数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 78-80

クライン群の極限集合上での群同変な連続写像について

宮地 秀樹
HIDEKI MIYACHI *
東京電機大学
TOKYO DENKI UNIVERSITY †

半共役, Cannon-Thurston 写像 X と Y を位相空間とする。X の自己同相写像で生成される群 G から Y の自己同相写像全体 Homeo(Y) の準同型 ρ に対して、連続写像 $f: X \to Y$ が、同変性

$$\rho(g) \circ f(x) = f \circ g(x) \quad \forall (g, x) \in G \times X$$

を満たすとき、f は ρ に関する半共役 (semi-conjugacy) であるといわれる。歴史的背景から、特に G はクライン群であり $X = \Lambda_G, Y = \hat{\mathbb{C}}$ かつ $\rho(G) \subset \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ である状況のとき、半共役写像は Cannon-Thurston 写像と呼ばれている。クライン群の擬等角変形を与える擬等角写像（の極限集合への制限）は Cannon-Thurston 写像の典型例である。

基本予想 半共役写像に関しての問題は『存在』もしくは『性質』を問うものの２種類に分類出来るであろう。Cannon-Thurston 写像の『存在』に対しては次の Thurston の予想がある。

予想. G を有限生成クライン群とする。このとき、純斜航的幾何学的有限群 H と同型 ρ があって、ρ に関する Cannon-Thurston 写像が存在するであろう。

Thurston の双曲化定理から G と同型な純斜航的幾何学的有限群 H は必ず存在するので、この予想の本質的な問題点はその同型写像に関する Cannon-Thurston 写像の存在である。

現在、この予想に関しては（筆者の知る限り）完全な解答は得られていない。（筆者の知っている）現在知られている結果は以下の通りである。

1. G が幾何学的有限群 (e.g. Floyd [4])。
2. S^1 上閉曲面束の構造を持つ双曲多様体内のファイバーに対応する部分群 (Cannon-Thurston [3])。
3. 有界幾何を持つ閉曲面群 (Minsky[7])。
4. 自由分解不能かつ有界幾何を持つクライン群 (Klarreich[5])。

さらに現在では位相的素直かつ有界幾何を持つクライン群に対して予想が成立することも証明出来る ([8])。上記の群は ((1) を除いて) G が純斜航的な場合を考えているが、放物型を含むクライン群を考えたときには Bowditch[2] や McMullen[6] によって部分的解答が得られている。

*この研究集会で講演をする機会を与えていただいた岡山理科大学の神谷先生に感謝いたします。また、大阪大学の大鹿先生と作間先生と秋吉さんには非常に有益なコメントそして議論をさせて頂きました。本当に感謝いたします。末筆ながら、平成１５年１０月から平成１６年３月まで COE 研究員としての補助を頂いた大阪大学に感謝いたします。

†miyachi@r.dendai.ac.jp

性質に関する定理　前述のように存在に関する結果はたくさんの人々により研究されているが、Cannon-Thurston 写像の性質、特に解析的な性質は現在までに（筆者の知る限り）殆ど研究されていない。しかし、解析的な性質を研究することは、例えば（下記系のように）群同変な擬等角写像の退化等の研究に関連するので重要であると思われる。

この度、性質に関して次のような結果を得た。

定理 1 ([9]). G を $\mathbb{D}$ に作用する閉曲面群と同型なフックス群とする。また $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ を忠実な離散表現とする。もし $\rho(G)$ が有界幾何を持てば、ρ に関する Cannon-Thurston 写像 F は次の連続性を持つ：

$$d_e(F(x), F(y)) \leq A \left\{ \log \frac{3}{|x-y|} \right\}^{-B}$$

さらに、定数 $A = A(\rho)$ は次の性質を持つ：ρ_n が ρ に代数的に収束し、かつ $\{\rho_n\}_n$ は一様有界幾何をもつ、つまり、商多様体 $\mathbb{H}^3/\rho_n(G)$ の単射半径は n によらず下から押さえられている、とするとき、$A_0 > 0$ が存在して $A(\rho_n) \leq A_0$ が成立する。

主定理から従う系　主定理から $\{\rho_n\}_n$ を一様有界幾何を持つ忠実な離散表現の列とするとき、それらに関する Cannon-Thurston 写像は同程度連続である。故に次の系を得る。

系 1 ([9]). G を $\mathbb{D}$ に作用する閉曲面群と同型なフックス群とし、$\{\rho_n\}_n$ を一様有界幾何を持つ G の忠実な離散表現の列とする。このとき、ρ_n がある表現 ρ に代数的に収束すれば、ρ_n の Cannon-Thurston 写像は ρ の Cannon-Thurston 写像に一様収束する。

最後に上の系と関連して、性質に関する次の問題を与えておく。

問題　G を有限生成フックス群とする。G の型を保つ APT を持たない任意の表現 ρ に対して、次のような G の擬フックス群表現の列 $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するであろうか？

(1) ρ_n は ρ に代数的に収束する。

(2) $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ の Cannon-Thurston 写像が構成する写像族は同程度連続である。

上記の問題の状況において、表現 ρ_n の表現の Cannon-Thurston 写像は（部分列をとれば）ある連続関数に収束し、その極限は ρ の Cannon-Thurston 写像であることが容易にわかる。故に、上記の状況から ρ に関する Cannon-Thurston 写像の存在が導かれる。故に、Anderson と Maskit による結果 [1] より、上記の問題の肯定的解答から極限集合に関する局所連結予想の肯定的解答が従うことがわかる。

[1] J. Anderson and B. Maskit, On the local connectivity of limit set of Kleinian groups. Complex Variables Theory Appl. **31**, no. 2, 177–183 (1996).

[2] B. Bowditch, The Cannon-Thurston map for punctured-surface groups, preprint (2002).

[3] J. Cannon and W. Thurston, Group invariant Peano Curves, preprint (1989).

[4] W. Floyd , Group Completions and Limit sets of Kleinian Groups, Invent. math. **57**, 205–218 (1980).

[5] E. Klarreich, Semiconjugacies between Kleinian Group actions on the Riemann Sphere, Amer. Jour. of Math. **121**, 1031–1078 (1999).

[6] C. McMullen, Local connectivity, Kleinian groups and geodesics on the blowup of the torus, Invent. Math. **146** (2001), 35–91.

[7] Y. Minsky, On Rigidity, Limit Sets, and End Invariants of Hyperbolic 3-Manifolds, Jour. A.M.S. **7** (1994), 539–588.

[8] H. Miyachi, Semiconjugacy between actions of Topologically tame Kleinian groups, preprint.

[9] H. Miyachi, Moduli of Continuity of Cannon-Thurston maps, preprint (2002).