

# 重調和作用素に対する円内部境界値問題

亀高惟倫 (Yoshinori KAMETAKA)

竹居賢治 (Kenji TAKEI)

永井 敦 (Atsushi NAGAI)

大阪大学大学院基礎工学研究科

## 1 問題と準備

重調和作用素に対する円板内部境界値問題の 1 パラメータ族

BVP( $\varepsilon$ )

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = f(x) & (|x| < R) \\ u(R\xi) = u_{0,0}(\xi) & (|\xi| = 1) \\ ((1 - \varepsilon)D + \varepsilon D^2) u(x) \Big|_{x=R\xi} = u_{0,1}(\xi) & (|\xi| = 1) \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える.  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ ,  $D = x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2}$  である.

$x = (x_1, x_2) = r(\cos \theta, \sin \theta)$  と極座標を導入すると

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(r, \theta) & (0 \leq r < R, 0 \leq \theta < 2\pi) \\ u(R, \theta) = u_{0,0}(\theta) \\ ((1 - \varepsilon)D + \varepsilon D^2) u(r, \theta) \Big|_{r=R} = u_{0,1}(r, \theta) & (0 \leq \theta < 2\pi) \end{cases} \quad (1.2)$$

となる.  $D = r\partial_r$ ,  $\Delta = r^{-2}(D^2 + \partial_\theta^2)$  である.  $-\infty < \varepsilon < -1$  または  $0 \leq \varepsilon < \infty$  とする. 上の問題は自己共役である. BVP( $\varepsilon$ ) は任意の滑らかなデータ  $\{f(x); u_{0,0}(\xi), u_{0,1}(\xi)\}$  に対し唯一の古典解  $u(x), u(r, \theta)$  を持ち, 次のように表わされる.

$$u(x) = \int_{|y|<R} G(\varepsilon; x, y) f(y) dy + \sum_{j=0}^1 \int_{|\eta|=1} P_j(\varepsilon; x, R\eta) u_{0,j}(\eta) dS(\eta) \quad (1.3)$$

ここで  $dS(\eta)$  は  $\mathbb{R}^2$  の標準的なルベーグ測度から標準的に誘導された単位円周上の標準的な線素である. また極座標では以下のように表わされる.

$$u(r, \theta) = \int_0^R \int_0^{2\pi} G(\varepsilon; r, s, \theta - \varphi) f(s, \varphi) d\varphi s ds + \sum_{j=0}^1 \int_0^{2\pi} P_j(\varepsilon; r, \theta - \varphi) u_{0,j}(\varphi) d\varphi \quad (1.4)$$

グリーン関数  $G$  とポアッソン関数  $P_j$  の正值性と境界挙動を調べた. ポアッソン関数は紙面の都合上触れない. ([5] 参照)

次のチェビシエフ多項式の母関数とその変形が重要である.

$$Q(r, \lambda) = \frac{1}{2\pi} (1 - r^2) (1 - 2r\lambda + r^2)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \left[ T_0(\lambda) + 2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} T_\kappa(\lambda) r^\kappa \right] \quad (0 \leq r < 1, -1 \leq \lambda \leq 1) \quad (1.5)$$

$$Q(\delta; r, \lambda) = \int_0^1 Q(r\rho, \lambda) \rho^{\delta-1} d\rho \quad (0 < \delta < \infty, 0 \leq r < 1, -1 \leq \lambda \leq 1) \quad (1.6)$$

**補題 1.1**  $0 < \delta < \infty, 0 \leq r < 1, -1 \leq \lambda \leq 1$  に対し, 上の関数は次の関係を満たす.

- (1)  $Q(r, \lambda) > 0$
- (2)  $Q(\delta; r, \lambda) > 0$
- (3)  $(D + \delta)Q(\delta; r, \lambda) = Q(r, \lambda)$

補題 1.2  $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  に対し,  $\xi \cdot \eta = \cos(\theta - \varphi)$  であり, 以下が成り立つ.

$$(1) \quad Q(\rho, \xi \cdot \eta) = \frac{1}{2\pi} (1 - \rho^2)(1 - 2\rho\xi \cdot \eta + \rho^2)^{-1} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^{|k|} e^{\sqrt{-1}k(\theta-\varphi)} \quad (0 \leq \rho < 1) \quad (1.7)$$

