数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 94-100

二項回帰数列の逆数和の数論的性質

NTT サービスインテグレーション基盤研究所
NTT Service integration Laboratories
黒沢 健 (Takeshi Kurosawa)

二項回帰数列を考える. A_1, A_2 を整数として, 二項回帰数列 $\{R_n\}_{n\geq 0}$ は以下の回帰関係を満たしているとする.

$$R_{n+2} = A_1 R_{n+1} + A_2 R_n \qquad (n \geq 0),$$

但し R_0, R_1 は共に零でない整数とする. 特性多項式 $P(X) = X^2 - A_1 X - A_2$ の二根を ρ_1, ρ_2 ($|\rho_1| \geq |\rho_2|$) とおき, 判別式 $\Delta = A_1^2 + 4A_2$ を正と仮定する. この時 ρ_1, ρ_2 は異なる実根である.

$r \geq 2, c \geq 1, d$ を整数とする. この時, 以下の逆数和を考える.

$$\sum_{k\geq 0}{}' \frac{a_k}{R_{cr^k+d}}, \tag{1}$$

但し $\{a_k\}_{k\geq 0}$ は代数的数からなる数列とし, $\sum_{k\geq 0}{}'$ は $cr^k+d \geq 0$ で $R_{cr^k+d} \neq 0$ となる $k \geq 0$ の和を意味する. この形の級数和は多くの研究者によって研究されてきた. $\{F_n\}_{n\geq 0}$ を Fibonacci 数列とおく. 即ち $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geq 0)$ を満たし, 初期値 $F_0 = 0, F_1 = 1$ をとるものである. Lucas[Lu, p. 225] は以下の明示的な公式を与えた.

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

更に Hoggatt と Bicknell [HB] はより一般的な公式を与えた.

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{F_{c2^k}} = \frac{1}{F_c} + \frac{\Phi+2}{\Phi(\Phi^{2c}-1)},$$

但し $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金数とする. このように以上の二式は級数和 (1) が代数的数 (無理数) になる例である. しかし級数和 (1) はいつでもこのような明示的な表示を持っているわけではない. 例えば,

$$\theta_1 = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{F_{2^k+1}}$$

は (2) に似た形をしているが, Becker と Töpfer [BT] はこの値が超越数である事が示した. この数の値は以下の値

$$\theta_2 = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{F_{2^k-1} + F_{2^k+1}} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{L_{2^k}}$$

と同時に Erdös と Graham [EG, p. 64] によって問題提起された数である．ここで L_n は Lucas 数列とする．即ち $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ $(n \geq 0)$ を満たし，初期値 $L_0 = 2, L_1 = 1$ の数列である．級数和 (1) には更に多くの研究がある．特に $\{R_n\}$ が Fibonacci タイプ $U_n = (\rho_1^n - \rho_2^n)/(\rho_1 - \rho_2)$, Lucas タイプ $V_n = \rho_1^n + \rho_2^n$, また特性根が $\rho_2 = \pm 1$ の場合に良く研究されてきた．級数の分子が $a_k = (\pm 1)^k$ の時，即ち

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(\pm 1)^k}{U_{2^k}}, \quad \sum_{k\geq 1} \frac{(\pm 1)^k}{V_{2^k}}, \quad \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\rho_1^{2^k} \pm 1}$$

の時は無理数性 ([AJ], [Ba], [Go]), 更に Mignotte [Mi2] により

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{U_{2^k}}$$

の超越性が証明された．また級数の分子が $a_k = \frac{1}{k!}$ の時，即ち

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k! F_{2^k}}$$

の時, Mignotte [Mi1] と Mahler [Ma] が独立に級数和の超越性を示した．$\{a_k\}$ の形がより一般的な時は Hančl と Kiss [HK] が無理数性を示し, Bundschuh と Pethö [BP] は超越性を示した．より一般的な $\{R_n\}$ の形では Becker と Töpfer [BT] が $\{a_k\}$ が代数的数からなる周期列で判別式 Δ が平方数でない時に超越数である事を示した．Nishioka [Ni] は $\{a_k\}$ が線形回帰数列であり，判別式 Δ が平方数でない時を含む形の超越性を示した．実際に彼女は級数和 (1) の d を動かした時の代数的独立性を示した．更に代数的独立性の結果では d と r を動かした時の代数的独立性は Nishioka, Tanaka, Toshimitsu [NTT], Nishioka[Ni2] によって示された．また Tanaka [Ta] は以下の (1) に類似した級数和

$$\sum_{k\geq 0}{}' \frac{k^l \alpha^k}{(R_{a_k})^m} \quad (m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}),$$

