数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 199-207

リフティングに付随する保型 L 関数の平均値定理
(Mean value theorems on automorphic L-functions attached to liftings)

松本耕二 (Kohji Matsumoto)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

ゼータ関数と総称される一群の解析関数は, 通常は Dirichlet 級数 $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$ ($a_n\in\mathbf{C}$) の形でまず定義される。本稿ではこの級数が $\sigma=\Re(s)>1$ で絶対収束し, $\varphi(s)$ は複素全平面に有理型に解析接続され, $\varphi(1-s)$ がガンマ因子と $\varphi(s)$ との積で書けるという, 標準的な形の関数等式を満たすものと仮定する。するとこの関数にとっての critical strip は $0\leq\sigma\leq 1$ になるが, この領域における $\varphi(s)$ の二乗平均値

$$\int_1^T|\varphi(\sigma+it)|^2dt \qquad (0\leq\sigma\leq 1) \tag{1}$$

の挙動を調べることは, ゼータ関数の理論における古くからの中核的な問題の一つである。

まず, 最も基本的なゼータ関数である, Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ の場合を考える。自然数 k に対し, $\zeta(s)^k=\sum_{n=1}^{\infty}d_k(n)n^{-s}$ (但し $d_k(n)$ は n を k 個の因数の積に書く表わし方の個数) となるので, $\zeta(s)^k$ も Dirichlet 級数と考えられるから, その二乗平均値が考えられる。それは即ち $\zeta(s)$ の $2k$ 乗平均値に他ならない。これについて, 絶対収束域 $\sigma>1$ では, 任意の k に対し,

$$\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt=C_k(\sigma)T+O(1) \qquad (\sigma>1) \tag{2}$$

であることが簡単に示せる。但し $C_k(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}d_k(n)^2n^{-2\sigma}$ である。これに対し, critical strip の内部では, 伝統的には $\sigma=1/2$ の線 (critical line) 上の平均値が最も盛んに研究されてきたが, ここでは $1/2<\sigma<1$ での状勢を考える。まず $k=1$ の場合には, 既に Ingham (1928) によって

$$\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^2dt=\zeta(2\sigma)T+(2\pi)^{2\sigma-1}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}T^{2-2\sigma}+O(T^{1-\sigma+\varepsilon}) \qquad (1/2<\sigma<1) \tag{3}$$

が任意に小さい $\varepsilon>0$ に対して成り立つことが示されている。この式の誤差項評価は近年になって筆者や Ivić, Kačėnas の研究で改良されており, 例えば $O(T^{2(1-\sigma)/3+\varepsilon})$ に置き換えられることが知られている (Ivić-Matsumoto [4])。次に $k=2$ の場合には Ivić [2] によって

$$\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^4dt=C_2(\sigma)T+O(T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}) \qquad (1/2<\sigma<1) \tag{4}$$

が示されている。

この (3), (4) の著しい特徴は, その誤差項の指数が, $\sigma \to 1-0$ とするとき, ε の違いを無視すれば 0 に近づく, ということである。絶対収束域における式 (2) と比較すると, 誤差項の評価がいわば「滑らかに」つながっている, という意味で満足できる結果である。すると, $k \geq 3$ の場合はどうなっているだろうか。Riemann ゼータ関数の平均値定理の標準的な教科書である Ivić [1] を調べてみると, 定理 8.5 として一般に

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt = C_k(\sigma)T + O(T^{A_k(\sigma)+\varepsilon}) \tag{5}$$

の形の漸近式が述べられているが, その誤差項の指数 $A_k(\sigma)$ については

$$A_3(\sigma) = (17-12\sigma)/10 \quad (7/12 < \sigma < 1)$$
$$A_4(\sigma) = (11-8\sigma)/10 \quad (5/8 < \sigma < 1)$$
$$A_5(\sigma) = (79-60\sigma)/38 \quad (41/60 < \sigma < 1)$$

といった結果しか得られておらず, これらの指数は $\sigma \to 1-0$ で 0 に近づかない。この状況を改善して, (2) と滑らかにつながる誤差評価を, $k \geq 3$ にたいしても示すことはできないだろうか?