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} Q(\rho, \xi \cdot \eta) d\varphi = 1 \quad (0 \leq \rho < 1, 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (1.8)$$

記述を簡単にするために  $x = r\xi$ ,  $y = s\eta$  又は  $r = |x|$ ,  $s = |y|$  の次のような関数を使う.

$$\Phi = \Phi(x, y) = |x - y|^2 = r^2 - 2rs\xi \cdot \eta + s^2 \quad (1.9)$$

$$\Psi = \Psi(x, y) = R^{-2}(R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2) = R^{-2}(R^2 - r^2)(R^2 - s^2) \quad (1.10)$$

$$\rho_0 = \rho_0(r, s) = R^{-2}rs \quad (1.11)$$

$$\rho_1 = \rho_1(r, s) = (r \vee s)^{-1}(r \wedge s) \quad (1.12)$$

ここで  $r \vee s = \max(r, s)$ ,  $r \wedge s = \min(r, s)$  である. 次のことが成り立つ.

$$0 \leq \rho_0 \leq \rho_1 \leq 1 \quad (0 \leq r, s \leq R)$$

$$\rho_1 + \rho_1^{-1} - 2\xi \cdot \eta = (rs)^{-1}\Phi \quad (1.13)$$

$$\rho_0 + \rho_0^{-1} - (\rho_1 + \rho_1^{-1}) = (rs)^{-1}\Psi \quad (1.14)$$

$$\rho_0 + \rho_0^{-1} - 2\xi \cdot \eta = (rs)^{-1}(\Phi + \Psi) \quad (1.15)$$

$$D\rho_0 = \rho_0, \quad D\rho_1 = -\operatorname{sgn}(r - s)\rho_1, \quad (1.16)$$

ここで  $\operatorname{sgn}(r) = 1$  ( $r \geq 0$ ),  $-1$  ( $r < 0$ ) である.

$$\rho_1 + \rho_1^{-1} = r^{-1}s + rs^{-1} \quad (1.17)$$

$$D(\rho_1 + \rho_1^{-1}) = (rs)^{-1}(r^2 - s^2) \quad (1.18)$$

## 2 ポアッソン問題

前節でのべた問題に対する結論を記述するために普通のポアッソン問題に対するグリーン関数とポアッソン関数が使われる。調和作用素に対する円板内部境界値問題の1パラメータ族を考える。

BVPH( $\varepsilon$ )

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & (|x| < R) \\ (1 - \varepsilon + \varepsilon D)u(x) \Big|_{x=R\xi} = u_{0,0}(\xi) & (|\xi| = 1) \end{cases} \quad (2.1)$$

極座標では

$$\begin{cases} -\Delta u = f(r, \theta) & (0 \leq r < R, 0 \leq \theta < 2\pi) \\ (1 - \varepsilon + \varepsilon D)u(r, \theta) \Big|_{r=R} = u_{0,0}(\theta) & (0 \leq \theta < 2\pi) \end{cases} \quad (2.2)$$

となる。以下  $0 \leq \varepsilon < 1$  とする。この問題も自己共役である。前節の結論のためには  $\varepsilon = 0$  の時、すなわち純粋なポアッソン問題の結論のみが使われるが、全体としての比較対照のため第三種境界条件も考える。BVPH( $\varepsilon$ ) は与えられた任意の滑らかなデータ  $\{f(x); u_{0,0}(\xi)\}$  に対し唯一の古典解  $u(x)$  又は  $u(r, \theta)$  を持ち以下のように表すことができる。

$$u(x) = \int_{|y| < R} H(\varepsilon; x, y) f(y) dy + \int_{|\eta|=1} P(\varepsilon; x, R\eta) u_{0,0}(\eta) dS(\eta) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = & \int_0^R \int_0^{2\pi} H(\varepsilon; r, s, \theta - \varphi) f(s, \varphi) d\varphi s ds + \\ & \int_0^{2\pi} P(\varepsilon; r, \theta - \varphi) u_{0,0}(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (2.4)$$

グリーン関数  $H$  とポアッソン関数  $P$  については次のことが知られている。証明は省略する。

定理 2.1  $\varepsilon = 0$  のとき次が成り立つ.