の代数的独立性を示した．但し $\{a_k\}$ は適当な線形回帰数列とする．また類似的な和について Duverney, Kanoko, Tanaka [DKT] は

$$\sum_{k\geq 0}{}' \frac{a^k}{R_{cr^k} + b},$$

の和の超越性を示した．但し $a \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}, b \in \mathbb{Z}$ とする．

最近 Duverney と Nishioka [DN] は分子 $\{a_k\}$ について画期的な改良を行った．それを紹介する．α を代数的数とする時, α のハウスを $\overline{|\alpha|} = \max\{|\alpha^\sigma| \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\}$ と置き, $\mathrm{den}\,(\alpha)$ を $\mathrm{den}\,(\alpha)\,\alpha$ が代数的整数になるような最小の正整数とする．また α のサイズを $\|\alpha\| = \max\{\overline{|\alpha|}, \mathrm{den}\,(\alpha)\}$ と定める．このサイズは以下の不等式を持つ．

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right\| \leq n \prod_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|.$$

もし, $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ならば $\|\alpha\| = |\alpha|$ である．$\boldsymbol{K}$ を代数体として, $O_{\boldsymbol{K}}$ を $\boldsymbol{K}$ の整数環とする．この時

$$\Phi_0(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{E_k(x^{r^k})}{F_k(x^{r^k})},$$

と置く．但し

$$E_k(x) = a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \cdots + a_{kL}x^L \in \boldsymbol{K}[x],$$

$$F_k(x) = 1 + b_{k1}x + b_{k2}x^2 + \cdots + b_{kL}x^L \in O_{\boldsymbol{K}}[x],$$

$$\log \|a_{kl}\|, \log \|b_{kl}\| = o(r^k),\ 1 \leq l \leq L$$

とする．この時彼らは以下の判定定理を示した:

超越性判定定理 (Duverney and Nishioka [DN]). α を $0 < |\alpha| < 1$ で $k \geq 0$ に対して $F_k(\alpha^{r^k}) \neq 0$ を満たす代数的数とする．この時 $\Phi_0(\alpha)$ が代数的数となる必要十分条件は $\Phi_0(x)$ が有理関数となる事である．

彼らはこの強力な定理の応用として, 以下の逆数和の超越性の必要十分条件を与えた．

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{F_{r^k} + b_k}, \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{L_{r^k} + b_k},$$

但し F_n は Fibonacci 数, L_n は Lucas 数とする．また $\{a_k\}_{k \geq 0}$ と $\{b_k\}_{k \geq 0}$ はそれぞれ $\boldsymbol{K}$ の数列, $O_{\boldsymbol{K}}$ の数列で $\log \|a_k\|, \log \|b_k\| = o(r^k)$ を満たすとする．

今回の私の研究では級数和 (1) の超越性の必要十分条件を与える．二項回帰数列 R_n $(n \geq 0)$ は以下のように表現される．

$$R_n = g_1 \rho_1^n + g_2 \rho_2^n, \quad |\rho_1| \geq |\rho_2|.$$

Theorem 1. $\{R_n\}$ を周期列でなく, 無限に多くの k に対して $R_{cr^k+d} \neq 0$ であるとする．$\{a_k\}_{k \geq 0}$ を $\boldsymbol{K}$ の数列とし, $\log \|a_k\| = o(r^k)$ を満たすとする．もし無限に多くの k に対して $a_k \neq 0$ ならば

$$\theta = \sum_{k \geq 0}{}' \frac{a_k}{R_{cr^k+d}}$$

は以下の二つの場合を除き超越数である:

(i) $a \in \boldsymbol{K}$ と $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $r=2$, $a_n = a (n \geq N)$, $|A_2| = 1$, かつ $g_1\rho_1^d + g_2\rho_2^d = 0$ となる場合, この時 $\theta \in \boldsymbol{K}(\sqrt{\Delta})$.
(ii) $a \in \boldsymbol{K}$ と $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $r=2$, $a_n = a2^n (n \geq N)$, $\rho_2 = \pm 1$, $g_1\rho_1^d = g_2\rho_2^d$ となる場合, この時 $\theta \in \boldsymbol{K}$.

