数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 133-140

ジョンソン準同型とトレリ群のコホモロジーについて

東京大学大学院数理科学研究科　逆井卓也 (Takuya Sakasai)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

1　はじめに

Σ_g を種数 $g \geq 3$ の連結な向き付けられた閉曲面とし，$\mathcal{M}_g$ をその写像類群とする．$\mathcal{M}_g$ は，Σ_g の向きを保つ微分同相たちのなす群をイソトピーの同値関係で割って得られる群である．$\mathcal{M}_g$ は Σ_g の整係数 1 次ホモロジー群 $H := H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ に自然に作用し，準同型写像

$$\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$$

を定める．この準同型写像の核 $\mathcal{I}_g$ を Torelli 群という．この群に対し Johnson は全射準同型写像

$$\tau : \mathcal{I}_g \longrightarrow \wedge^3 H/H =: U$$

を定義した [Jo1]．ここで U は階数が $\binom{2g}{3} - 2g$ の自由加群となっている．この準同型写像は現在（第 1）Johnson 準同型と呼ばれており，これを用いて Torelli 群に関する様々な性質が導かれた．

いま，Johnson 準同型が誘導する有理数係数コホモロジーに関する準同型写像

$$\tau^* : \wedge^n U_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^n(\mathcal{I}_g, \mathbb{Q})$$

を考える．ここで $U_{\mathbb{Q}} = U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ である．$n = 1$ のときは Johnson によって同型であることが示されている [Jo2]．$n = 2$ のときは Hain がシンプレクティック群の表現論を用いてその核を決定した [Ha]．

本講演では，はじめに写像類群の定義やそのコホモロジーに関するこれまでに知られている結果をまとめ，最後に Hain による手法にならって $n = 3$ のときについて調べた結果を報告することを目的とする．具体的には，$\wedge^3 U_{\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$-加群として，安定域である $g \geq 9$ において 24 個の既約成分に分解するが，まずそのうちの 23 個の成分に関して τ^* の核に入っているかどうかを決定する．残り 1 つの成分に関してはその答えが得られていないが，その問題を河澄響矢氏と森田茂之氏の結果 [KM] を用いて曲面バンドルの特性類のことばで表す．

2　準備

この節では，講演で用いる記号などについて整理しておく．

2.1 群のホモロジー，コホモロジー

群のホモロジー，コホモロジーについては，Brown の本 [Br] がよい参考書となっている．以下，簡単にまとめておく．G を群とし，A を $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Q}$ とする．A を自明な G-作用を持つ G-加群とみなす．このとき，群 G のホモロジー，コホモロジーは

$$H_*(G,A) := H_*(K(G,1),A)$$
$$H^*(G,A) := H^*(K(G,1),A)$$

で定義される．ここで，$K(G,1)$ は Eilenberg-MacLane 空間と呼ばれるもので，

$$\pi_n(K(G,1)) = \begin{cases} \{1\} & n=0\text{のとき} \\ G & n=1\text{のとき} \\ O & n\geq 2\text{のとき} \end{cases}$$

で特徴づけられる位相空間である．このような空間は CW 複体としてホモトピー同値なものを除いて一意に存在する．例として，$K(\mathbb{Z},1)=S^1$, $K(\pi_1\Sigma_g,1)=\Sigma_g$ などが挙げられる．

$f: G_1 \to G_2$ を群準同型とする．このとき，群のホモロジー，コホモロジーの間の準同型

$$f_*: H_*(G_1,A) \longrightarrow H_*(G_2,A)$$
$$f^*: H^*(G_2,A) \longrightarrow H^*(G_1,A)$$

が誘導される．群のホモロジーは共変関手，コホモロジーは反変関手となっている．すなわち，$\mathrm{id}: G \to G$ に対して，$\mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{H_*(G,A)}$, $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}_{H^*(G,A)}$ であり，群準同型 $f: G_1 \to G_2$, $g: G_2 \to G_3$ に対して，$(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$, $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$ が成り立つ．

$K(G,1)$ の定義より，群 G に対して，0 次のホモロジー，コホモロジーは常に $\mathbb{Z}$ と同型であり，1 次のホモロジーは G のアーベル化となっている．また，一般に $H_*(G,\mathbb{Q}) = H_*(G,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ であり，自明な G-加群を係数とする場合は，ホモロジーとコホモロジーの間には通常の普遍係数定理が成り立つ．