$$(1) \quad H(0; x, y) = \frac{1}{2} \int_{\rho_0}^{\rho_1} Q(\rho, \xi \cdot \eta) \rho^{-1} d\rho \quad (|x|, |y| < R)$$

$$(2) \quad H(0; x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Phi}^{\Phi+\Psi} \sigma^{-1} d\sigma = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Phi + \Psi}{\Phi} \quad (|x|, |y| < R)$$

$$(3) \quad P(0; x, y) = Q(R^{-1}r, \xi \cdot \eta) \quad (|x| < R, |y| = R)$$

定理 2.2  $0 < \varepsilon < 1$  のとき次が成り立つ.

$$(1) \quad H(\varepsilon; x, y) - H(0; x, y) = Q(\delta; \rho_0, \xi \cdot \eta) \quad (|x|, |y| < R)$$

ここで  $\delta = \varepsilon^{-1} - 1$  である.

$$(2) \quad P(\varepsilon; x, y) = (1 + \delta) Q(\delta; R^{-1}r, \xi \cdot \eta) \quad (|x| < R, |y| = R)$$

定理 2.3

$$(1) \quad \int_{|y| < R} H(0; x, y) dy = \frac{1}{4} (R^2 - r^2) \quad (|x|, |y| < R)$$

(2) 任意の有界関数  $f(y)$  に対し, 関数

$$u(x) = \int_{|y| < R} H(0; x, y) f(y) dy \quad (|x| < R)$$

は  $r = |x| \rightarrow R$  で 0 に収束する.

定理 2.4

$$(1) \quad 2\varepsilon^{-1} (1 - \varepsilon + \varepsilon D) H(\varepsilon; x, y) =$$

$$Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) - \operatorname{sgn}(r - s) Q(\rho_1, \xi \cdot \eta) + 2\delta H(0; x, y)$$

$$(|x|, |y| < R)$$

(2) 任意の有界関数  $f(y)$  に対し, 関数

$$u(x) = \int_{|y| < R} H(\varepsilon; x, y) f(y) dy \quad (|x| < R)$$

は以下の意味で  $BVPH(\varepsilon)$  の境界条件を満している.

$$(1 - \varepsilon + \varepsilon D)u(x) \rightarrow 0 \quad (r = |x| \rightarrow R)$$

定理 2.4 証明 有界関数  $f(y)$  に対して,

$$u(x) = \int_{|y| < R} [Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) - \operatorname{sgn}(r - s)Q(\rho_1, \xi \cdot \eta)] f(y) dy$$

が  $r = |x| \rightarrow R$  とするとき 0 に収束することを言えばよい.  $0 < R_0 < R$  なる  $R_0$  をとって

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x)$$

$$u_0(x) = \int_{R_0 < |y| < R} [Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) - \operatorname{sgn}(r - s)Q(\rho_1, \xi \cdot \eta)] f(y) dy$$

$$u_1(x) = \int_{|y| < R_0} [Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) - \operatorname{sgn}(r - s)Q(\rho_1, \xi \cdot \eta)] f(y) dy$$

とする.

$$|u_0(x)| \leq \sup_{|y| < R} |f(y)| \int_{R_0 < |y| < R} (Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) + Q(\rho_1, \xi \cdot \eta)) dy$$

補題 1.2 (2) によると

$$\int_{R_0 < |y| < R} Q(\rho_j, \xi \cdot \eta) dy = \frac{1}{2}(R^2 - R_0^2) \quad (j = 0, 1)$$

となるので任意に  $\varepsilon > 0$  を定めたとき,  $R_0$  を十分  $R$  に近くとると

$$|u_0(x)| < \varepsilon/2$$

とできる. 以下このような  $R_0$  を固定する. まず  $r \rightarrow R$  とするとき  $\rho_0, \rho_1 \rightarrow R^{-1}s$ ,  $\operatorname{sgn}(r - s) \rightarrow 1$  となるので各点収束の意味では

$$Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) - \operatorname{sgn}(r - s)Q(\rho_1, \xi \cdot \eta) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow R)$$

となる. ここで  $R_0 < R_1 < R$  なる  $R_1$  をとり  $|y| \leq R_0 < R_1 \leq |x| < R$  とすると

$$\rho_1 = r^{-1}s \leq R_1^{-1}R_0 < 1$$

$$\rho_0 = R^{-2}rs \leq R^{-1}s \leq R_1^{-1}R_0 < 1$$

となるので

$$|Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) - \operatorname{sgn}(r - s) Q(\rho_1, \xi \cdot \eta)| \leq \\ Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) + Q(\rho_1, \xi \cdot \eta) \leq \frac{1}{\pi} (1 - R_1^{-1} R_0)^{-1}$$

となりルベークの有界収束定理が使えて

$$u_1(x) \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow R)$$

となる. ■

### 3 グリーン関数の正值性, 階層構造と境界挙動

結論をのべよう.

