tにおける倉庫1の在庫レベル$I_1(t)$は

$$I_1(t)=\begin{cases} W_1, & 0\le t<k_1\bar{T} \\ W_1-F((k_i-1)\bar{T}), & k_i\bar{T}\le t<k_{i+1}\bar{T},\ \ i=1,\cdots,m-1 \\ W_1-F((k_m-1)\bar{T}), & k_m\bar{T}\le t\le T \end{cases} \tag{1}$$

で表される。そこで、

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds$$

である。在庫レベルはつねに非負の値をとるので、制約条件

$$F((k_m-1)\bar{T})\le W_1 \tag{2}$$

を得る。このとき、期間$[0,T]$における倉庫1での累積在庫量I_1^+は

$$\begin{aligned} I_1^+ &= \int_0^{k_1\bar{T}} W_1dt+\sum_{i=1}^{m-1}\int_{k_i\bar{T}}^{k_{i+1}\bar{T}}\left\{W_1-F((k_i-1)\bar{T})\right\}dt+\int_{k_m\bar{T}}^{T}\left\{W_1-F((k_m-1)\bar{T})\right\}dt \\ &= W_1T-\bar{T}\sum_{i=1}^{m-1}(k_{i+1}-k_i)F((k_i-1)\bar{T})-(T-k_m\bar{T})F((k_m-1)\bar{T}) \end{aligned} \tag{3}$$

である。

倉庫2では、期首に在庫レベルが最大許容量W_2に達するまで補充される。倉庫2に保持されている製品は離散的な補充時刻$i\bar{T}$, $i=1,\ldots,n$に倉庫3への補充として消費される。また、離散的な時刻$k_j\bar{T}$, $j=1,\ldots,m$には倉庫1からの補充により、在庫レベルは最大許容量のW_2にまで戻る。これらの状況から時刻tにおける倉庫2の在庫レベル$I_2(t)$は

$$I_2(t)=\begin{cases} W_2-F(i\bar{T}), & i\bar{T}\le t<(i+1)\bar{T},\ \ i=0,1,2,\cdots,k_1-1 \\ W_2-F((k_j-1+l)\bar{T})+F((k_j-1)\bar{T}), & (k_j-1+l)\bar{T}\le t<(k_j+l)\bar{T}, \\ & \quad l=1,2,\cdots,k_{j+1}-k_j,\ \ j=1,\cdots,m-1 \\ W_2-F(i\bar{T})+F((k_m-1)\bar{T}), & i\bar{T}\le t<(i+1)\bar{T},\ \ i=k_m,\cdots,n-1 \\ W_2-F(n\bar{T})+F((k_m-1)\bar{T}), & n\bar{T}\le t\le T \end{cases} \tag{4}$$

と表される。在庫レベルの非負制約により、制約条件

$$\begin{aligned} &F((k_1-1)\bar{T})\le W_2, \\ &F((k_{j+1}-1)\bar{T})-F((k_j-1)\bar{T})\le W_2,\ \ j=1,\cdots,m-1, \\ &F(n\bar{T})-F((k_m-1)\bar{T})\le W_2 \end{aligned} \tag{5}$$

を得る。このとき、期間$[0,T]$における倉庫2での累積在庫量I_2^+は

$$\begin{aligned} I_2^+ &= \sum_{i=0}^{k_1-1}\int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}}\left\{W_2-F(i\bar{T})\right\}dt \\ &\quad +\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{k_{j+1}-k_j}\int_{(k_j-1+l)\bar{T}}^{(k_j+l)\bar{T}}\left\{W_2-F((k_j-1+l)\bar{T})+F((k_j-1)\bar{T})\right\}dt \\ &\quad +\sum_{i=k_m}^{n-1}\int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}}\left\{W_2-F(i\bar{T})+F((k_m-1)\bar{T})\right\}dt+\int_{n\bar{T}}^{T}\left\{W_2-F(n\bar{T})+F((k_m-1)\bar{T})\right\}dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & W_2T + \bar{T}\sum_{j=1}^{m-1}(k_{j+1}-k_j)F((k_j-1)\bar{T}) + (T-k_m\bar{T})F((k_m-1)\bar{T}) \\
& -\bar{T}\sum_{i=1}^{n-1}F(i\bar{T}) - (T-n\bar{T})F(n\bar{T}) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

