数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 163-168

Pisot数によるβ-展開の周期性について

伊藤俊次 (金沢大)
Shunji ITO (Kanazawa Univ.)

Pisot数 $\beta>1$ による $x\in[0,1)$ の β-展開

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{\beta^n}$$

の digit 列 $(a_1(x)\, a_2(x)\cdots)$ が x がどのような条件をみたすとき 純周期的となるか, について 多くの研究が積みあげられて来たが, その必要十分の証明が簡素化されたので ここに報告する.

0. β-展開の定義

$\beta>1$ に対して定まる β-変換 $T_\beta:[0,1)\to[0,1)$ を $T_\beta x=\beta x-[\beta x]$ とし digit 関数 $a(x)$ を

$$a(x)=\begin{cases} i & \text{if } \left[\frac{i}{\beta},\frac{i+1}{\beta}\right) \quad i=0,\cdots,[\beta]-1\\ [\beta] & \text{if } \left[\frac{[\beta]}{\beta},1\right)\end{cases}$$

とする. このとき $x\in[0,1)$ の digit 列 $(a_1(x)\, a_2(x)\ldots)$ は

$$a_n(x):=a(T^{n-1}x)$$

によって与える. このとき x は digit 列をもちいて

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{\beta^n}$$

と β-展開されることは容易に分る.

1. Pisot数とSchmidtの結果

$\beta>1$がPisot数であるとは βは代数的整数で その共役数の絶対値が1より小さいときをいう。
このとき 次の結果が知られている。

> 定理（Schmidt, Bull London Math. Soc. 12(1980)）
>
> $\beta>1$, がPisot数のとき，以下がなりたつ：
>
> $$\{x\in[0,1) \mid (a_1(x).a_2(x)\cdots) \text{ on periodic}\} = \mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$$

このノートでは この定理から自然に生じる「純周期性の必十条件」について述べるとともに Schmidtの定理の別証明に触れる。

2. Digit列からつくられる記号力学系

$\varphi(x)=(a_1(x)\ a_2(x)\cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty}\{0,1,\dots,[\beta]\}$ とし

$$(a_1^*.a_2^*\cdots) := \lim_{x\to 1}\varphi(x)$$

と定義する。（$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^*}{\beta^n}$ がなりたつ。又 β がPisot数なら $(a_1^*, a_2^*, \dots)$ は周期であることが知られている）

$$\Omega_\beta := \{(\cdots a_{-k}\, a_{-k+1}\cdots a_{-1}\, a_0\, a_1\, a\cdots) \mid (a_j a_{j+1}\cdots) \le (a_1^* a_2^*\cdots),\ \forall j\in\mathbb{Z}\}$$

とするとき，Ω_βは $\prod_{n=-\infty}^{\infty}\{0,1,\dots,[\beta]\}$ のShift不変なclosed setとなる

（Ω_βは T_βから定まる記号力学系のnatural extensionにあたる）

$\Omega_\beta \ni (\cdots a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2 \cdots)$ に対して
$u=(a_1\, a_2\, a_3\cdots)$, $v=(a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots)$
と定義し (v,u) と $(\cdots a_{-1}a_0a_1\,a_2\cdots)$ と同一視する。

3. Realization of Ω_β

以後 $\beta>1$ を Pisot 数とする。その共役数を

$$\beta=\beta_1,\ \underbrace{\beta_2,\dots,\beta_r}_{\text{実共役数}},\ \underbrace{\beta_{r+1},\ \beta_{r+2}=\overline{\beta_{r+1}},\ \beta_{r+2},\ \beta_{r+3}=\overline{\beta_{r+2}},\ \dots,\ \beta_{r+2s}=\overline{\beta_{r+2s-1}}}_{\text{複素共役数}}$$

と記す.

定義 $\rho:\Omega_\beta\to\mathbb{R}^r\times\mathbb{C}^s$ を

$\Omega\ni(v,u)=(\cdots a_{-1},a_0,a_1\, a_2\cdots)$ に対して

$$\rho(v,u)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\beta_1^{-k},\ -\sum_{k=0}^{-\infty}a_{-k}\beta_2^{-k},\ \dots,\ \sum_{k=0}^{-\infty}a_{-k}\beta_r^{-k},\ -\sum_{k=0}^{-\infty}a_{-k}\beta_{r+1}^{-k},\ \dots,\ -\sum_{k=0}^{-\infty}a_{-k}\beta_{r+2s-1}^{-k}\right)$$

$$=(x,\ y_2,\ y_3,\dots,y_r,\ y_{r+1},\dots,y_{r+s})\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{C}^s$$

と定義する。 $\rho(\Omega_\beta)$ はその形式より有界閉集合であることが分る。 そこで

定義 $\overline{T}_\beta: K\to K$ を

$$\overline{T}_\beta(x,y_2,\dots y_r,\dots,y_{r+s}) := (\beta x-a_1,\ \beta_2 y_2-a_1,\ \dots,\ \beta_r y_r-a_1,\ \dots,\ \beta_{r+s}y_{r+s}-a_1)$$

と定義する. このとき

proposition 3.1

$$\begin{tikzcd}
\Omega_\beta \arrow[r, "\text{shift}"] \arrow[d, "\rho"'] & \Omega_\beta \arrow[d, "\rho"] \\
K \arrow[r, "\overline{T}_\beta"] & K
\end{tikzcd}$$

が成りたつ

$\overline{T}_\beta$ の第一座標への制限は T_β に一致すること, 及び $\overline{T}_\beta$ は本質的に bijective であることから $\overline{T}_\beta$ は T_β の natural extension と呼ばれている. さて主定理を述べる準備が出来た.