筆者がこの種の問題に遭遇したのは, Riemann ゼータ関数ではなく, Rankin-Selberg の L 関数を考察している時だった。群 $SL(2, \mathbf{Z})$ に関する weight κ の正則 cusp 形式 $f(z)$ が正規化された Hecke eigen form であるとし, その n 番目の Fourier 係数を $a(n)$ と書くとき, f に付随する Rankin-Selberg L 関数は

$$L(s, f \otimes f) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} a(n)^2 n^{1-\kappa-s}$$

で定義される。筆者が Rankin-Selberg L 関数に本格的に関わるようになったのは, 1996 年頃だった。名大の同僚の谷川好男氏が, 当初は一人で進めていた Rankin-Selberg L 関数の Voronoï 型公式の研究に, 筆者は途中から巻き込まれる形で参加した。(これは結局, 紆余曲折の末, Ivić も含めた三人の共著 [5] となる。) 他方, 当時 M2 の院生だった市原由美子氏が修士論文のテーマとして Rankin-Selberg L 関数の zero-free region を取り上げたので, その指導教官という立場からもこの方向の勉強をすることになり, Rankin-Selberg L 関数のことばかり考えて過ごす日々がしばらく続いた。

その後 1997 年に入ると, 筆者はリトアニアの Laurinčikas 氏と, 保型 L 関数の普遍性定理について文通するようになり, 彼がその年の秋に来日した折りに直接討論したりして, 共同研究を進めた。普遍性定理の証明が出来上がったのは 1998 年の夏だったが, こうして普遍性理論にもなじんでみると, 少し前に親しくなっていた Rankin-Selberg L 関数に対しても普遍性定理が証明できそうなことは容易に感じ取れた。そこで筆者は続いて Rankin-Selberg L 関数の普遍性について研究を始めたのだが, 普遍性の証明には二乗平均値定理が必要になる箇所がある。そこで Ivić の教科書にある方法を Rankin-Selberg L 関数に当てはめてみると,

$$\int_1^T |L(\sigma+it, f \otimes f)|^2 dt = C(\sigma)T + O(T^{5/2-2\sigma+\varepsilon}) \qquad (3/4 < \sigma < 1) \tag{6}$$

($C(\sigma)$ は定数) を得た。

この結果 (6) は, $3/4 < \sigma < 1$ における普遍性定理を証明するには十分である。しかし平均値理論の立場からは, Riemann ゼータの高次巾平均の場合と同様, 誤差項の指数が $\sigma \to 1-0$ のとき 0 に行かない, という欠点を持っている。筆者はこの点が何とかならないか, と思って更に考察を続け, 結局, 全く異なる方法により,

$$\int_1^T |L(\sigma+it, f\otimes f)|^2 dt = C(\sigma)T + O(T^{60(1-\sigma)/(29-20\sigma)+\varepsilon}) \qquad (31/40 < \sigma < 1) \qquad (7)$$

を示すことに成功した。Rankin-Selberg L 関数に対するこの結果と普遍性定理とを, 筆者は 1999 年 5 月から 6 月にかけてフィンランドの Turku で開かれた国際会議で公表し, 論文 [8] もその報告集に載せてもらった。

さて [8] においては Rankin-Selberg L 関数だけが扱われているが, (7) を導いた筆者の方法は一般性のあるものだった。例えば Riemann ゼータの高次巾平均の場合にも同じ方法が適用できて, $\sigma \to 1-0$ のとき指数が 0 に行くような誤差評価ができるであろうことは容易に想像がついた。いずれ時間を見つけてその計算もしてみよう, と考えはしたのだが, Turku から帰ってきてすぐに, 筆者は Mellin-Barnes 積分の方法による多重ゼータ関数の研究を始めてしまい, たちまちのうちに, そちらの方向の研究で手一杯になってしまった。そして筆者の方法の一般化は, 筆者ではなく, 金光滋氏, Sankaranarayanan と谷川氏の三人の共同研究 [7] で成し遂げられることになった。

