数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 15-23

連分数から実数へ

弘前大学・理工学部　小松　尚夫　(TAKAO KOMATSU)
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
HIROSAKI UNIVERSITY

1. 序論

与えられた実数α に対してその単純連分数展開 $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ は

$$\begin{aligned} \alpha = a_0 + \theta_0, \quad & a_0 = \lfloor \theta \rfloor, \\ 1/\theta_{n-1} = a_n + \theta_n, \quad & a_n = \lfloor \theta_{n-1} \rfloor \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

というアルゴリズムにより一意に与えられる. ここで、部分商列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ の規則性を見つけることは本質的であるが, 一方与えられた部分商列をもつような連分数がどんな実数に対応するのかという逆方向の問題も, よりいっそう難しいが面白い問題である.

部分商列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ が有限であれば, 対応する実数は有理数になり, その復元も容易である. 無限列の場合でもよく知られているのは、α が二次無理数, すなわち二次方程式の実根であるような無理数のときまたそのときに限り, α が循環単純連分数に展開される, という事実である. 二次無理数の詳細な場合については今でもいろいろな研究がなされている. しかし, 二次無理数以外の無理数については、その連分数展開の規則性が知られているものはそんなに多くない.

Hurwitz の連分数はその中でも比較的規則性が体系化されている. すなわち

$$\begin{aligned} & [a_0; a_1, \ldots, a_n, \overline{Q_1(k), \ldots, Q_p(k)}]_{k=1}^{\infty} \\ = & [a_0; a_1, \ldots, a_n, Q_1(1), \ldots, Q_p(1), Q_1(2), \ldots, Q_p(2), Q_1(3), \ldots, Q_p(3), \ldots] \end{aligned}$$

という形の連分数で、a_0 が整数, $a_1, \ldots, a_n$ が正整数, $Q_1, \ldots, Q_p$ が有理係数多項式で $k = 1, 2, \ldots$ で正整数となり少なくとも一つは定数ではないものである.

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots] = [2; \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty},$$

$$\tanh 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = [0; 1, 3, 5, 7, \ldots] = [0; \overline{2k - 1}]_{k=1}^{\infty},$$

$$\tan 1 = [1; 1, 1, 3, 1, 5, 1, \ldots] = [1; \overline{2k - 1, 1}]_{k=1}^{\infty}$$

などがこのタイプに該当するよく知られた例である. とは言え, 多項式の次数が2以上であるようなHurwitz連分数の実例は全く知られておらず, 次数が1の場合も上記に代表される3つの型,

---

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金　基盤研究(C)(2) 15540021の補助を受けた.

Tasoev 連分数 ([4], [5]) も規則的であるが, 今までほとんど知られることがなかった. これもHurwitz連分数同様擬似周期的であるが, Hurwitzの多項式部分が指数的になる. [2] において, $[0;\underbrace{\overline{a^k,\dots,a^k}}_{m}]_{k=1}^{\infty}$ というタイプを扱ってその閉じた形を求めたが, [3]ではより一般の形に拡張し, 例えば次のような一連の結果を得た. すなわち,

$$[0;\overline{ua^k}]_{k=1}^{\infty}=\frac{\sum_{s=0}^{\infty}u^{-2s-1}a^{-(s+1)^2}\prod_{i=1}^{s}(a^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty}u^{-2s}a^{-s^2}\prod_{i=1}^{s}(a^{2i}-1)^{-1}},$$

$$[0;ua-1,\overline{1,ua^{k+1}-2}]_{k=1}^{\infty}=\frac{\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s u^{-2s-1}a^{-(s+1)^2}\prod_{i=1}^{s}(a^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s u^{-2s}a^{-s^2}\prod_{i=1}^{s}(a^{2i}-1)^{-1}},$$

$$[0;\overline{ua^k,va^k}]_{k=1}^{\infty}=\frac{\sum_{s=0}^{\infty}u^{-s-1}v^{-s}a^{-(s+1)(s+2)/2}\prod_{i=1}^{s}(a^{i}-1)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty}u^{-s}v^{-s}a^{-s(s+1)/2}\prod_{i=1}^{s}(a^{i}-1)^{-1}},$$

$$[0;ua-1,1,va-2,\overline{1,ua^{k+1}-2,1,va^{k+1}-2}]_{k=1}^{\infty}$$
$$=\frac{\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s u^{-s-1}v^{-s}a^{-(s+1)(s+2)/2}\prod_{i=1}^{s}(a^{i}-1)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s u^{-s}v^{-s}a^{-s(s+1)/2}\prod_{i=1}^{s}(a^{i}-1)^{-1}}$$