二項回帰数列は以下の 3 つの場合に分類される.
I: $|A_2| = 1$.
II: 特性根 ρ_1, ρ_2 が乗法的従属で $|A_2| \geq 2$.
III:特性根 ρ_1, ρ_2 が乗法的独立.
Duverney と Nishioka は二項回帰数列として重要な例である $\{F_n\}$ と $\{L_n\}$ の場合についての判定を行った. これは Case I の場合にあたる. 彼らが行ったのはこの二つの二項回帰数列の場合だけであるが, 彼らがこの二つの級数の証明のために用いた超越性判定定理は Case I と II の場合に適用できる. 正確には彼らの超越判定定理を使用するための条件が $F_k(x) \in O_{\boldsymbol{K}}[x]$ であるため, 完全には I と II の場合に適用する事は出来ない. しかし, 実際には簡単な補助定理を適用すれば彼らの超越性判定定理の $F_k(x) \in O_{\boldsymbol{K}}[x]$ という条件を, ある整数 D が存在して $DF_k(x) \in O_{\boldsymbol{K}}[x]$ を満たせば良いという条件に置き換える事が出来る. この事実を使う事により, 彼らの超越性判定定理を Case I と II の場合に適用出来る. 超越性判定定理を適用すると, 定理 1 の θ の超越性は $\Phi_0(x)$ が有理関数かどうかを判定すれば良い事になる. 彼らは $L \leq r$ の時, $\Phi_0(x)$ が有理関数かどうか判定をした. これは Case I の場合を調べるのには十分な条件であった. よって Case I が解決した事になる. では次に Case II の場合を考察していく. 先ほども述べたとおり, この場合も彼らの超越性判定定理を使う事が出来る. 即ち $\Phi_0(x)$ が有理関数かどうかを判定する事が必要となってくる. この場合には $\Phi_0(x)$ が $L > r$ の場合に対しても有理関数かどうか調べる必要があった. この場合の判定はそう簡単なものではなく, このために私は $\boldsymbol{K}$ 上の全ての絶対値 (即ち付置) を使う事によって有理関数の判定を行った. 残る CaseIII では彼らの超越判定定理を使う事が出来ない. そのために彼らの超越判定定理に代わる定理を導く必要があり, 以下に示す多変数関数を用いる事で解決を行った. ここで記号の定義をする. $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ に対して

$$|\boldsymbol{\lambda}| = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \quad \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{i=1}^{m} {\alpha_i}^{\lambda_i}$$

とする. また $r \geq 2, \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ として $\Omega_n \boldsymbol{z} := ({z_1}^{r^n}, \ldots, {z_m}^{r^n})$ とする. この時,

$$S := \Phi_0(\boldsymbol{z}) = \sum_{k \geq 0} \frac{E_k(\Omega_k \boldsymbol{z})}{F_k(\Omega_k \boldsymbol{z})} \in \boldsymbol{K}[[\boldsymbol{z}]] = \boldsymbol{K}[[z_1, \ldots, z_m]], \tag{3}$$

と置く．但し

$$E_k(\boldsymbol{z})=\sum_{1\le|\boldsymbol{\lambda}|\le L_1} a_{k\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}},\quad F_k(\boldsymbol{z})=1+\sum_{1\le|\boldsymbol{\lambda}|\le L_2} b_{k\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{z}],$$

$$\log\|a_{k\boldsymbol{\lambda}}\|,\log\|b_{k\boldsymbol{\lambda}}\|=o(r^k).$$

とする．

ここで $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in(\boldsymbol{K}^{\times})^m$ で $0<|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_m|<1$, $|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_m|$ が乗法的独立であり，$k\ge 0$ に対して $F_k(\Omega_k\boldsymbol{\alpha})\neq 0$ であるような代数的数からなる点 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して S の値を調べる．これを調べる事により Case III の場合を解決する．そこで私は以下の定理を得た．

Theorem 2. $S=\Phi_0(\boldsymbol{z})$ を *(3)* で定義されたものとする．但し

$$E_k(\boldsymbol{z})\in\boldsymbol{K}[z_1,\ldots,z_l],F_k(\boldsymbol{z})\in\boldsymbol{K}[z_{l+1},\ldots,z_m]\quad(1\le l\le m).$$

であると仮定する．$L_1<r$ で無限に多くの n に対して $E_n(\boldsymbol{z})\neq 0$ ならば $\Phi_0(\boldsymbol{\alpha})$ は超越数である．

この定理2はDuverneyとNishiokaの超越判定定理のように必要十分条件を与えている定理ではない．しかしCase IIIを解決するには十分な定理となっている．この定理2を証明するために私は以下の定理を示した．この定理はDuverneyとNishioka[DN]のTheorem 2の一般化(多変数化)になっており，重要な役割を占める定理となっている．

Theorem 3. $\deg A_0,\deg A_1\le M$ を満たす任意の $M\ge 1$ と任意の共に零でない $A_0,A_1\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{z}]$ に対して

$$\mathrm{ord}\,(A_0+A_1S)\le c_1M$$

を満たすような正の定数 c_1 存在すると仮定する．この時，任意の正の数 d に対して $\deg A_0,\ldots,\deg A_d\le M$ を満たす任意の $M\ge 1$ と全て零でない $A_0,\ldots,A_d\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{z}]$ に対して

$$\mathrm{ord}\left(A_0+A_1S+\cdots+A_dS^d\right)\le c_dM$$

を満たす c_d が存在する．

更に定理2のもう一つの応用として二項回帰数列だけでなく，以下の級数和の超越性に対しても応用する事が出来る．

Theorem 4. $\rho_1,\ldots,\rho_m$ を代数的数として $|\rho_1|,\ldots,|\rho_m|$ が乗法的に独立で $|\rho_1|>\max\{1,|\rho_2|,\ldots,|\rho_m|\}$ であるとする．$\{a_k\}_{k\ge0},\{b_{ik}\}_{k\ge0}$ $(1\le i\le m)$