である。

倉庫３では、期首に在庫レベルが最大許容量W_3に達するまで補充される。倉庫３に保持されている製品は連続的な時刻における需要により消費される。また、離散的な時刻$i\bar{T}$, $i=1,\ldots,n$には倉庫２から補充があり、在庫レベルは最大許容量W_3にまで戻る。これらの状況から時刻tにおける倉庫３の在庫レベル$I_3(t)$は

$$
I_3(t) = \begin{cases} W_3 - F(t) + F(i\bar{T}), & i\bar{T} \le t < (i+1)\bar{T}, \quad i=0,1,\cdots,n-1 \\ W_3 - F(t) + F(n\bar{T}), & n\bar{T} \le t \le T \end{cases} \qquad (7)
$$

で表される。在庫レベルの非負制約により、制約条件

$$
\begin{aligned}
& F((i+1)\bar{T}) - F(i\bar{T}) \le W_3, \quad i=0,1,\cdots,n-1 \\
& F(T) - F(n\bar{T}) \le W_3
\end{aligned} \qquad (8)
$$

を得る。このとき、期間$[0,T]$における倉庫３での累積在庫量I_3^+は

$$
\begin{aligned}
I_3^+ \quad = \quad & \sum_{i=0}^{n-1}\int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}}\left\{W_3 - F(t) + F(i\bar{T})\right\}dt + \int_{n\bar{T}}^{T}\left\{W_3 - F(t) + F(n\bar{T})\right\}dt \\
= \quad & W_3T + \bar{T}\sum_{i=1}^{n-1}F(i\bar{T}) + (T-n\bar{T})F(n\bar{T}) - TF(T) + \int_0^T sf(s)ds \qquad (9)
\end{aligned}
$$

である。

次に、この在庫管理問題における期間$[0,T]$での期平均総費用を求める。$\mathbf{x}$を倉庫１から倉庫２への補充時刻の係数の列とする。すなわち$\mathbf{x}=\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}$である。このとき、期平均総費用$TC(\mathbf{x},\bar{T},T;m,n)$は

$$
\begin{aligned}
TC(\mathbf{x},\bar{T},T;m,n) \quad = \quad & \frac{1}{T}\left\{r_1m + r_2n + h_1I_1^+ + h_2I_2^+ + h_3I_3^+\right\} \\
= \quad & \frac{1}{T}\Bigg\{r_1m + r_2n + T\sum_{i=1}^{3}h_iW_i + h_3\left\{\int_0^T sf(s)ds - TF(T)\right\} \\
& +(h_2-h_1)\left\{\bar{T}\sum_{j=1}^{m-1}(k_{j+1}-k_j)F((k_j-1)\bar{T}) + (T-k_m\bar{T})F((k_m-1)\bar{T})\right\} \\
& +(h_3-h_2)\left\{\bar{T}\sum_{i=1}^{n-1}F(i\bar{T}) + (T-n\bar{T})F(n\bar{T})\right\}\Bigg\} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる。

よって、不足を許さないモデルにおける問題は、以下のような$m+n+3$個の制約式をもつ非線形計画

問題として表される：

$$TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) \to \min$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & F((k_m - 1)\bar{T}) \le W_1, \\ & F((k_1 - 1)\bar{T}) \le W_2, \\ & F((k_{j+1} - 1)\bar{T}) - F((k_j - 1)\bar{T}) \le W_2, \quad j = 1, \cdots, m-1, \\ & F(n\bar{T}) - F((k_m - 1)\bar{T}) \le W_2, \\ & F((i+1)\bar{T}) - F(i\bar{T}) \le W_3, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ & F(T) - F(n\bar{T}) \le W_3 \end{aligned}$$