である. Tasoev 連分数は特殊であるようだが, その性質はHurwitz 連分数によく似ている. 例えば, 部分商列が幾何級数となるような連分数

$$[0;a,ar,ar^2,\dots,ar^n,\dots]=\frac{\sum_{s=0}^{\infty}a^{-2s-1}r^{-s^2}\prod_{i=1}^{s}(r^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty}a^{-2s}r^{-s^2+2s}\prod_{i=1}^{s}(r^{2i}-1)^{-1}}$$

は Tasoev 連分数に属し, 部分商列が算術級数となるような連分数

$$[0;a,a+d,a+2d,\dots,a+nd,\dots]=\frac{I_{a/d}(\frac{2}{d})}{I_{(a/d)-1}(\frac{2}{d})},$$

は Hurwitz 連分数に属する. Tasoev 連分数は指数的であり, Hurwitz 連分数は多項式的である, と言うことも出来る.

このような性質をふまえ, [3]でtanh型とtan型に属するHurwitz 連分数を次のように一般化した. すなわち,

$$[0;uc,v(c+d),u(c+2d),v(c+3d),u(c+4d),v(c+5d),\dots]$$
$$=\frac{\sum_{s=0}^{\infty}\left(s!u^{s+1}(vd)^s\prod_{i=0}^{s}(c+id)\right)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty}\left(s!(uvd)^s\prod_{i=0}^{s-1}(c+id)\right)^{-1}}$$

及び

$$[0;uc-1,1,v(c+d)-2,1,u(c+2d)-2,1,v(c+3d)-2,1,\dots]$$
$$=\frac{\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(s!u^{s+1}(vd)^s\prod_{i=0}^{s}(c+id)\right)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(s!(uvd)^s\prod_{i=0}^{s-1}(c+id)\right)^{-1}},$$

である．e型の一般化はその時点までは出来なかったが，今回，周期3の擬似周期的連分数で1 が2つおきにあらわれるタイプについてその一般化が成功した．今まで知られているe型の連分数

$$e^{1/a} = [0; \overline{a(2k-1)-1, 1, 1}]_{k=1}^{\infty} \quad (a \geq 2),$$
$$ae^{1/a} = [a+1; \overline{2a-1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty} \quad (a \geq 1),$$
$$\frac{1}{a}e^{1/a} = [0; a-1, 2a, \overline{1, 2k, 2a-1}]_{k=1}^{\infty} \quad (a \geq 2)$$

(例えば, [5], Theorem 2 を見よ.) はこの一般形から簡単に導かれる．

類似の方法により, e型のHurwitz 連分数に対応するTasoev 連分数も導かれる．

2. 主結果

最初に, 周期3の擬似周期連分数で1 が2つおきにあらわれる e型Hurwitz 連分数を考える．tanh型Hurwitz 連分数は周期1で, tan型Hurwitz 連分数は周期2で1が1つおきにあらわれることに注意しておきたい．

u, a, b を有理数とし $k=1,2,\dots$ に対して $u(a+bk)$ が2以上の正整数を取るものとする．$v>1$ を整数とする．

定理 1.

$$[0; \overline{u(a+bk)-1, 1, v-1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} v^{-2n} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n+1} (a+b\nu)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} (n!)^{-1} \left((uv)^{-2n} \prod_{\nu=1}^{n} (a+b\nu)^{-1} - (uv)^{-2n-1} \prod_{\nu=1}^{n+1} (a+b\nu)^{-1} \right)}.$$

定理 2.

$$[0; \overline{v-1, 1, u(a+bk)-1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} (n!)^{-1} \left(u^{-2n} v^{-2n-1} \prod_{\nu=1}^{n} (a+b\nu)^{-1} + u^{-2n-1} v^{-2n-2} \prod_{\nu=1}^{n+1} (a+b\nu)^{-1} \right)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (uv)^{-2n} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n} (a+b\nu)^{-1}}.$$

次に, 定理 1 と定理 2に対応するTasoev 連分数についての結果は次のようになる．性質が似ているので類似の方法で求められ得る．

u を有理数, $a>1$ を整数とし ua が整数になるものとする．

定理 3.