この共著論文 [7] の源流の一つは, 約数問題を一般的な枠組みで論じた金光氏と Sankaranarayanan との共著 [6] である。筆者は Turku に行く前, [8] の結果とその証明を, 名大の解析数論セミナーで数週間にわたって詳しく喋ったのだが, その話を聞いてくれていた谷川氏が, 一方では同じ頃, [6] の preprint を精読していたそうである。従ってこの両者を結び付ける着想が, 谷川氏の頭脳のなかにごく自然に浮かんだのであろうと, 筆者は推測している。

次の貢献者は Ivić であった。上記の三人の共著 [7] の preprint を入手した彼は迅速に反応し, 独自のアイデアを加味して, 誤差評価を更に改良することに成功した ([3])。Rankin-Selberg L 関数については, 彼の結果は

$$\int_1^T |L(\sigma+it, f\otimes f)|^2 dt = C(\sigma)T + O(T^{4(1-\sigma)+\varepsilon}) \qquad (3/4 < \sigma < 1) \qquad (8)$$

であり, 明らかに (7) の改良を与える。また彼は Riemann ゼータの高次巾についても結果を述べており, $A_3(\sigma) = 3(1-\sigma)$ $(2/3 < \sigma < 1)$, $A_4(\sigma) = (16/5)(1-\sigma)$ $(11/16 < \sigma < 1)$, $A_5(\sigma) = (40/11)(1-\sigma)$ $(29/40 < \sigma < 1)$ といった, $\sigma \to 1-0$ のとき 0 となる指数が得られている。

さて筆者が [8] において (7) を示すために提案した基本的な着想は, 問題を係数和の誤差評価と結び付けることだった。一般にゼータ関数 $\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ の係数の和 $\sum_{n\le x} a_n$ は, Perron の公式などを用いた議論により, 容易に $xP_\varphi(\log x) + R_\varphi(x)$ の形に表わせる。ここに $P_\varphi(\log x)$ は $\log x$ の多項式, $R_\varphi(x)$ が誤差項である。筆者は [8] において, 部分和法を用いて $\varphi(s)$ の二乗平均の誤差項の評価を $R_\varphi(x)$ の二乗平均の上からの評価と結び付け, 後者について知られていた結果を適用して (7) を導いた。この着想は [7], [3] においてもそのまま受け継がれている。

ところが, $R_\varphi(x)$ の二乗平均の上からの評価は, 更にまた, $\varphi(s)$ の二乗平均の上からの評価と結び付くことが, 昔から知られていた。正確にいうと,

$$\int_X^{2X} |R_\varphi(x)|^2 dx = O(X^{1+2b+\varepsilon}) \tag{9}$$

となる b の下限を β とすると, β は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi(\sigma+it)}{\sigma+it} \right|^2 dt = O(1) \tag{10}$$

となる σ の下限 γ に等しい。これは φ と R_φ とを Mellin 変換で結び, Parseval の等式を使えば示すことができるのだが, この事実により,

$$\int_1^T |\varphi(\sigma+it)|^2 dt = O(T^2) \tag{11}$$

となるできるだけ小さい σ を見つければ, γ の値, 従って β の値が小さくなり, ひいては (7), (8) のような誤差評価を更に改良することも可能となる。一般に, critical strip の奥深くに入っていくと, ゼータ関数の二乗平均について精密な漸近式を得ることは困難になり, 概して上からの評価程度しか得られないのだが, そうした評価も, 上述の議論を介して, 漸近式が得られている領域における誤差評価の改良に結び付く, というわけである。

ゼータ関数の二乗平均の上からの評価については, 古くから多くの研究がある。そうした一般論を Rankin-Selberg L 関数に適用すると, critical line の上では,

$$\int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, f\otimes f)|^2 dt = O(T^{2+\varepsilon}) \tag{12}$$

を得る。筆者は [8] において, 係数和の四乗平均についての Ram Murty の結果などを使って上の評価を $O(T^2(\log T)^{1+\varepsilon})$ とほんの少しだけ改良したが, T^2 の部分の指数 2 を下げることは非常に困難だと思っていた。しかしその考えは間違っていた。Rankin-Selberg L 関数は, 志村五郎氏によって導入された symmetric square L 関数を用いて

$$L(s, f\otimes f) = \zeta(s) L(s+\kappa-1, \mathrm{sym}^2 f) \tag{13}$$

と書けるが, Sankaranarayanan [10] はこの分解式 (13) を使えば,

$$\int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, f\otimes f)|^2 dt = O(T^{3/2+2\theta_1+\varepsilon}) \tag{14}$$