もし固定されたm, nに対して補充政策$\mathbf{x}$が与えられているならば、2変数$\bar{T}, T$についての最適化として解くことになる。後で述べるが、Tについての最適解は$\bar{T}$に依存するため、この解を代入することにより1変数$\bar{T}$の問題に帰着できる。実際、累積在庫量(3), (6), (9)には積分の計算が含まれているため、これらの式の値が$\bar{T}$についての1次あるいは2次多項式程度になるのであれば、この問題は簡単に解ける。

3.2 倉庫2での補充時刻の決定

本節では、固定された$n, \bar{T}, T$に対して期平均総費用の最小化の下で倉庫2への補充時刻の係数$\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m\}$を決定するための考察を行う。

$\mathbf{x}^1$を補充政策$\mathbf{x}$の第m番目の成分のみを$k_m^1 = k_m - 1$で置き換えることにより生成される補充政策とする。すなわち$\mathbf{x}^1 = \{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m^1\}$である。補充政策$\mathbf{x}$および$\mathbf{x}^1$により定められる在庫レベルの推移はともに非負制約を満たしているものとする。このとき、補充政策$\mathbf{x}$を$\mathbf{x}^1$で置き換える、すなわち最後の補充時刻を時間$\bar{T}$だけ早めると、費用が

$$\begin{aligned} & TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) - TC(\mathbf{x}^1, \bar{T}, T; m, n) \\ & \quad = \frac{1}{T}(h_2 - h_1)[(T - k_m\bar{T})\{F((k_m - 1)\bar{T}) - F((k_m - 2)\bar{T})\} - \bar{T}\{F((k_m - 2)\bar{T}) - F((k_{m-1} - 1)\bar{T})\}] \end{aligned}$$

だけ削減できることがわかる。同様に、補充政策$\mathbf{x}$の代わりに補充政策$\mathbf{x}^2 = \{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m + 1\}$を適用すると、費用

$$\begin{aligned} & TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) - TC(\mathbf{x}^2, \bar{T}, T; m, n) \\ & \quad = \frac{1}{T}(h_2 - h_1)[\bar{T}\{F((k_m - 1)\bar{T}) - F((k_{m-1} - 1)\bar{T})\} - (T - (k_m + 1)\bar{T})\{F(k_m\bar{T}) - F((k_m - 1)\bar{T})\}] \end{aligned}$$

を削減することができる。

また、任意の補充政策$\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$において第$j$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$番目の成分のみを$k_j^\# = k_j - 1$あるいは$k_j^\# = k_j + 1$により置き換えることにより生成される補充政策$\mathbf{x}^\# = \{k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j^\#, k_{j+1}, \ldots, k_m\}$についても同様の計算を行うと、次の結果が得られる。

補題1． $\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$を在庫レベルの推移が非負制約を満たしている任意の補充政策とする。このとき、総費用を削減するためには、倉庫1から倉庫2への補充において以下のように補充政策を改良すべきである。

(i) $(k_2 - k_1 - 1)F(k_1\bar{T}) < (k_2 - k_1)F((k_1 - 1)\bar{T})$ かつ $k_1 + 1 \ne k_2,\ W_2 \ge F(k_1\bar{T})$ を満たすならば、第1番目の補充時刻$k_1\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(ii) $(k_2 - k_1 + 1)F((k_1 - 2)\bar{T}) < (k_2 - k_1)F((k_1 - 1)\bar{T})$ かつ $k_1 \ne 2,\ W_2 \ge F((k_2 - 1)\bar{T}) - F((k_1 - 2)\bar{T})$ を満たすならば、第1番目の補充時刻$k_1\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

(iii) 任意のj $(j = 2, \ldots, m-1)$に対して $(k_{j+1} - k_j - 1)\{F(k_j\bar{T}) - F((k_j - 1)\bar{T})\} < F((k_j - 1)\bar{T})$