$$[0; \overline{ua^k-1, 1, v-1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} v^{-2n} a^{-(n+1)^2} \prod_{\nu=1}^{n} (a^{2\nu}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \left((uv)^{-2n} a^{-n^2} - (uv)^{-2n-1} a^{-(n+1)^2} \right) \prod_{\nu=1}^{n} (a^{2\nu}-1)^{-1}}.$$

定理 4.

$$
\begin{aligned}
&[0;\overline{v-1,1,ua^k-1}]_{k=1}^{\infty}\\
&=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left(u^{-2n}v^{-2n-1}a^{-n^2}+u^{-2n-1}v^{-2n-2}a^{-(n+1)^2}\right)\prod_{\nu=1}^{n}(a^{2\nu}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}(uv)^{-2n}a^{-n^2}\prod_{\nu=1}^{n}(a^{2\nu}-1)^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

3. 諸定理の証明

諸定理の証明において，次の一般連分数と単純連分数との変換公式が役に立つ．

補助定理.

$$
\cfrac{1}{a_1'-\cfrac{1}{a_2'+\cfrac{1}{a_3'-\cfrac{1}{a_4'+\dots}}}}=[0;a_1'-1,1,a_2'-1,a_3'-1,1,a_4'-1,1,a_5'-1,1,a_6'-1,\dots]\,.
$$

証明. [1], (2.3.23) (p. 35) にあるような一般連分数と単純連分数との変換公式をまず最初に適当する．すなわち，

$$
a_0^*+\cfrac{b_1^*}{a_1^*+\cfrac{b_2^*}{a_2^*+\cfrac{b_3^*}{a_3^*+\cfrac{b_4^*}{a_4^*+\dots}}}}=[a_0;a_1,a_2,\dots]\,.
$$

ここで $a_0=a_0^*$, $a_1=a_1^*/b_1^*$,

$$
a_{2k}=\frac{b_{2k-1}^*b_{2k-3}^*\cdots b_1^*}{b_{2k}^*b_{2k-2}^*\cdots b_2^*}a_{2k}^*\,,\quad a_{2k+1}=\frac{b_{2k}^*b_{2k-2}^*\cdots b_2^*}{b_{2k+1}^*b_{2k-1}^*\cdots b_1^*}a_{2k+1}^*\quad (k=1,2,\dots)\,.
$$

次に，[6], Section 6 にあるような負の部分商を正に変換する公式 $[\dots,a,-b,\gamma]=[\dots,a-1,1,b-1,-\gamma]$ を繰り返し適用する．すると与式の左辺は

$$
\begin{aligned}
&[0;a_1',-a_2',-a_3',a_4',a_5',-a_6',-a_7',\dots]\\
=&[0;a_1'-1,1,a_2'-1,a_3',-a_4',-a_5',a_6',a_7',\dots]\\
=&[0;a_1'-1,1,a_2'-1,a_3'-1,1,a_4'-1,1,a_5',-a_6',-a_7',\dots]=\dots\\
=&[0;a_1'-1,1,a_2'-1,a_3'-1,1,a_4'-1,1,a_5'-1,1,a_6'-1,\dots]\,.
\end{aligned}
$$

□

ここでは代表として定理 1 だけを証明することにする．

定理１の証明．$f_k(z)$ を

$$f_k(z) = c_{k,0} + c_{k,1}z + c_{k,2}z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n}z^n \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義されるべき級数とする． ここで係数 $c_{k,n}$ はzと独立である．これが漸化関係式

$$f_{2k}(z) = u\bigl(a + b(k+1)\bigr)f_{2k+1}(z) - zf_{2k+2}(z),$$
$$f_{2k+1}(z) = vf_{2k+2}(z) + zf_{2k+3}(z)$$

を $k = 0, 1, 2, \dots$ においてみたすものとする．すると上の補助定理と

$$\frac{f_0(z)}{f_1(z)} = u(a+b) - \cfrac{z}{\cfrac{f_1(z)}{f_2(z)}} = u(a+b) - \cfrac{z}{v + \cfrac{z}{u(a+2b) - \cfrac{z}{\cdots}}}$$

という変形により

$$\frac{f_1(1)}{f_0(1)} = [0; u(a+b) - 1, 1, v - 1, u(a+2b) - 1, 1, v - 1, \dots]$$

が求める連分数展開となる．あとは$f_k(z)$ の一般形がわかればよい．
z^n $(n = 0, 1, 2, \dots)$の係数を比較することにより，$k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