を導けることを指摘した。ここに θ_1 は $\zeta(1/2+it) = O((|t|+2)^{\theta_1+\varepsilon})$ を満たす定数である。古典的に知られている値 $\theta_1 = 1/6$ を代入すれば (14) の誤差項の指数は $11/6+\varepsilon$ となり, 明らかに (12) を改良する。Lindelöf 予想 $\theta_1 = 0$ を仮定すれば指数 $3/2+\varepsilon$ を得る。

Sankaranarayanan の発想は単純簡明である。分解式 (13) を (14) の左辺に代入し, Riemann ゼータの部分を積分の外に取り出せば, (14) の左辺は

$$\leq \left(\max_{1\leq t\leq T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \right) \int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it+\kappa-1, \mathrm{sym}^2 f)|^2 dt \tag{15}$$

と上から押さえられる。すると, symmetric square L 関数は志村氏によって関数等式などが証明されているので, 二乗平均の上からの評価の一般論が適用でき, Riemann ゼータの部分は θ_1 を用いて評価すれば (14) を得る。もっとも Sankaranarayanan の原論文では, symmetric square L に関して単に既製の一般論を引用するのではなく, Ramachandra 流の議論を実際に展開しているので, 論文は少々長くなっているが, 彼のアイデアの本質は上述の点にある。

こうして Rankin-Selberg L 関数の二乗平均の上からの評価が改良できたので, 既に述べた論法により, (7), (8) の誤差評価を更に改良することもできるはずである。このことは Sankaranarayanan 自身も [10] の中で述べているのだが, 彼は当時 Ivić による改良 [3] を知らなかったので, 彼の結果は弱いものになっている。Ivić の方法を加味すると, 我々は次の結果を得る ([9])。

定理 1 $1/2 < \sigma < 1$ において,

$$\int_1^T |L(\sigma + it, f \otimes f)|^2 dt = C(\sigma)T + O(T^{c_1(\theta_1)(1-\sigma)+\varepsilon}) \tag{16}$$

となる。ここに $c_1(\theta_1) = 2(5 - 4\theta_1)/(3 - 4\theta_1)$ である。

Ivić [3] の指数 $4(1 - \sigma)$ は, Riemann ゼータのいわゆる convexity bound $\theta_1 = 1/4$ を代入すると得られる。より精密な θ_1 の値を代入すれば当然, 指数は改良される。古典的な $\theta_1 = 1/6$ からは $c_1(\theta_1) = 26/7 = 3.714...$, Huxley による現在最良の値 $\theta_1 = 32/205$ を使えば $c_1(\theta_1) = 1794/487 = 3.683...$, また Lindelöf 予想を仮定すれば $c_1(\theta_1) = 10/3 = 3.333...$ となる。(しかし, 10/3 でも誤差項の best-possible な評価には届いていないであろうと筆者は感じる。おそらく best-possible な評価は 2 であろう。)

さて上述した Sankaranarayanan のアイデアは, 他の L 関数についても, (13) のような類の分解式さえあれば適用可能であることは明らかである。特に保型形式論における種々のリフティングは, 付随する L 関数のそうした分解をもたらすので, 平均値の評価の改良が可能になると考えられる。筆者は 2002 年 5 月のある日, 自宅近くの香久山の住宅街の中を歩いているとき, こうした可能性にふと思い至った。例えば K を実二次体, $\mathcal{O}_K$ をその整数環として, $SL(2, \mathcal{O}_K)$ に関する weight κ の Hilbert cusp 形式 h の L 関数 $L(s, h)$ を考える。変数をシフトして $\tilde{L}(s, h) = L(s + (\kappa - 1)/2, h)$ とおくと, これは $\sigma > 1$ で絶対収束し, 全平面に解析接続されて, 標準的な形の関数等式を満たす。そこで一般論 (例えば [7]) を用いると

$$\int_1^T |\tilde{L}(\tfrac{1}{2} + it, h)|^2 dt = O(T^{2+\varepsilon}) \tag{17}$$