$-F((k_{j-1}-1)\bar{T})$ かつ $k_j+1 \neq k_{j+1}$, $W_2 \geq F(k_j\bar{T})-F((k_{j-1}-1)\bar{T})$ を満たすならば、第j番目の補充時刻$k_j\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(iv) 任意のj $(j=2,\ldots,m-1)$ に対して $F((k_j-2)\bar{T})-F((k_{j-1}-1)\bar{T}) < (k_{j+1}-k_j)\{F((k_j-1)\bar{T}) - F((k_j-2)\bar{T})\}$ かつ $k_j-1 \neq k_{j-1}$, $W_2 \geq F((k_{j+1}-1)\bar{T})-F((k_j-2)\bar{T})$ を満たすならば、第j番目の補充時刻$k_j\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

(v) $(T-(k_m+1)\bar{T})\{F(k_m\bar{T})-F((k_m-1)\bar{T})\} < \bar{T}\{F((k_m-1)\bar{T})-F((k_{m-1}-1)\bar{T})\}$ かつ $k_m \neq n$, $W_1 \geq F(k_m\bar{T})$, $W_2 \geq F(k_m\bar{T})-F((k_{m-1}-1)\bar{T})$ を満たすならば、第m番目の補充時刻$k_m\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(vi) $\bar{T}\{F((k_m-2)\bar{T})-F((k_{m-1}-1)\bar{T})\} < (T-k_m\bar{T})\{F((k_m-1)\bar{T}-F((k_m-2)\bar{T})\}$ かつ $k_{m-1} \neq k_m-1$, $W_2 \geq F(n\bar{T})-F((k_m-2)\bar{T})$ を満たすならば、第m番目の補充時刻$k_m\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

また、補題1より次の系が得られる。

系1.　倉庫1から倉庫2への補充において以下のように補充政策を改良すべきである。

(i) 需要率$f(s)$が$s \in [0,k_1\bar{T})$において非増加関数であり、$k_1-1 \geq k_2-k_1$ かつ $k_1+1 \neq k_2$, $W_2 \geq F(k_1\bar{T})$ を満たすならば、第1番目の補充時刻$k_1\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(ii) 需要率$f(s)$が$s \in [0,(k_1-1)\bar{T})$において非減少関数であり、$k_1-1 \leq k_2-k_1$ かつ $k_1 \neq 2$, $W_2 \geq F((k_2-1)\bar{T})-F((k_1-2)\bar{T})$ を満たすならば、第1番目の補充時刻$k_1\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

(iii) 任意のj $(j=2,\ldots,m-1)$ に対して 需要率$f(s)$が$s \in [(k_{j-1}-1)\bar{T}, k_j\bar{T})$において非増加関数であり、$k_j-k_{j-1} \geq k_{j+1}-k_j$ かつ $k_j+1 \neq k_{j+1}$, $W_2 \geq F(k_j\bar{T})-F((k_{j-1}-1)\bar{T})$ を満たすならば、第j番目の補充時刻$k_j\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(iv) 任意のj $(j=2,\ldots,m-1)$ に対して 需要率$f(s)$が$s \in [(k_{j-1}-1)\bar{T},(k_j-1)\bar{T})$において非減少関数であり、$k_j-k_{j-1} \leq k_{j+1}-k_j$ かつ $k_j-1 \neq k_{j-1}$, $W_2 \geq F((k_{j+1}-1)\bar{T})-F((k_j-2)\bar{T})$ を満たすならば、第j番目の補充時刻$k_j\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

(v) 需要率$f(s)$が$s \in [(k_{m-1}-1)\bar{T},k_m\bar{T})$において非増加関数であり、$T < (2k_m-k_{m-1}+1)\bar{T}$ かつ $k_m \neq n, W_1 \geq F(k_m\bar{T})$, $W_2 \geq F(k_m\bar{T})-F((k_{m-1}-1)\bar{T})$ を満たすならば、第m番目の補充時刻$k_m\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(vi) 需要率$f(s)$が$s \in [(k_{m-1}-1)\bar{T},(k_m-1)\bar{T})$において非減少関数であり、$T > (2k_m-k_{m-1}-1)\bar{T}$ かつ $k_{m-1} \neq k_m-1$, $W_2 \geq F(n\bar{T})-F((k_m-2)\bar{T})$ を満たすならば、第m番目の補充時刻$k_m\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

