数理解析研究所講究録 1383 巻 2004 年 48-51

一般的待ち行列システムへの並び方に関する研究

鳥取大学工学部　小柳　淳二，河合　一

1 はじめに

本研究では、待ちを伴う仕事を行う場合、どのようなタイミングで待ち行列に並べばよいかを考える．２種類の仕事を処理する必要があり，そのうち１種類は待ち行列に並び自分の順番がくるのを待ち，サーバーで処理してもらう必要がある．他方の仕事は待つ必要がなく処理できるが，待ち行列に並んでいる間は処理できないものとする．例えば，コピーとプリントの２種類の処理のできる複合機があるが，コピー機能は故障しており，修理にださなければならないとする．この機械を使っていくつかの印刷物をプリントし，コピーをして資料を作成する場合，印刷は修理に出していない間はできないが，修理に出していない間は印刷は実行できる．しかしいずれはコピー機能を修理にださねばならない．この場合，修理を行う場所で修理を待つ機械が多数たまっている場合は印刷を行い，少数の場合に修理にだし，修理が終わってから印刷とコピーをおこなったほうが得策である．　このような研究では期待処理時間最小化を扱ったもの [1] や決められた時間内に処理を済ませる確率を最大化することを目的としたもの [2] があるが，本研究では系内時間の２乗に待ちコストが比例するような場合など、やや一般のコスト構造を持つ場合に待ち行列に並ぶタイミングについて考察する．このような待ち行列に並ぶ場合の最適政策については [3] に多くの研究成果が収められている．

2 モデル

待ち行列に並ぶかどうかを決定するのに L 回の決定時点があり、決定時点ごとに待ち行列人数を観測して、各決定時点で待ち行列に並ぶか次の決定時点を待つかを決める．各決定時刻間隔は T で一定であるとする．k 回目の決定時点で次の決定時点を待つことにした場合、$c(k)$ のコストがかかり、待ち行列長は時間T の間に到着率 λ、処理率 μ の $M/M/1$ 待ち行列システム（$\lambda/\mu<1$）にしたがって変化する．並ぶことにした場合、行列長 i に対して $A(i)$ のコストが課されて、決定は終了する．ただし L 回目の決定時点では行列に加わる決定だけができるものとする．

3 定式化

状態として k 回目の決定時点で 行列長 i を観測したとし、そのときの最適コストを $V(i,k)$ とする．このとき、行列に入ったときのコストは $A(i)$ であり、次の決定を待ったときのコストを $B(i,k)$ とする．これらは次の最適性方程式をみたす．
$k=1,\dots,L-1$ に対して

$$B(i,k) = c(k)+\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}V(j,k+1) \tag{1}$$

$$V(i,k) = \min\{A(i),B(i,k)\} \tag{2}$$

$k=L$ に対して $V(i,L)=A(i)$
ここで P_{ij} は次の決定までの T 時間後に待ち行列人数が i から j に変化する確率である．

ここで以下の仮定をおく、

条件 1 待ちコスト $A(i)$ および 決定を延期することによるコスト $c(k)$ は以下の条件を満たす．

(1) $A(i)$, $c(k)$ は i, k に関して増加

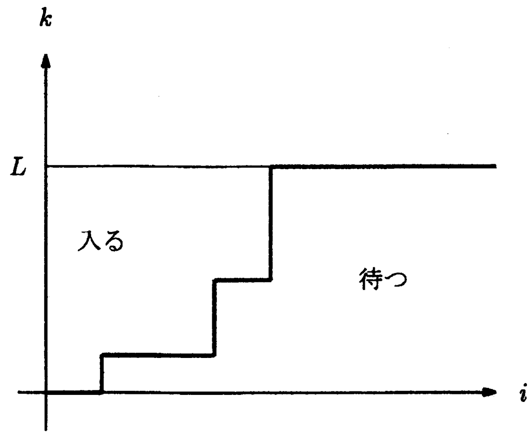
(2) $A(i) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} A(j) \leq A(i+1) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j} A(j).$

(2) の条件は一回待つことによる行列長コストの低下が人数増大するにつれ大きくなることを示す.

この仮定のもとで，最適政策は以下のような単調に変化する性質を持つことが証明できる.

定理 1
状態 (i,k) で行列に加わることが最適ならば，$j \leq i$, $l \geq k$ となる状態 (j,l) でも行列に加わることが最適である.

すなわち下図のように状態空間は単調増大する関数で区切り，上側では行列に入り，下側では待つことが最適政策となる.



この定理の証明には以下の補題が必要となる.

補題 1

(1) $V(i,k)$, $B(i,k)$ は k に関して増加

(2) $V(i+1,k) - V(i,k) \leq A(i+1) - A(i)$ かつ $B(i+1,k) - B(i,k) \leq A(i+1) - A(i)$

証明.
L 回目の決定では行列に加わる決定のみとれるので $V(i,L) = A(i)$ となる. $V(i,L-1) \leq A(i)$ なので $V(i,L) \leq V(i,L-1)$, 以下

$$B(i,k+1) - B(i,k) = c(k+1) - c(k) + \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}\{V(j,k+1) - V(j,k)\} \tag{3}$$

$$V(i,k) = \min\{A(i), B(i,k)\} \tag{4}$$

より k に関する帰納法により題意が証明できる.