(1) $$c_{2k,0} = u\bigl(a + b(k+1)\bigr)c_{2k+1,0},$$
(2) $$c_{2k+1,0} = vc_{2k+2,0}$$

及び

(3) $$c_{2k,n} = u\bigl(a + b(k+1)\bigr)c_{2k+1,n} - c_{2k+2,n-1} \quad (n \geq 1),$$
(4) $$c_{2k+1,n} = vc_{2k+2,n} + c_{2k+3,n-1} \quad (n \geq 1)$$

を得る． (1) と (2) から

$$c_{0,0} = u^k v^{k-1} \prod_{\nu=1}^{k} (a + b\nu) \cdot c_{2k-1,0}$$
$$= u^k v^k \prod_{\nu=1}^{k} (a + b\nu) \cdot c_{2k,0}$$

となる．$c_{0,0} = 1$とおいても一般性を失わない．というのは，$c_{0,0}$ は$f_1(1)/f_0(1)$ の形において結局は約分されてしまうからである．よって，

$$c_{2k,0} = u^{-k}v^{-k} \prod_{\nu=1}^{k} (a + b\nu)^{-1},$$
$$c_{2k+1,0} = u^{-k-1}v^{-k} \prod_{\nu=1}^{k+1} (a + b\nu)^{-1}.$$

(3) と (4) から

$$c_{0,n} = u^k v^k \prod_{\nu=1}^{k}(a+b\nu)\cdot c_{2k,n} + \sum_{i=1}^{k} u^i v^{i-1} \prod_{\nu=1}^{i}(a+b\nu)\cdot c_{2i+1,n-1} - \sum_{i=1}^{k} u^{i-1} v^{i-1} \prod_{\nu=1}^{i-1}(a+b\nu)\cdot c_{2i,n-1}$$

を得る.

一般に, 帰納法により

$$c_{2k,2n} = u^{-k-2n} v^{-k-2n} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{k+n}(a+b\nu)^{-1},$$

$$c_{2k+1,2n} = u^{-k-2n-1} v^{-k-2n} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{k+n+1}(a+b\nu)^{-1},$$

$$c_{2k,2n+1} = -u^{-k-2n-1} v^{-k-2n-1} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{k+n+1}(a+b\nu)^{-1},$$

$$c_{2k+1,2n+1} = 0$$

が証明出来る. これらの関係式で $k=0$ とおくと

$$c_{0,2n} = u^{-2n} v^{-2n} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n}(a+b\nu)^{-1},$$

$$c_{1,2n} = u^{-2n-1} v^{-2n} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n+1}(a+b\nu)^{-1},$$

$$c_{0,2n+1} = -u^{-2n-1} v^{-2n-1} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n+1}(a+b\nu)^{-1},$$

$$c_{1,2n+1} = 0.$$

以上より,

$$[0; \overline{u(a+bk)-1, 1, v-1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{f_1(1)}{f_0(1)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_{0,n}}$$
$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} v^{-2n} b^{-n} (n!)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n+1}(a+b\nu)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} b^{-n}(n!)^{-1}\left((uv)^{-2n}\prod_{\nu=1}^{n}(a+b\nu)^{-1} - (uv)^{-2n-1}\prod_{\nu=1}^{n+1}(a+b\nu)^{-1}\right)}.$$

□

定理 2 以下の証明は省略するが, 定理 2 では

$$f_{2k}(z) = v f_{2k+1}(z) - z f_{2k+2}(z),$$

$$f_{2k+1}(z) = u\big((a+b(k+1)\big)f_{2k+2} + zf_{2k+3}$$

をみたすようなべき級数を、定理 3 では

$$f_{2k}(z) = ua^{k+1}f_{2k+1}(z) - zf_{2k+2}(z),$$

$$f_{2k+1}(z) = vf_{2k+2}(z) + zf_{2k+3}(z)$$

をみたすようなべき級数を、定理 4 では

$$f_{2k}(z) = vf_{2k+1}(z) - zf_{2k+2}(z),$$

$$f_{2k+1}(z) = ua^{k+1}f_{2k+2}(z) + zf_{2k+3}(z)$$

をみたすようなべき級数を考えればよい.