補題1は、固定されたmに対して最適補充政策を得るためには、在庫レベルが非負制約を満たしている条件のもとでできる限り低くなる回数を増やすべきであることを示している。特に、補題1の(v),(vi)は最後の補充時刻以降の在庫レベルの最適なふるまいについて述べている。補題1を繰り返し用いることにより改良された解は、初期解の与え方にかなり影響されることがわかっている。

$\mathbf{x}$についての最適化問題は、総費用最小化の基準のもとで、並べられた数列$\mathbf{x}$を順序を換えずに$m+1$個の部分列に分ける問題と同じである。この問題はm,nが小さければ、列挙法により最適解を求めることは十分可能である。

3.3 計画期間の決定

本節では、固定された$n, \bar{T}, \mathbf{x}$に対して期平均総費用の最小化の下で計画期間Tを決定するための考察を行う。

$$
\begin{aligned}
g_1(T) \quad = \quad & r_1 m + r_2 n + (h_2 - h_1)\bar{T}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}(k_{j+1}-k_j)F((k_j-1)\bar{T}) - k_m F((k_m-1)\bar{T})\right\} \\
& +(h_3-h_2)\bar{T}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}F(i\bar{T}) - nF(n\bar{T})\right\} + h_3\int_0^T sf(s)ds
\end{aligned}
\tag{11}
$$

とおく。このとき、期平均総費用$TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)$は

$$
TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) = \sum_{i=1}^{3} h_i W_i - h_3 F(T) + (h_2 - h_1)F((k_m-1)\bar{T}) + (h_3 - h_2)F(n\bar{T}) + \frac{g_1(T)}{T} \tag{12}
$$

と書き直すことができる。

$$
g_1'(T) = h_3 T f(T) > 0 \tag{13}
$$

なので、$g_1(T)$はTの増加関数である。また、

$$
\frac{\partial}{\partial T}TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) = -\frac{g_1(T)}{T^2} \tag{14}
$$

である。これらの議論により、以下の結論が得られる。

補題2.　固定された$n, \bar{T}, \mathbf{x}$に対して最適計画期間T^*は以下のようになる：

(1) $g_1(n\bar{T}) \geq 0$ あるいは $g_1(n\bar{T}) < 0, g_1(t_0) > 0, TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)|_{T=n\bar{T}} \geq TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)|_{T=t_0}$ ならば、$T^* = t_0$である。

(2) $g_1(t_0) \leq 0$ あるいは $g_1(n\bar{T}) < 0, g_1(t_0) > 0, TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)|_{T=n\bar{T}} < TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)|_{T=t_0}$ ならば、$T^* = n\bar{T}$である。

ここで、t_0は倉庫3における在庫レベルが0に達する時刻であり、(17)で与えられる。

4 不足を許すモデル

本節では、まず不足を伴う問題についての解析を行う。さらに（不足を許さないことも含めた）不足を許す場合についての考察を行う。

4.1 定式化

ここでは、不足を伴う問題について数学的定式化を行う。3つの倉庫のうち、倉庫1および倉庫2についての在庫レベルの推移は不足を許さないモデルと同等である。よって、倉庫3における在庫レベルの推移を調べることから始める。

時刻tにおける倉庫3の在庫レベル$I_3(t)$は(7)式で与えられる。時刻$n\bar{T}$以降に在庫レベルは0に達し、計画期間Tには在庫レベルは負になる。ゆえに、制約条件として

$$
\begin{aligned}
& F((i+1)\bar{T}) - F(i\bar{T}) \leq W_3, \ i = 0, 1, \ldots, n-1 \\
& F(T) - F(n\bar{T}) > W_3
\end{aligned}
\tag{15}
$$