定理　$\beta>1$ を Pisot数でさらに単数とする。このとき
$x\in\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$ の β-展開の digit $(a_1(x)a_2(x)\cdots)$
が純周期的である必要十分条件は x の共役数の組
$(x,x_2,\cdots x_r\cdots x_{r+s})\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{C}^s$ が
$(x,x_2,x_r,\cdots x_{r+s})\in K$
をみたす。

4　証明

定理の証明のスケッチと説明を与えることにする。

（純周期 $\Rightarrow (x,x_2,\cdots x_{r+s})\in K$ の証明）

$x\in\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$ の digit を $(a_1a_2\cdots a_L a_1a_2\cdots a_L\cdots)$ とする。

$$(v,u)=(\cdots\quad a_1a_2\,a_L\;a_1a_2\cdots a_L\cdots\quad)\in\Omega_\beta$$

$$u=(a_1a_2\cdots\quad)\quad v=(a_La_{L-1}\;a_1a_L\cdots\quad)$$

とする。x は

$$x=\frac{a_1}{\beta}+\cdots+\frac{a_L}{\beta^L}+\frac{a_1}{\beta^{L+1}}+\cdots$$

$$=\frac{a_1\beta^{L-1}+a_2\beta^{L-2}+\cdots+a_L}{\beta^L-1}$$

一方 $\rho(v,u)$ の j 番目の値は ρ の定義から

$$-(a_L+a_{L-1}\beta_j+a_{L-2}\beta_j^2+\cdots+a_1\beta_j^{L-1})-\beta_j^L(a_L+\cdots)-\cdots$$

$$=-(a_L+a_{L-1}\beta_j+\cdots+a_1\beta_j^{L-1})(1+\beta_j^L+\beta_j^{2L}+\cdots)$$

$$=\frac{-(a_L+a_{L-1}\beta_j+\cdots+a_1\beta_j^{L-1})}{1-\beta_j^L}$$

$$=x_j\quad(x\text{ の }j\text{ 番目の共役数})$$

よって $\rho(v,u)=(x,x_2,\cdots x_{r+s})$
と $\rho(v,u)\in K$ より
x の digit 列が純周期ならば $(x,x_2,\cdots,x_{r+s})\in K$
が示せた。

($x\in\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$, $(x,x')\in K$ $\Rightarrow$ xのdigit列が純周期の証明)

xの共役数の組 $(x,x_2,\dots,x_{r+s})$ を簡単に (x,x') と記すことにする.

$x\in\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$ に対して $\exists\, b\in\mathbb{N}:\ bx\in\mathbb{Z}[\beta]$, そこで

$$R_b := \{(y,y') : y\in b^{-1}\mathbb{Z}[\beta]\}\cap K$$

と定義する。このとき K は bounded より R_b は有限集合

となる. (もちろん $(x,x')\in R_b$)

これから主張したいことは「$\overline{T}_\beta : R_b\to R_b$ が well defined で bi-jective」であることである.

(i) $(y,y')\in R_b$ とする

$$y=\frac{m_0+m_1\beta+\cdots+m_d\beta^{d-1}}{b},\quad m_i\in\mathbb{Z}$$ と記されることから

$$\beta y=\frac{\beta m_0+m_1\beta^2+\cdots+m_d\beta^d}{b}$$ より

$\beta y-a_1\in b^{-1}\mathbb{Z}(\beta)$ (a_1はyのβ-展開の第1digit)

よって $\overline{T}_\beta(y,y')=(T_\beta y,(T_\beta y)')$ がなりたつ

さらに $(y,y')\in R_b$ ならば $\overline{T}_\beta(y,y')\in R_b$

(ii) $\overline{T}_\beta : R_b\to R_b$ が surjective であること

$(y,y')\in R_b$ とする。このとき $\exists(v,u)\in\Omega_\beta$:

$\rho(v,u)=(y,y')$, $v=(v_0v_1v_2\cdots)$, $u=(u_1u_2\cdots)$

そこで $z=\beta^{-1}(y+v_0)$ とおく。このときβは単数なので

$z=\beta^{-1}(y+v_0)\in b^{-1}\mathbb{Z}[\beta]$ (ここでβの単数条件をもちいている)

一方

$\rho((v,u)$の1回ずらし$)=(z,z')\in K$

すなわち $\overline{T}_\beta(z,z')=(y,y')$

よって $\overline{T}_\beta$ は R_b 上 surjective.

以上より $\overline{T}_\beta$ が R_b 上で bijective。よって $(x, x')\in R_b$ は

$\overline{T}_\beta$ について 純周期，すなわち $\exists n_0 : \overline{T}_\beta^{\,n_0}(x, x') = (x, x')$

よって x は T_β に関して純周期的。 □

5. Remark

Remark 1　ここでの主定理から Schmidtの定理を得ることは さほど難しくはない。　$x\in\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$ の仮定のもと

$$(x, x')\in[0,1)\times\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^{s}$$

そこで $\overline{T}_\beta(x, x') = (\beta x - a_1, \beta_2 x - a_1, \cdots, \beta_{r+s} x - a_1)$

を $[0,1)\times\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^{s}$ 上の変換と考える。これは bijective ではないが $\exists N = N(x)$: $\overline{T}^{N}(x, x')\in K$ が示せる。

これは x のdigitの周期性 に外ならない。

Remark 2　考えてみれば 証明は簡単になされたが 集合 $K=\rho(\Omega_\beta)$ の姿がみえない。実はこれが fractal 境界をもつ領域であることが知られている。とするならば

$$(x, x')\in K$$

かどうかは判定出来ない(?)。この意味で面白い定理ともいえる。

詳しい内容は Rao-ITO「purely periodic β-expansion with Pisot Unit base (to appear in Proceedings AMS.) をみてほしい。