定理 3.1  $\varepsilon = 0$  のとき

$$(1) \quad G(0; x, y) = \\ \frac{1}{8} r s \int_{\rho_0}^{\rho_1} (\rho + \rho^{-1} - (\rho_1 + \rho_1^{-1})) Q(\rho, \xi \cdot \eta) \rho^{-1} d\rho \quad (|x|, |y| < R) \quad (3.1)$$

(2) (ボッギオの公式)

$$G(0; x, y) = \frac{1}{16\pi} \int_{\Phi}^{\Phi + \Psi} (\sigma - \Phi) \sigma^{-1} d\sigma = \\ \frac{1}{16\pi} [\Psi - \Phi \log(\Phi + \Psi) + \Phi \log \Phi] \quad (|x|, |y| < R) \quad (3.2)$$

ボッギオの公式は 1905 年 T. Boggio [1] によりもっと一般の状況のもとで発見された. 見ただけで正值性がわかる優れたものである. 積分も簡単に実行でき, グリーン関数は初等関数である. (2) 式の最後の項

$$E(x, y) = \frac{1}{16\pi} \Phi \log \Phi$$

は重調和作用素の基本解であり, 残りの項が補正関数である.

我々が主張する最も重要な結論は上の公式 (1) である。これは下のボッキオの公式の前段階と言うべきものである。実際、簡単な積分変数の取り替えで (1) から (2) が従う。

グリーン関数が境界条件をみたすことを証明しようとするとき、公式 (2) によると困難であるが公式 (1) によると見通し良くできる。誰しも「重調和のグリーン関数は 1 重調和のグリーン関数を使って表示されるはず。」と思うが、定理 2.1 の公式 (1) と比較すると分かる通り、「使って」ではなくて、「両者の積分表示に重要な共通項がある。」が正解であった。その重要共通項がチェビシェフ多項式の母関数  $Q$  である。

一般の場合の結論をのべよう。

**定理 3.2**  $0 < \varepsilon < \infty$  または  $-\infty < \varepsilon < -1$  とすると

$$(1) \quad G(\varepsilon; x, y) - G(0; x, y) = \frac{1}{8} \Psi Q(\delta; \rho_0, \xi \cdot \eta) \quad (|x|, |y| < R) \quad (3.3)$$

ここで  $\delta = (\varepsilon^{-1} + 1)/2$  である。

(2) 特に  $\varepsilon = 1$  とすると  $\delta = 1$  であって

$$Q(1; \rho_0, \xi \cdot \eta) = \frac{1}{2\pi\rho_0} \left[ 2\sqrt{1 - (\xi \cdot \eta)^2} \left\{ \operatorname{Arctan} \frac{\rho_0 - \xi \cdot \eta}{\sqrt{1 - (\xi \cdot \eta)^2}} - \operatorname{Arctan} \frac{-\xi \cdot \eta}{\sqrt{1 - (\xi \cdot \eta)^2}} - \xi \cdot \eta \log(1 - 2\rho_0\xi \cdot \eta + \rho_0^2) \right\} - \rho_0 \right] \quad (3.4)$$

である。

定理 3.1, 3.2 は後の定理 4.2, 4.3 より従う。

**定理 3.3**  $-\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 < -1 < 0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$  とすると次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 < G(0; x, y) < G(\varepsilon_0; x, y) < G(\varepsilon_1; x, y) < \\ G(+\infty; x, y) = G(-\infty; x, y) < G(-\varepsilon_2; x, y) < G(-\varepsilon_3; x, y) \\ (|x|, |y| < R) \end{aligned} \quad (3.5)$$

この定理の証明は簡単である。 $\varepsilon$  が増加するとき  $\delta$  は減少する。グリーン関数の境界条件に関する結論をのべよう。



定理 3.4 任意の有界関数  $f(y)$  に対し, 関数

$$u(x) = \int_{|y| < R} G(0; x, y) f(y) dy \quad (3.6)$$

は  $BVP(0)$  の境界条件を満たす. すなわち,

$$u(x), Du(x) \rightarrow 0 \quad (r = |x| \rightarrow R) \quad (3.7)$$

となる.