を得る。一般論では今のところ, これが限界だと思われるが, h がいわゆる土井・長沼リフトの像になっている場合には, (13) と類似した L 関数の分解があるので, 評価の改良ができる。即ち, $f(z)$ を前と同様, $SL(2, \mathbf{Z})$ に関する weight κ の正規化された正則 Hecke eigen cusp 形式とすると, Hilbert cusp 形式 h_0 (f の土井・長沼リフト) が存在して

$$L(s, h_0) = L(s, f)L(s, f, \chi_D) \tag{18}$$

となる。但し χ_D は K の判別式 D に対応する指標, $L(s,f)$ は f の L 関数であり, $L(s,f,\chi_D)$ はその χ_D-twist である。よって (15) と同様の不等式 (今の場合 $L(s,f)$ の部分を積分の外に出す) を考えることにより, θ_2 を $L(\kappa/2+it,f)=O((|t|+2)^{\theta_2+\varepsilon})$ を満たす定数として定めれば,

定理 2 $0<\sigma\leq 1/2$ において,

$$\int_1^T |\tilde{L}(\sigma+it,h_0)|^2dt = O(T^{5-(8-4\theta_2)\sigma+\varepsilon}) \tag{19}$$

を得る。特に $\sigma=1/2$ として, θ_2 としては Good (1982) によって得られた値 1/3 を用いれば,

$$\int_1^T |\tilde{L}(\tfrac{1}{2}+it,h_0)|^2dt = O(T^{5/3+\varepsilon}) \tag{20}$$

となり, これはもちろん (17) より良い評価になっている。更に, 定理 1 と同様に,

定理 3 $1/2<\sigma<1$ において,

$$\int_1^T |\tilde{L}(\sigma+it,h_0)|^2dt = C(\sigma;h_0)T+O(T^{2(8-4\theta_2)(1-\sigma)/(5-4\theta_2)+\varepsilon}) \tag{21}$$

も得られる。(現在では土井・長沼リフトの存在はもっと一般的な状況で証明されているので, 上述の結果もそのような場合にまで拡張が可能である。)

これらの結果を筆者が得たのは, 2002 年 6 月, Max Planck 研究所の客員研究員としてボンに滞在中のことだった。筆者の下宿はライン川のすぐほとりにあり, 窓から裏庭の向こうにライン川の流れが間近に見えた。この下宿から毎朝, 川べりを歩いて研究所に通い, 昼は研究所で, 夜は下宿で土井・長沼リフトの L 関数の計算をしたことを思い出す。6 月 12 日にはハイデルベルクを訪問し, Kohnen と Freitag の前で上述の結果について喋ったりもした。この時既に, Siegel モジュラー形式の場合の斉藤・黒川リフトや, より一般に池田リフトの L 関数についても同様の計算ができるであろう, と彼らに語った。実際, 後述する池田リフトの L 関数の形を見れば, 同様の方法が適用可能であることは容易に予測がつく。

しかし問題は, 筆者がその時まで, Siegel モジュラー形式の勉強をまともにしたことがなかった, という点にあった。筆者はこの夏, ミュンスター大学の SFB 客員研究員として再びドイツに滞在したのだが, その機会に少し組織的に Siegel モジュラー形式を勉強しようと思い, Klingen の教科書や Eichler-Zagier の Jacobi 形式の本を携えていった。そうして, まさしく泥縄的に若干の基礎知識を仕入れたのだが, 池田氏の論文を読んだわけではないので, 池田リフトのことを理解したとは到底言えない。だがまあ, すべてに完璧を期すわけにもいかない。池田氏の理論を真に理解することは当面棚上げにして, 筆者は池田リフトの L 関数の二乗平均の計算を始めることにした。