4. 諸例

例 1. 定理1で $a=-1,\ b=2,\ v=2$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&[0;\overline{u(2k-1)-1,1,1}]_{k=1}^{\infty}\\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1}2^{-2n}2^{-n}(n!)^{-1}\prod_{\nu=1}^{n+1}(2\nu-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(n!)^{-1}\big((2u)^{-2n}\prod_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)^{-1} - (2u)^{-2n-1}\prod_{\nu=1}^{n+1}(2\nu-1)^{-1}\big)}\\
&= \frac{2\sum_{n=0}^{\infty}(2u)^{-2n-1}\big((2n+1)!\big)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}\Big((2u)^{-2n}\big((2n)!\big)^{-1} - (2u)^{-2n-1}\big((2n+1)!\big)^{-1}\Big)}\\
&= \frac{e^{1/(2u)} - e^{-1/(2u)}}{e^{-1/(2u)}} = e^{1/u} - 1\,.
\end{aligned}$$

例 2. ([5], Theorem 2 (9) 参照)
定理 1で $a=1,\ b=2,\ u=1,\ v=2a$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&[0;\overline{2k,1,2a-1}]_{k=1}^{\infty}\\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(2a)^{-2n}\big((2n+1)!\big)^{-1}(2n+3)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}\Big((2a)^{-2n}\big((2n+1)!\big)^{-1} - (2a)^{-2n-1}\big((2n+1)!\big)^{-1}(2n+3)^{-1}\Big)}.
\end{aligned}$$

これより

$$[a+1;2a-1,\overline{2k,1,2a-1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a(2a+1)}{(2a)^{2n}(2n+1)!} + \frac{a}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!(2n+3)}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2a-1}{(2a)^{2n}(2n+1)!} + \frac{1}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!(2n+3)}\right)}.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2a+1}{(2a)^{2n}(2n+1)!} + \frac{1}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!(2n+3)}\right)\\
&= (2a+1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2a)^{2n-1}(2n)!} + \frac{1}{(2a)^{2n}(2n+1)!}\right)\\
&= 2a\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2a)^{2n}(2n)!} + \frac{1}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!}\right) = 2ae^{1/(2a)}
\end{aligned}$$

また

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2a-1}{(2a)^{2n}(2n+1)!}+\frac{1}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!(2n+3)}\right)$$
$$=2a\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2a)^{2n}(2n)!}-\frac{1}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!}\right)=2ae^{-1/(2a)}$$

であるから,

$$[a+1;\overline{2a-1,2k,1}]_{k=1}^{\infty}=\frac{a\cdot 2ae^{1/(2a)}}{2ae^{-1/(2a)}}=ae^{1/a}$$

を得る.

例 3. ([5], Theorem 2 (10) 参照)
定理 2で $a=1$, $b=2$, $u=1$, $v=2a$ とおくと,

$$[0;\overline{2a-1,1,2k}]_{k=1}^{\infty}$$
$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left((2a)^{-2n-1}\left((2n+1)!\right)^{-1}-(2a)^{-2n-2}\left((2n+1)!\right)^{-1}(2n+3)^{-1}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}(2a)^{-2n}\left((2n+1)!\right)^{-1}}.$$

これより

$$[0;a-1,2a,\overline{1,2k,2a-1}]_{k=1}^{\infty}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2a+1}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!}+\frac{1}{(2a)^{2n+2}(2n+1)!(2n+3)}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a(2a-1)}{(2a)^{2n+1}(2n+1)!}+\frac{a}{(2a)^{2n+2}(2n+1)!(2n+3)}\right)}$$
$$=\frac{e^{1/(2a)}}{ae^{-1/(2a)}}=\frac{1}{a}e^{1/a}.$$

例 4. 定理 3で $a=3$, $u=2$, $v=1$ とおくと,

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}2^{-4n-1}3^{-(n+1)^2}\prod_{\nu=1}^{n}(9^{\nu}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^{-2n}3^{-n^2}-4^{-2n-1}3^{-(n+1)^2}\right)\prod_{\nu=1}^{n}(9^{\nu}-1)^{-1}}$$
$$=[0;2\cdot 3-1,1,1,2\cdot 3^2-1,1,1,2\cdot 3^3-1,1,1,2\cdot 3^4-1,1,1,2\cdot 3^5-1,\dots]$$
$$=[0;5,1,1,17,1,1,53,1,1,161,1,1,485,1,1,1457,1,1,4373,1,1,13121,1,1,\dots].$$