を得る。t_0を倉庫3において在庫レベルが0に達する時刻とすると、

$$F(t_0) - F(n\bar{T}) = W_3 \quad (n\bar{T} < t_0 < T) \tag{16}$$

が成り立つ。$F(\cdot)$ は増加関数であるので、正の定数aに対して$F(T) = a$ を満たすTが唯一存在する。それを$T = F^{-1}(a)$で表すと、時刻t_0は

$$t_0 = F^{-1}(W_3 + F(n\bar{T})) \tag{17}$$

と表せる。期間$[0, t_0]$における倉庫3での累積在庫量I_3^+は

$$\begin{aligned} I_3^+ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}} \{W_3 - F(t) + F(i\bar{T})\}\, dt + \int_{n\bar{T}}^{t_0} \{W_3 - F(t) + F(n\bar{T})\}\, dt \\ &= \bar{T} \sum_{i=1}^{n-1} F(i\bar{T}) - n\bar{T}F(n\bar{T}) + \int_0^{t_0} sf(s)ds \end{aligned} \tag{18}$$

である。また、期間$(t_0, T]$における倉庫3での累積在庫不足量I_3^-は

$$\begin{aligned} I_3^- &= \int_{t_0}^{T} \{F(t) - F(n\bar{T}) - W_3\}\, dt \\ &= TF(T) - TF(n\bar{T}) - \int_{t_0}^{T} sf(s)ds - W_3T \end{aligned} \tag{19}$$

である。よって、この在庫管理問題における期間$[0, T]$での期平均総費用$TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)$は

$$\begin{aligned} TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) &= \frac{1}{T}\{r_1 m + r_2 n + h_1 I_1^+ + h_2 I_2^+ + h_3 I_3^+ + pI_3^-\} \\ &= \frac{1}{T}\{r_1 m + r_2 n + (h_1 W_1 + h_2 W_2 - pW_3)T \\ &\quad + (h_2 - h_1)\left\{\bar{T}\sum_{j=1}^{m-1}(k_{j+1} - k_j)F((k_j - 1)\bar{T}) + (T - k_m\bar{T})F((k_m - 1)\bar{T})\right\} \\ &\quad + (h_3 - h_2)\left\{\bar{T}\sum_{i=1}^{n-1}F(i\bar{T}) - n\bar{T}F(n\bar{T})\right\} - (h_2 + p)TF(n\bar{T}) \\ &\quad + (h_3 + p)\int_0^{t_0} sf(s)ds + p\left\{TF(T) - \int_0^{T} sf(s)ds\right\}\Bigg\} \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

よって、不足を伴うモデルにおける問題は以下のような制約付き非線形計画問題として表される：

$$TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) \to \min$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & F((k_m - 1)\bar{T}) \le W_1, \\ & F((k_1 - 1)\bar{T}) \le W_2, \\ & F((k_{j+1} - 1)\bar{T}) - F((k_j - 1)\bar{T}) \le W_2, \quad j = 1, \cdots, m-1, \\ & F(n\bar{T}) - F((k_m - 1)\bar{T}) \le W_2, \\ & F((i+1)\bar{T}) - F(i\bar{T}) \le W_3, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ & F(T) - F(n\bar{T}) > W_3 \end{aligned}$$

4.2 計画期間の決定

本節では、固定された$n, \bar{T}, \mathbf{x}$に対して期平均総費用の最小化の下で計画期間Tを決定するための考察を行う。

$$\begin{aligned} g_2(T) &= r_1 m + r_2 n + (h_2 - h_1)\bar{T}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}(k_{j+1}-k_j)F((k_j-1)\bar{T}) - k_m F((k_m-1)\bar{T})\right\} \\ &\quad + (h_3 - h_2)\bar{T}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}F(i\bar{T}) - nF(n\bar{T})\right\} + (h_3+p)\int_0^{t_0} sf(s)ds - p\int_0^{T} sf(s)ds \end{aligned} \tag{21}$$

とおく。このとき、期平均総費用$TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)$は

$$TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) = \sum_{i=1}^{2} h_i W_i - pW_3 + pF(T) + (h_2 - h_1)F((k_m - 1)\bar{T}) - (h_2 + p)F(n\bar{T}) + \frac{g_2(T)}{T} \tag{22}$$