$SL(2,\mathbf{Z})$ に関する weight 2κ の正規化された正則 Hecke eigen cusp 形式 $f(z)$ に対し, ν を $\nu\equiv\kappa \pmod 2$ なる自然数とすると, f の池田リフトと呼ばれる, $Sp(2\nu,\mathbf{Z})$ に関する weight $\kappa+\nu$ の Siegel cusp 形式 F_0 が存在し, その standard L 関数は

$$L(s,F_0,\mathrm{st})=\zeta(s)\prod_{j=1}^{2\nu}L(s+\kappa+\nu-j,f) \tag{22}$$

と分解される。Standard L 関数は一般に解析接続や関数等式が知られているので，一般論により二乗平均の上からの評価が出せるが，池田リフトに付随する standard L の場合には，分解 (22) を用いて，その評価を改良することが期待できる。2002 年の秋から冬にかけては，投稿していた多重ゼータ関数の論文をレフェリーの要請に応じて拡充したり，埼玉大学での集中講義の準備をしたり，また大学内での業務も色々と忙しかったりして時間がとれず，二乗平均の研究を再開したのは結局 2003 年の春になってからだった。

池田リフトの L 関数の分解式 (22) を土井・長沼リフトの場合の式 (18) と比べると，大きな違いは，右辺の積の因子となっている各 L 関数の critical strip に「ずれ」があることである。即ち因子 $L(s+\kappa+\nu-j,f)$ の critical strip は $-\nu+j-1/2\leq\sigma\leq-\nu+j+1/2$ であり，相異なる j に対して，これらは (境界線上を除けば) 重なり合わない。2003 年の 6 月になって，筆者はこの事実の持つ重要性にようやく気が付いた。つまり，σ を $-\nu+j-1/2<\sigma<-\nu+j+1/2$ の範囲にとれば，この σ を critical strip に含むのは $L(s+\kappa+\nu-j,f)$ のみ (但し $j=\nu,\nu+1$ の場合には $\zeta(s)$ の部分が critical strip に入ってくる可能性があるので，とりあえず $j\neq\nu,\nu+1$ とする) で，他の因子は絶対収束域，あるいはそれを関数等式で折り返した領域に入る。すると，それらの領域では，Dirichlet 級数表示およびガンマ関数についての Stirling の公式により，各因子の絶対値の大きさがかなりよくわかる。そこで $L(\sigma+it,F_0,\mathrm{st})$ の二乗平均を考える際，それらの因子はすべて積分の外に出して評価する。すると $L(\sigma+it+\kappa+\nu-j,f)$ の二乗平均が残るが，これは Potter や Good によって漸近公式が知られている。以上を合わせると，池田リフトに付随する standard L 関数の二乗平均の大きさがほぼ決定できることになる。結果を $\nu+2\leq j\leq 2\nu$ の場合に述べれば次の通りである。

定理 4 $\nu+2\leq j\leq 2\nu$ に対し，

$$\int_1^T |L(\sigma+it,F_0,\mathrm{st})|^2dt$$

$$\asymp\begin{cases} T^{2(2\nu-j)(j+1-2\sigma)+1} & (-\nu+j<\sigma<-\nu+j+1/2) \\ T^{2(2\nu-j)(j+1-2\sigma)+1}\log T & (\sigma=-\nu+j) \\ T^{2(2\nu-j)(j+1-2\sigma)+4(j-\nu-\sigma)+1} & (-\nu+j-1/2<\sigma<-\nu+j) \end{cases} \tag{23}$$

が成り立つ。但し $X\asymp Y$ は $X\ll Y\ll X$ を意味する。

また $0<\sigma<1$ においては，Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ も critical strip に入るので，critical strip 内にある因子が二つになり，そのため $0<\sigma<1/2$, $1/2<\sigma<1$ においては今のところ上からの評価しか出せない。ところが，$L(s,F_0,\mathrm{st})$ の関数等式の中心軸である $\sigma=1/2$ のちょうど上でだけは，幸運な事情により，二乗平均の真の大きさが殆んどわかってしまう。その理由は，$\sigma=1/2$ においては $\zeta(s)$ 以外に $L(s+\kappa,f)$ と $L(s+\kappa-1,f)$ も critical strip に入るが，$\zeta(s)$ 以外の二つの因子の場合は critical strip といってもその一番端の境界上に来るので，その場合には $L(s,f)$ の zero-free region の情報 (Moreno の結果) を用いて，

$$\log(|t|+2)^{-2}\ll|L(\kappa+\tfrac{1}{2}+it,f)|\ll\log(|t|+2)^2,$$

$$\frac{|t|+2}{\log(|t|+2)^2}\ll|L(\kappa-\tfrac{1}{2}+it,f)|\ll(|t|+2)\log(|t|+2)^2$$