この定理は以下の事実より従う.

定理 3.5

$$(1) \quad \int_{|y| < R} G(0; x, y) dy = \frac{1}{64} (R^2 - r^2)^2 \quad (3.8)$$

$$(2) \quad DG(0; x, y) = G(0; x, y) - \frac{1}{4} (r^2 - s^2) H(0; x, y) - \frac{1}{8} \Psi Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) \quad (3.9)$$

$$(3) \quad \int_{|y| < R} |DG(0; x, y)| dy \leq \frac{7}{64} R^2 (R^2 - r^2) \quad (3.10)$$

定理 3.5 証明 (1) は右辺がデータ  $\{1; 0, 0\}$  に対する  $BVP(0)$  の解であるという意味であるが, まだ解の一意性が示されていない段階なので直接証明する必要がある. 補題 1.2 (2) より従う. (2) が重要である. 我々の重要な結論, 定理 3.1 (1) の両辺を微分することにより得られる. 微分した結果が正体のよく分かったかたまりに分解できている点が重要である. ボッギオの公式を微分してこの結論を導くことは困難である. (3) は (2) から簡単に従う. ■

グリーン関数の境界条件に関する一般の場合の結論をのべよう.

定理 3.6  $-\infty < \varepsilon < -1$  または  $0 < \varepsilon < \infty$  とする. 任意の有界関数  $f(y)$  に対し, 関数

$$u(x) = \int_{|y| < R} G(\varepsilon; x, y) f(y) dy$$

は  $BVP(\varepsilon)$  の境界条件を満たす. 言いかえると

$$u(x), ((1 - \varepsilon)D + \varepsilon D^2) u(x) \rightarrow 0 \quad (r = |x| \rightarrow R) \quad (3.11)$$

この定理は次の事実より従う. 定理 2.4 の証明と同様にルベークの有界収束定理を使う.

定理 3.7 前定理と同じ  $\varepsilon$  に対し

$$(1) \quad \int_{|y|<R} (G(\varepsilon; x, y) - G(0; x, y)) dy = \frac{1}{32\delta} R^2 (R^2 - r^2) \quad (3.12)$$

$$(2) \quad 8\varepsilon^{-1} ((1 - \varepsilon)D + \varepsilon D^2) G(\varepsilon; x, y) = G_0(\varepsilon; x, y) + G_1(\varepsilon; x, y) \quad (3.13)$$

ここで

$$G_0(\varepsilon; x, y) = (R^2 - s^2) (Q(\rho_1, \xi \cdot \eta) - Q(\rho_0, \xi \cdot \eta)) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} G_1(\varepsilon; x, y) = & (|r^2 - s^2| - (R^2 - s^2)) Q(\rho_1, \xi \cdot \eta) + \\ & (R^2 - r^2)(\delta R^{-2}(R^2 - s^2) - 1) Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) + \\ & 8\delta(2 - \delta) (G(\varepsilon; x, y) - G(0; x, y)) + \\ & 8(2\delta - 1)DG(0; x, y) - 4r^2 H(0; x, y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} (3) \quad |G_1(\varepsilon; x, y)| \leq & |R^2 - s^2 - |r^2 - s^2|| Q(\rho_1, \xi \cdot \eta) + \\ & (\delta + 1) (R^2 - r^2) Q(\rho_0, \xi \cdot \eta) + \\ & 8|\delta(2 - \delta)| (G(\varepsilon; x, y) - G(0; x, y)) + \\ & 8|2\delta - 1| |DG(0; x, y)| + 4R^2 H(0; x, y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

(4)  $\delta$  に依存するある定数  $C(\delta)$  が存在し

$$\int_{|y|<R} |G_1(\varepsilon; x, y)| dy \leq C(\delta) R^2 (R^2 - r^2) \quad (3.17)$$

定理 3.7 証明

(1) は簡単である. (2) は定理 3.2 の (1) の両辺を 2 回微分することにより示される. このとき微分作用素  $D$  と掛け算作用素  $\Psi$  との交換関係に注意して注意深く計算しなければならない. 計算は長いが省略する. (3), (4) は簡単である.