2.2 写像類群，Torelli 群とそれらのコホモロジー

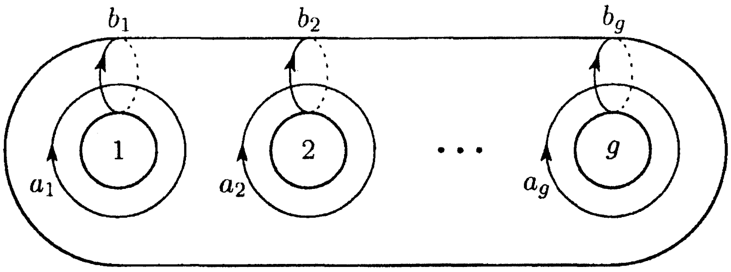
Σ_g 上には，交叉形式と呼ばれる非退化な交代形式

$$\mu: H_1(\Sigma_g,\mathbb{Z})\otimes H_1(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

が存在する．μ を用いると，$H_1(\Sigma_g,\mathbb{Z})$ はその双対加群である整係数 1 次コホモロジー群 $H^1(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(\Sigma_g,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ と自然に同一視することができる．ここで,「自然に」とは，$\mathcal{M}_g$ の作用について compatible であることを意味する．以下，統一的に H と書くことにする．このとき，次のページの図のように H の基底 $\langle a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g\rangle$ をとると，

$$\mu(a_i,a_j)=0,\quad \mu(b_i,b_j)=0,\quad \mu(a_i,b_j)=\delta_{i,j}$$

が成り立ち，μ に関するシンプレクティック基底となっている．以下，これを H の基底として固定する．



$H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底（のひとつ）

写像類群 $\mathcal{M}_g$ や Torelli 群 $\mathcal{I}_g$ は群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{I}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

をなす．これらの群に対し，基点付きの写像類群を $\mathcal{M}_{g,*}$，対応する Torelli 群を $\mathcal{I}_{g,*}$ と書くことにする．$\mathcal{M}_{g,*}$ は，Σ_g 上の基点を保つ微分同相たちのなす群を，各レベルで基点を保つようなイソトピーの同値関係で割って得られる群である．Johnson 準同型は $\mathcal{I}_g$, $\mathcal{I}_{g,*}$ のいずれの場合にも定義されており，次のような可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{g,*} & \xrightarrow{\tau} & \wedge^3 H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I}_g & \xrightarrow{\tau} & U = \wedge^3 H/H \end{array}$$

で表される．ここで，$\omega = \sum_{i=1}^{g} a_i \wedge b_i$ とし，H は埋め込み

$$H \hookrightarrow \wedge^3 H \quad (x \mapsto x \wedge \omega)$$

によって $\wedge^3 H$ の $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$-部分加群とみなしている．どちらの場合にも写像類群が，Torelli 群に対しては外部共役で，τ の行き先の自由加群に対しては $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ を通じた自然な作用で作用しているが，τ はこれらの作用と可換である．τ が誘導する 1 次ホモロジー（アーベル化）の間の準同型は，modulo 2-torsion で同型であることが Johnson によって示されている [Jo2]．τ は Torelli 群の自由加群による「近似」と思うことができる．

Johnson 準同型は森田茂之氏によって写像類群全体にまで拡張されている [Mo3]．それは可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{g,*} & \xrightarrow{\rho_1} & \frac{1}{2}\wedge^3 H \rtimes \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{I}_{g,*} & \xrightarrow{\tau} & \wedge^3 H \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_g & \xrightarrow{\rho_1} & \frac{1}{2}U \rtimes \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{I}_g & \xrightarrow{\tau} & U \end{array}$$

によって表される．ここで $\frac{1}{2}\wedge^3 H$ は $\wedge^3 H_{\mathbb{Q}} = \wedge^3(H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ の部分加群である．$\frac{1}{2}U$ についても同様である．ρ_1 は拡大 Johnson 準同型と呼ばれる．ρ_1 が写像類群の「近似」を与えていると思うと，元のものとの「差」を考えることは非常に重要である．いま，ρ_1 の誘導する有理数係数コホモロジーに関する準同型を考えると，それは半直積群のコホモロジーに関する一般論により，

$$\begin{array}{llll} \rho_1^*: & (\wedge^*(\wedge^3 H_{\mathbb{Q}}))^{\mathrm{Sp}} & \longrightarrow H^*(\mathcal{M}_{g,*}, \mathbb{Q}) & \text{（基点つきの場合）} \\ \rho_1^*: & (\wedge^* U_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Sp}} & \longrightarrow H^*(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) & \text{（基点なしの場合）} \end{array}$$

の形をとる．ここで，右肩についている $^{\mathrm{Sp}}$ は，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$ の作用に関する不変部分を意味している．この準同型の像は，河澄響矢氏，森田茂之氏によって完全に決定されている [KM].