と書き直すことができる。

$$g_2'(T) = -pTf(T) < 0 \tag{23}$$

なので、$g_2(T)$はTの減少関数である。また、

$$g_2(\infty) < 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n) = -\frac{g_2(T)}{T^2} \tag{25}$$

である。これらの議論により、以下の結論が得られる。

補題3.　固定された$n, \bar{T}, \mathbf{x}$に対して最適計画期間T^*は以下のようになる：

(1) $g_2(t_0) \le 0$ ならば、$T^* = t_0$である。

(2) $g_2(t_0) > 0$ ならば、$T^* = T_{**}$である。

ここで、T_{**}は$g_2(T) = 0$を満たす時刻Tである。

$T = t_0$における関数$TC(\mathbf{x}, \bar{T}, T; m, n)$の連続性および補題2、補題3により、不足を許すモデルにおいて次の結論が得られる。

定理1.　与えられた$n, \bar{T}, \mathbf{x}$に対して最適計画期間T^*は以下のようになる：

(1) $g_1(n\bar{T}) \ge 0$ あるいは $g_1(n\bar{T}) < 0, g_1(t_0) > 0, g_1(n\bar{T}) > pn\bar{T}\{F(T_{**}) - F(n\bar{T})\} - (h_3 + p)n\bar{T}W_3$ ならば、$T^* = T_{**}$である。

(2) $g_1(t_0) \le 0$ あるいは $g_1(n\bar{T}) < 0, g_1(t_0) > 0, g_1(n\bar{T}) \le pn\bar{T}\{F(T_{**}) - F(n\bar{T})\} - (h_3 + p)n\bar{T}W_3$ ならば、$T^* = n\bar{T}$である。

ここで、T_{**}は$g_2(T) = 0$を満たす時刻Tであり、t_0は(17)式で与えられる。

参考文献

[1] L.C.Barbosa and M.Friedman (1978) *Deterministic inventory lot-size models - a general root low*, Management Science, Vol.24, No.8, 819-826.

[2] W.A.Donaldson (1977) *Inventory replenishment policy for a linear trend in demand — an analytical solution*, Operational Research Quarterly, Vol.28, No.3, 663-670.

[3] A.Goswami and K.S.Chaudhuri (1992) *An economic order quantity model for items with two levels of storage for a linear trend in demand*, J. of the Operational Research Society, Vol.43, No.2, 157-167.

[4] M.A.Hariga (1993) *The inventory replenishment problem with a linear trend in demand*, Compt. & I.E., Vol.24, 143-150.

[5] R.J.Henery (1979) *Inventory replenishment policy for increasing demand*, J. of the Operational Research Society, Vol.30, No.7, 611-617.

[6] D.P.Heyman, M.J.Sobel (1990) *Stochastic Models, Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2*, Elsevier Science Publishers, North-Holland.

[7] R.I.Phelps (1980) *Optimal inventory rule for a linear trend in demand with a constant replenishment period*, J. of the Operational Research Society, Vol.31, 439-442.

[8] K.V.S.Sarma (1983) *A deterministic inventory model with two levels of storage and an optimum release rule*, Opsearch, Vol.20, 175-180.

[9] E.A.Silver and H.C.Meal (1973) *A heuristic for selecting lot size quantities for the case of a deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities for replenishment*, Prod. Invent. Mgmt, Vol.14, 64-74.

[10] E.A.Silver (1979) *A simple inventory replenishment decision rule for a linear trend in demand*, Journal of the Operational Research Society, Vol.30, No.1, 71-75.

[11] J.T.Teng (1996) *A deterministic inventory replenishment model with a linear trend in demand*, Operations Research Letters, Vol.19, 33-41.

[12] H.M.Wagner and T.M.Whitin (1958) *Dynamic version of the economic lot size model*. Management Science, Vol.5, 89-96.

[13] 児玉正憲 (1996) 『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会.