## 4 グリーン関数の導出

BVP( $\varepsilon$ ) は古典解  $\tilde{u}(x)$  または  $u(r, \theta) = \tilde{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  を持つとする. 簡単の為,  $\tilde{u}(x)$  は  $C^\infty$  クラスの関数とする. したがって, 方程式の右辺  $\tilde{f}(x)$  も  $C^\infty$  関数である. 解  $u(r, \theta)$  はフーリエ級数展開することができる.

$$u(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}(r, k) e^{\sqrt{-1}k\theta} \quad (4.1)$$

そのフーリエ係数は

$$\hat{u}(r, k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-\sqrt{-1}k\varphi} d\varphi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.2)$$

によって与えられる.  $f(r, \theta) = \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  も同様の表現を持つ.  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  に対し, 解のフーリエ係数  $\hat{u}(r, k)$  は次の境界値問題を満たす.

BVP $^\wedge$ ( $\varepsilon$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} ((D-2)^2 - k^2)(D^2 - k^2) \hat{u}(r, k) = r^4 \hat{f}(r, k) \quad (0 \leq r < R) \\ \hat{u}(R, k) = \hat{u}_{0,0}(k) \\ ((1-\varepsilon)D + \varepsilon D^2) \hat{u}(r, k) \Big|_{r=R} = \hat{u}_{0,1}(k) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

結論は次のようである.

**定理 4.1** (解の一意性) BVP $^\wedge$ ( $\varepsilon$ ) に対する解は唯一であり, 次の公式により表される.

$$\begin{aligned} \hat{u}(r, k) = & \int_0^R 2\pi \hat{G}(\varepsilon; r, s, |k|) \hat{f}(s, k) s ds + \\ & \sum_{j=0}^1 2\pi \hat{P}_j(\varepsilon; r, |k|) \hat{u}_{0,j}(k) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.4)$$

グリーン関数  $\hat{G}$  とポアッソン関数  $\hat{P}_j$  は定理 4.2 と 4.3 により与えられる.

BVP( $\varepsilon$ ) に対する解のフーリエ係数はデータ関数により一意に決まる. これは BVP( $\varepsilon$ ) に対する古典解が唯一であることを意味する. グリーン関数とポアッソン関数は, 次のフーリエ級数展開を持つ.

## 定理 4.2

$$(1) \quad G(\varepsilon; r, s, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{G}(\varepsilon; r, s, |k|) e^{\sqrt{-1}k\theta} \quad (4.5)$$

(2)  $\varepsilon = 0$  のとき

$$\begin{aligned} \widehat{G}(0; r, s, \kappa) = \\ \frac{1}{16\pi} rs \int_{\rho_0}^{\rho_1} (\rho + \rho^{-1} - (\rho_1 + \rho_1^{-1})) \rho^{\kappa-1} d\rho \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.6)$$

(3)  $-\infty < \varepsilon < -1$  または  $0 < \varepsilon < \infty$  とすると

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\varepsilon; r, s, \kappa) - \widehat{G}(0; r, s, \kappa) = \\ \frac{1}{16\pi} \Psi \int_0^1 (\rho_0 \rho)^\kappa \rho^{\delta-1} d\rho \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.7)$$

(4)  $\kappa = 2, 3, 4, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} 16\pi (rs)^{-1} \widehat{G}(0; r, s, \kappa) = \\ \frac{1}{\kappa+1} (\rho_1^{\kappa+1} - \rho_0^{\kappa+1}) + \frac{1}{\kappa-1} (\rho_1^{\kappa-1} - \rho_0^{\kappa-1}) - (\rho_1 + \rho_1^{-1}) \frac{1}{\kappa} (\rho_1^\kappa - \rho_0^\kappa) \end{aligned} \quad (4.8)$$

(5)  $\kappa = 1$  のとき

$$16\pi (rs)^{-1} \widehat{G}(0; r, s, 1) = \frac{1}{2} (\rho_1^2 - \rho_0^2) + \log \frac{\rho_1}{\rho_0} - (\rho_1 + \rho_1^{-1}) (\rho_1 - \rho_0) \quad (4.9)$$

(6)  $\kappa = 0$  のとき

$$16\pi \widehat{G}(0; r, s, 0) = \rho_1 - \rho_0 + (\rho_0^{-1} - \rho_1^{-1}) - (\rho_1 + \rho_1^{-1}) \log \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (4.10)$$