を $\boldsymbol{K}$ の級数で，十分大きな k に対して $\log\|a_k\|, \log\|b_{ik}\| = o(r^k)$ かつ $b_{1k} \neq 0$ を満たすとする．もし無限に多くの k に対して $a_k \neq 0$ ならば

$$\sum_{k\geq 0}{}' \frac{a_k}{b_{1k}\rho_1^{r^k} + \cdots + b_{mk}\rho_m^{r^k}} \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

但し $\sum_{k\geq 0}{}'$ は $b_{1k}\rho_1^{r^k} + \cdots + b_{mk}\rho_m^{r^k} \neq 0$ である k をわたる和とする．

Becker と Töpfer [BT] はこの定理と似た定理を証明している．彼らは $\rho_1, \ldots, \rho_m$ が乗法的に独立と言う条件ではあるが，$\{a_k\}$ が周期列であり $\{b_{1k}\}, \ldots, \{b_{mk}\}$ に対しては定数と言う仮定をしている．

参考文献

[AJ] R. André-Jeannin, *A note on the irrationality of certain Lucas infinite series*, Fibonacci Quart. **29** (1991), 132–136.

[Ba] C. Badea, *The irrationality of certain infinite series*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 221–228.

[BT] P.-G. Becker and T. Töpfer, *Transcendency results for sums of reciprocals of linear recurrences*, Math. Nachr. **168** (1994), 5–17.

[BP] P. Bundschuh and A. Pethö, *Zur transzendenz gewisser reihen*, Monatsh. Math. **104** (1987), 199–223.

[DN] D. Duverney and Ku. Nishioka, *An inductive method for proving the transcendence of certain series*, to appear in Acta. Arith..

[DKT] D. Duverney, T. Kanoko and T. Tanaka, *Transcendence of certain reciprocal sums of linear recurrences*, Monatsh. Math. **137** (2002), 115–128.

[EG] P. Erdös and R. L. Graham, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, Imprimerie Kundig, Genève 1980.

[Go] S.W. Golomb, *On the sum of the reciprocals of the Fermat numbers and related irrationalities*, Can. J. Math. **15** (1963), 475–478.

[HK] J. Hančl and P. Kiss, *On reciprocal sums of terms of linear recurrences*, Math. Slovaca **43** (1993), 31–37.

[HB] V.E. Hoggatt Jr. and M. Bicknell, *A reciprocal series of Fibonacci numbers with subscript $2^n k$*, Fibonacci Quart. **14** (1976), 453–455.

[LP] J.H. Loxton and A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain functions in several variables III*, Bull. Austral. Math. Soc. **16** (1977), 15–47.

[Lu] E. Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, Amer. J. Math. **1** (1878), 184–240.

[Ma] K. Mahler, *On the transcendency of the solutions of a special class of functional equations*, Bull. Austral. Math. Soc. **13** (1975), 389–410.

[Mi1] M. Mignotte, *Quelques problèmes d'effectivé en théorie des nombres*, DSc Thèses, L'Université de Paris XIII, 1974.

[Mi2] M. Mignotte, *An application of W. Schmidt's theorem transcendental numbers and Golden number*, Fibonacci Quart. **15** (1977), 15–16.

[Ni] K. Nishioka, *Algebraic independence of reciprocal sums of binary recurrences*, Monatsh. Math. **123** (1997), 135–148.

[Ni2] K. Nishioka, *Algebraic independence of reciprocal sums of binary recurrences II*, Monatsh. Math. **136** (2002), 123–141.

[NTT] K. Nishioka, T. Tanaka, and T. Toshimitsu, *Algebraic independence of sums of reciprocals of the Fibonacci numbers*, Math. Nachr. **202** (1999), 97–108.

[Ta] T. Tanaka, *Algebraic independence results related to linear recurrences*, Osaka J. Math. **36** (1999), 203–227.

Takeshi Kurosawa
NIPPON TELEGRAPH AND TELEPHONE CORPORATION
NTT Service Integration Laboratories
Midori–Cho 3–9–11,
Musashino–Shi,
Tokyo 180-8585
Japan
e–mail: k_takeshi@2001.jukuin.keio.ac.jp