といった評価を示せるという事情にある。結果は

定理 5

$$\frac{T^{2\nu^2+1}}{(\log T)^7} \ll \int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, F_0, \mathrm{st})|^2 dt \ll T^{2\nu^2+1}(\log T)^9 \tag{24}$$

であり, 即ち log factor を除いて真の order が決定されたことになる。ここまで精密な結果が求まるとは, 筆者は当初全く予想していなかったのだが, その根本的な原因は上述した, critical strip の「ずれ」にある。

また池田リフトの L 関数に対しても, 定理 1 や定理 3 に類似した漸近式も当然示すことができる。即ち $\nu < \sigma < \nu + 1/2$ において

$$\int_1^T |L(\sigma+it, F_0, \mathrm{st})|^2 dt = C(\sigma; F_0)T + O(T^{(8/3)(\nu+1/2-\sigma)+\varepsilon}) \tag{25}$$

が得られる。この結果や, 上述した定理 1 から 5 の証明の詳細については, 筆者の preprint [9] を参照していただきたい。

なお上記 (24) から特に, $L(1/2+it, F_0, \mathrm{st}) \ll |t|^\varepsilon$ なる評価は成り立たないことがわかる。即ちこの場合には Lindelöf 予想のアナロジーは成立しない。そもそも池田リフトの standard L 関数の場合, 分解式 (22) から明らかなように Riemann 予想のアナロジーも成り立たない ((22) 右辺の各因子の critical line 毎に零点が並ぶと予想される) ので, Lindelöf 予想が成り立たなくても別に不自然ではないのである。これらの予想は, (22) のような分解がない, という意味で「既約」な L 関数についてのみ語られるべき命題なのであろう。

注意 池田リフトに付随する spinor L 関数についても分解式が得られている (R. Schmidt, K. Murakawa) が, この場合に類似の議論を展開しようとすると symmetric power L 関数についての, まだ証明されていないいくつかの性質を仮定せねばならないし, それらを仮定した上でも, standard L 関数の場合ほど明解な結果は得られない。

参考文献

[1] A. Ivić, The Riemann Zeta-Function, Wiley, 1985.

[2] A. Ivić, Some problems on mean values of the Riemann zeta-function, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **8** (1996), 101-123.

[3] A. Ivić, On mean values of some zeta-functions in the critical strip, ibid. **15** (2003), 151-166.

[4] A. Ivić and K. Matsumoto, On the error term in the mean square formula for the Riemann zeta-function in the critical strip, Monatsh. Math. **121** (1996), 213-229.

[5] A. Ivić, K. Matsumoto and Y. Tanigawa, On Riesz means of the coefficients of the Rankin-Selberg series, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **127** (1999), 117-131.

[6] S. Kanemitsu and A. Sankaranarayanan, A general divisor problem in Landau's framework, in "Analytic Number Theory", Proc. Conf. Beijing/Kyoto, C. Jia and K. Matsumoto (eds.), Kluwer, 2002, 205-221.

[7] S. Kanemitsu, A. Sankaranarayanan and Y. Tanigawa, A mean value theorem for Dirichlet series and a general divisor problem, Monatsh. Math. **136** (2002), 17-34.

[8] K. Matsumoto, The mean values and the universality of Rankin-Selberg L-functions, in "Number Theory", Proc. Turku Sympos., M. Jutila and T. Metsänkylä (eds.), Walter de Gruyter, 2001, pp. 201-221.

[9] K. Matsumoto, Liftings and mean value theorems for automorphic L-functions, preprint.

[10] A. Sankaranarayanan, Fundamental properties of symmetric square L-functions I, Illinois J. Math. **46** (2002), 23-43.