## 定理 4.3

$$(1) \quad (P_0, P_1)(\varepsilon; r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\widehat{P}_0, \widehat{P}_1)(\varepsilon; r, |k|) e^{\sqrt{-1}k\theta} \quad (4.11)$$

(2)  $\varepsilon = 0$  のとき

$$(\widehat{P}_0, \widehat{P}_1)(0; r, \kappa) = \frac{1}{2\pi} (1, X) \mathbf{A}^{-1} (R^{-1}r)^\kappa \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.12)$$

(3)  $-\infty < \varepsilon < -1$  または  $0 < \varepsilon < \infty$  とすると

$$\begin{aligned} & (\widehat{P}_0, \widehat{P}_1)(\varepsilon; r, \kappa) - (\widehat{P}_0, \widehat{P}_1)(0; r, \kappa) = \\ & \frac{1}{8\pi} (1 - X)^{t\tilde{\mathbf{a}}} \mathbf{A}^{-1} \int_0^1 (R^{-1}r\rho)^\kappa \rho^{\delta-1} d\rho \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ここで,

$$X = (R^{-1}r)^2, \quad (a_0, a_1) = (a_0, a_1)(\kappa) = (\kappa, \kappa + 2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ -a_0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1) = (a_0^2 - a_0, a_1^2 - a_1), \quad \delta = (\varepsilon^{-1} + 1)/2$$

である.

新しい独立変数  $t$  を次のように定める.

$$t = \log r, \quad r = e^t \quad (4.14)$$

また次の記号を使用する.

$$T = \log R, \quad R = e^T, \quad D = r\partial_r = \partial_t = '$$

$$u(t) = \widehat{u}(e^t, k), \quad f(t) = e^{4t} \widehat{f}(e^t, k), \quad u_{0,j} = \widehat{u}_{0,j}(k) \quad (j = 0, 1)$$

$$\kappa = |k|$$

(4.3) は次のようになる.

BVP $^{\wedge}(\varepsilon)$

$$\begin{cases} p(D)u = f(t) & (-\infty < t < T) \\ u(T) = u_{0,0} \\ ((1-\varepsilon)D + \varepsilon D^2)u(t) \Big|_{t=T} = u_{0,1} \end{cases} \quad (4.15)$$

ここで  $p(\lambda)$  は特性多項式である.

$$p(\lambda) = ((\lambda - 2)^2 - \kappa^2)(\lambda^2 - \kappa^2) = \sum_{j=0}^4 p_j \lambda^j$$

$$p_0 = \kappa^2(\kappa^2 - 4), \quad p_1 = 4\kappa^2, \quad p_2 = -2(\kappa^2 - 2), \quad p_3 = -4, \quad p_4 = 1 \quad (4.16)$$

(4.4) は次のようになる.

$$u(t) = \int_{-\infty}^T G(\varepsilon; t, \tau) f(\tau) e^{-2\tau} d\tau + \sum_{j=0}^1 P_j(\varepsilon; t) u_{0,j} \quad (4.17)$$

$$G(\varepsilon; t, \tau) = G(\varepsilon; t, \tau, \kappa) = 2\pi \widehat{G}(\varepsilon; \tau, s, \kappa) \Big|_{r=e^t, s=e^\tau} \quad (4.18)$$

$$P_j(\varepsilon; t) = P_j(\varepsilon; t, \kappa) = 2\pi \widehat{P}_j(\varepsilon; \tau, \kappa) \Big|_{r=e^t} \quad (j = 0, 1) \quad (4.19)$$

である.

定理 4.2 と 4.3 は次の 2 つの定理から従う.

#### 定理 4.4

$$(1) \quad G(0; t, \tau, \kappa) = \frac{1}{4} e^{t+\tau} \int_{|t-\tau|}^{2T-t-\tau} e^{-\kappa\sigma} [\cosh(\sigma) - \cosh(|t-\tau|)] d\sigma \quad (4.20)$$

$$(2) \quad G(\varepsilon; t, \tau, \kappa) - G(0; t, \tau, \kappa) = \frac{1}{8} \Psi \frac{1}{\kappa + \delta} \rho_0^\kappa \quad (4.21)$$