例 5. 定理 4で $a=2$, $u=3$, $v=5$ とおくと,

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{-2n}5^{-2n-1}2^{-n^2}+3^{-2n-1}5^{-2n-2}2^{-(n+1)^2}\right)\prod_{\nu=1}^{n}(4^{\nu}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}15^{-2n}2^{-n^2}\prod_{\nu=1}^{n}(4^{\nu}-1)^{-1}}$$
$$=[0;4,1,3\cdot 2-1,4,1,3\cdot 2^2-1,4,1,3\cdot 2^3-1,4,1,3\cdot 2^4-1,4,1,3\cdot 2^5-1,\dots]$$
$$=[0;4,1,5,4,1,11,4,1,23,4,1,47,4,1,95,4,1,191,4,1,383,4,1,767,4,1,\dots].$$

5. 特殊な例

以下はいずれも，閉じた形が知られていないが無限和表現は可能な連分数の例である．

$$[0;1^2,2^2,3^2,4^2,\dots]=[0;\overline{k^2}]_{k=1}^{\infty}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{36}\left(1-\frac{1}{144}+\frac{17}{259200}-\frac{149}{233280000}+\frac{257063}{41150592000000}-\cdots\right)}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}\left(1-\frac{1}{144}+\frac{17}{259200}-\frac{149}{233280000}+\frac{257063}{41150592000000}-\cdots\right)}.$$

$\binom{n}{2}$ を二項係数で $\binom{0}{2}=\binom{1}{2}=0$ とすると，

$$[0;q^{\binom{0}{2}},q^{\binom{1}{2}},q^{\binom{2}{2}},q^{\binom{3}{2}},q^{\binom{4}{2}},\dots]=[0;\overline{q^{\binom{k-1}{2}}}]_{k=1}^{\infty}$$
$$=\frac{1+q^{-1}-q^{-5}+q^{-5}(q^{-4}+q^{-9})-q^{-5}(q^{-4}(q^{-4}+q^{-9})+q^{-9}(q^{-4}+q^{-9}+q^{-16}))+\cdots}{2+q^{-1}-q^{-5}+q^{-5}(q^{-4}+q^{-9})-q^{-5}(q^{-4}(q^{-4}+q^{-9})+q^{-9}(q^{-4}+q^{-9}+q^{-16}))+\cdots}.$$

$\{F_n\}_n$ を Fibonacci 数とすると，

$$[0;F_0,F_1,F_2,F_3,\dots]=[0;1,1,2,3,5,8,13,\dots]$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6}+\frac{7}{180}-\frac{101}{10800}+\frac{19009}{8424000}-\frac{25053317}{45995040000}+\frac{561357912257}{4269259612800000}-\cdots\right)}{2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6}+\frac{7}{180}-\frac{101}{10800}+\frac{19009}{8424000}-\frac{25053317}{45995040000}+\frac{561357912257}{4269259612800000}-\cdots\right)}.$$

$w_n=\lfloor(n+1)\alpha\rfloor-\lfloor n\alpha\rfloor+10$ $(n=1,2,\dots)$, ただし $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$, とすると

$$[0;w_1,w_2,w_3,\dots]=[0;12,11,12,12,11,12,11,12,12,11,12,12,\dots]=$$
$$\frac{\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{132}\left(1-\frac{1}{144}+\frac{23}{228096}-\frac{673}{361304064}+\frac{22247}{572305637376}-\frac{791761}{906532129603584}+\cdots\right)\right)}{1+\frac{1}{132}\left(2-\frac{1}{144}+\frac{23}{228096}-\frac{673}{361304064}+\frac{22247}{572305637376}-\frac{791761}{906532129603584}+\cdots\right)}.$$

References

[1] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued Fractions: Analytic theory and applications*, (Encyclopedia of mathematics and its applications; vol. 11), Addison-Wesley, Reading, 1980.

[2] T. Komatsu, *On Tasoev's continued fractions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), 1-12.

[3] T. Komatsu, *On Hurwitzian and Tasoev's continued fractions*, Acta Arith. **107** (2003), 161-177.

[4] B. G. Tasoev, *Certain problems in the theory of continued fractions*, Trudy Tbiliss. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **16/17** (1984), 53–83. (Russian)

[5] B. G. Tasoev, *Rational approximations to certain numbers*, Mat. Zametki **67** (2000), 931–937; English transl. in Math. Notes **67** (2000), 786–791.

[6] A. J. van der Poorten, *Continued fraction expansions of values of the exponential function and related fun with continued fractions*, Nieuw Arch. Wiskd. **14** (1996), 221–230.

Takao Komatsu
Faculty of Science and Technology
Hirosaki University
Hirosaki, 036-8561
Japan
komatsu@cc.hirosaki-u.ac.jp