2. を示すために $v(l,k) = V(l,k) - V(l-1,k)$ （ただし $V(-1,k) = 0$）を定義する.

$$B(i+1,k) - B(i,k) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j} V(j,k) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i\,j} V(j,k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j} \sum_{l=0}^{j} v(l,k) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i\,j} \sum_{l=0}^{j} v(l,k) = \sum_{l=0}^{\infty} v(l,k) \left(\sum_{j=l}^{\infty} P_{i+1\,j} - \sum_{j=l}^{\infty} P_{i\,j} \right) \\
&\le \sum_{l=1}^{\infty} (A(l) - A(l-1)) \left(\sum_{j=l}^{\infty} P_{i+1\,j} - \sum_{j=l}^{\infty} P_{i\,j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j} A(j) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i\,j} A(j) \le A(i+1) - A(i)
\end{aligned}
$$

ここで $M/M/1$ 待ち行列長の推移確率の性質 $\sum_{j=l}^{\infty} P_{i+1\,j} - \sum_{j=l}^{\infty} P_{i\,j} \ge 0$ を用いている.

定理の証明は以下のようになる.

状態 (i,k) で行列に加わることが最適ならば, $A(i) \le B(i,k)$ ここで $B(i,k) \le B(i,l)$ より $A(i) \le B(i,l)$ また補題の 2 の性質から $A(j) - A(i) \le B(j,l) - B(i,l)$ なので $A(j) \le B(j,l)$ が成立する. よって状態 (j,l) での最適アクションは行列に加わることである.

4 待ち行列長に関するコスト

待ち行列長に関するコストの条件

$$
A(i) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} A(j) \le A(i+1) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j} A(j)
$$

は以下のような場合に満たされる.

条件 2

(1) $\lambda \le \mu$

(2) $A(i+2) - A(i+1) \ge A(i+1) - A(i)$

(3) $A(i+2) - 2A(i+1) + A(i) \le A(i+1) - 2A(i) + A(i-1) \quad (A(-1) = A(0))$

これは待ち行列長の推移確率行列 $\{P_{ij}\}$ が行列 Q

$$
Q_{00} = \mu/(\lambda+\mu),\ Q_{i\,i-1} = \mu/(\lambda+\mu),\ Q_{ii} = 0,\ Q_{i\,i+1} = \lambda/(\lambda+\mu) \quad (i \ge 1),\ Q_{ij} = 0 \quad (|i-j| \ge 2) \tag{5}
$$

を用いて

$$
P = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n \frac{(\lambda T + \mu T)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)nT} \tag{6}
$$

とあらわされることより n に関する帰納法で証明することができる.

証明.

$Q_{ij}^{(n)}$ を Q^n の i,j 成分, $L_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} A(j)$ とする. これに対して $L_{i+1}^{(n)} - L_i^{(n)} \le A(i+1) - A(i)$ を示す. $n=0$ のとき不等式は明らかに成立する.

次に $n \ge 0$ のとき

$$
L_{i+1}^{(n)} - L_i^{(n)} \le A(i+1) - A(i) \text{ ならば } L_{i+1}^{(n+1)} - L_i^{(n+1)} \le A(i+1) - A(i)
$$

を示す.

行列 Q の形から

$$
(\lambda+\mu)(L_{i+1}^{(n+1)} - L_i^{(n+1)}) = \mu L_i^{(n)} + \lambda L_{i+2}^{(n)} - \mu L_{i-1}^{(n)} - \lambda L_{i+1}^{(n)} \le \mu(A(i) - A(i-1)) + \lambda(A(i+2) - A(i+1)).
$$

ここで，条件2．(1), (2), (3) を用いて

$$\begin{aligned} & (\lambda+\mu)(A(i+1)-A(i))-\mu(A(i)-A(i-1))-\lambda(A(i+2)-A(i+1)) \\ = \; & \mu(A(i+1)-2A(i)+A(i-1))-\lambda(A(i+2)-2A(i+1)+A(i)) \geq 0 \end{aligned}$$

が成立する．よって各 n に対して $\sum_{j=0}^{\infty} Q_{i+1\,j}^{(n)} A(j) - \sum_{j=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} A(j) \leq A(i+1)-A(i)$ となる．

これより

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j} A(j) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} A(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T+\mu T)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)nT} \left[\sum_{j=0}^{\infty} Q_{i+1\,j}^{(n)} A_j - \sum_{j=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} A_j \right] \leq A(i+1)-A(i)$$

が成立．

条件 2 は $A(i)$ が待ち行列長に比例するような場合（期待処理時間）や$A(i)=(i+1)^2$ のようにコストが待ち行列長（自分も含めた）の２乗であらわされる場合には満たされている．また $A(i)$ が k の関数 $A(i,k)$ になっているような場合も考えられるが，そのような場合に対しても本モデルで得られたような最適政策の性質が成立するかどうかの研究は今後の課題である．

参考文献

[1] J. Koyanagi and H.Kawai, An optimal join policy to the queue in processing two kinds of jobs, *Proc. of the Int. Conf. Applied Stochastic System Modeling*, 140–147 (2000).

[2] J. Koyanagi and H.Kawai, A maximization of the finishing probability of two jobs processed in a queue *Proc. of the 32nd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications*, 171–176 (2001).

[3] R. Hassin and M. Haviv *To queue or not to queue*, Kuluwer Academic Publishers, London (2003).