定理 4.5

$$(1) \quad (P_0, P_1)(0; t, \kappa) = (1, X) \mathbf{A}^{-1} (R^{-1} r)^\kappa \quad (4.22)$$

$$(2) \quad (P_0, P_1)(\varepsilon; t, \kappa) - (P_0, P_1)(0; t, \kappa) = \frac{1}{4} (1 - X) {}^t \hat{\mathbf{a}} \mathbf{A}^{-1} \int_0^1 (R^{-1} r \rho)^\kappa \rho^{\delta-1} d\rho \quad (4.23)$$

定理 4.4, 4.5 証明 ここでは方針だけを説明する.

$$\mathbf{u} = {}^t(u_0, u_1, u_1, u_3)$$

$$u_i = u^{(i)} \quad (0 \leq i \leq 3)$$

とすると (4.15) は

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{P} \mathbf{u} + {}^t(0, 0, 0, 1) f(t) & (-\infty < t < T) \\ u_0(T) = u_{0,0} \\ (1 - \varepsilon) u_1(T) + \varepsilon u_2(T) = u_{0,1} \end{cases} \quad (4.24)$$

に等価となる.  $\mathbf{P}$  のジョルダン標準形

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{W}$$

を求める.

$$\mathbf{u} = \mathbf{W} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{u}$$

により新しい未知関数  $\mathbf{v}$  を導入すると

$$\mathbf{v}' = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{v} + \mathbf{e} f(t)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{W}^{-1} {}^t(0, 0, 0, 1)$$

となる.

初期値問題としてこれを解き  $v(t)$  を求める. 次に初期条件  $v(0)$  を境界条件が満たされるように決める. このとき極座標を導入したために, 人工的に出現した特異境界点  $r = 0$  または  $t = -\infty$  において「かくれた境界条件」を引き出して使う. 高周波の場合 ( $\kappa = 3, 4, 5, \dots$ ) には特性多項式  $p(\lambda)$  の根すなわち特性根は

$$\kappa + 2 > \kappa > 0 > -(\kappa - 2) > -\kappa$$

となり, 互いに異なり 2 つが正, 残りの 2 つが負となり事態は非常に簡単である. この場合, 使用される「かくれた境界条件」は  $v_i$  ( $0 \leq i \leq 3$ ) が有界, すなわち  $u^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq 3$ ) が有界ということになる. このことは  $u^{(i)}$  がなめらかな 2 変数関数  $\tilde{u}(x)$  とその導関数達のフーリエ係数ということから簡単にわかる.

低周波の場合 ( $\kappa = 0, 1, 2$ ) には事態は複雑である. 一番複雑なのは第 0 モード ( $\kappa = 0$ ) で特性根は  $(2, 2, 0, 0)$  となり 2 重根が 2 組あらわれる. 第 1 モード ( $\kappa = 1$ ) では特性根は  $(3, 1, 1, -1)$  となり 2 重根 1 組が登場する. 第 2 モード ( $\kappa = 2$ ) では特性根は  $(4, 2, 0, -2)$  となる. 特性根 0 が含まれることになる. ジョルダン標準形  $\hat{P}$  を求める作業が複雑になる. もっとも困難な点は「かくれた境界条件」を引き出すことで, この場合には  $v_i$  ( $0 \leq i \leq 3$ ) が有界というだけでは足りず, そのうちの特定のものが  $t \rightarrow -\infty$  とするとき十分早く 0 に収束するということを導かなくてはならない. 詳しくは [5] に書いてある.

## References

- [1] T. Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine m*, Rend. Circ. Mat. Palermo 20 (1905), 97-135.
- [2] H. Grunau and G. Sweers, *Sharp estimates for iterated Green functions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **132A** (2002), pp. 91-120.
- [3] Y. Kametaka, K. Takemura, Y. Suzuki, A. Nagai, *Positivity and Hierarchical Structure of Green's Functions of 2-Point Boundary Value Problems for Bending of a Beam*, Japan J. Ind. Appl. Math., **18** (2001), pp.543-566.



- [4] 亀高惟倫, 竹居賢治, 永井敦; 円板内の重調和作用素に対するグリーン関数とポアソン関数, 京都大学数理解析研究所講究録 1302, 2月, 2003年, pp.60-67.
- [5] Y. Kametaka, T. Takei, A. Nagai *Green functions and Poisson functions for a biharmonic operator on a disk*, 投稿中.
- [6] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff, 1963.