定理 ([**KM**])

$$\mathrm{Image}\,\rho_1^* = \mathbb{Q}[e, e_1, e_2, \ldots] \quad (\text{基点つきの場合})$$
$$\mathrm{Image}\,\rho_1^* = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \ldots] \quad (\text{基点なしの場合})$$

ここで，$e \in H^2(\mathcal{M}_{g,*},\mathbb{Q})$ は Euler 類，$e_i \in H^{2i}(\mathcal{M}_g,\mathbb{Q})$ は第 i 森田-Mumford 類 である．これらの曲面バンドルの特性類については，[Mo1] を参照．この定理により，拡大 Johnson 準同型が写像類群のコホモロジーの本質的部分をつかまえていることがわかる．そうなると，これらのことが Torelli 群上ではどうなっているか，ということが次の問題として浮上してくる．

問題 Johnson 準同型の誘導するコホモロジーの間の準同型

$$\tau^* : H^n(U,\mathbb{Q}) = \wedge^n U_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^n(\mathcal{I}_g,\mathbb{Q})$$

の像と核を決定せよ．

この問題は，Euler 類のべき e^n $(n \geq 2)$ や偶数番目の森田-Mumford 類 e_{2i} が Torelli 群に制限しても非自明であるか，という問題を含んでいるが，現在のところ，どちらなのか全くわかっていない（有理数係数の奇数番目の森田-Mumford 類 e_{2i-1} が Torelli 群上で自明であることはわかっている.）．

上の問題を次数の低い順番から見ていくと，まず $n=0$ のとき τ^* が同型であることは自明である．$n=1$ のときは，Johnson の結果より同型であることが従う．$n=2$ のときは，Hain によって自明でない核が存在することが示されている．次の定理はシンプレクティック群の表現論を用いて記述されているが，これについては次の項で述べる．

定理 ([**Ha**]) $n=2$ のとき，

$$\mathrm{Ker}\,\tau^* = [2^2] + [0] \subset \wedge^2 U_{\mathbb{Q}}$$

自明でない核が現れることの詳しい説明はここでは省略するが，[0] については第 1 森田-Mumford 類の Torelli 群上での自明性から，$[2^2]$ については群の中心拡大

$$0 \longrightarrow [2^2] \longrightarrow [2^2]\tilde{\times}[1^3] \longrightarrow [1^3] \longrightarrow 0$$

の Euler 類と，Johnson 準同型のある持ち上げ

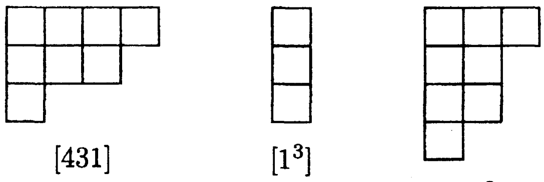
$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & [2^2]\tilde{\times}[1^3] \\ & & \downarrow \\ \mathcal{I}_g & \xrightarrow{\tau} & U_{\mathbb{Q}} = [1^3] \end{array}$$

との関係から従っている [Mo4]．一方，核が $[2^2]+[0]$ に一致することの証明は，具体的にサイクルを構成し，それを評価することによって行われる．サイクルは準同型 $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathcal{I}_g$ を構成し，$\mathbb{Z}^2$ の基本類（2 次元トーラスのホモロジーの基本類にあたるもの）を表すサイクルを f で送ることによって得られる．このようなサイクルをアーベリアンサイクルとよぶことにする．

2.3 シンプレクティック群の表現論に関する準備

次に，[FH]. [Ha], [Mo5] に基づいてシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$ の表現論を用いるのに必要な記号について簡単にまとめる．前節にも見られたように，自由加群 M に対し $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ を単に $M_{\mathbb{Q}}$ と書くことにする．また，M を自然な埋め込みによって $M_{\mathbb{Q}}$ の部分加群とみなす．

$\mathfrak{sp}(2g,\mathbb{C})$ を $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{C})$ の Lie 代数とする．一般論により，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{C})$ の表現と $\mathfrak{sp}(2g,\mathbb{C})$ の表現は一致する．半単純 Lie 代数の既約表現は，最高ウェイトをとるという対応により，支配的な整形式と一対一の対応をもつが，$\mathfrak{sp}(2g,\mathbb{C})$ の場合，それらはさらに g 行以下のサイズの Young 図形たちと一対一の対応をもつ．よって，$\mathfrak{sp}(2g,\mathbb{C})$ の既約表現は g 行以下のサイズの Young 図形たちによってパラメトライズされることになる．



[431]　　[1^3]　　[32^21]

Young 図形の記法

これらの既約表現は $\mathbb{Q}$ 上で定義された有理表現となるので，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$ や $\mathfrak{sp}(2g,\mathbb{Q})$ の表現と思うことができる．この記法の下で，$H_{\mathbb{Q}}$ は [1] に対応する表現であり，$U_{\mathbb{Q}}$ は $[1^3]$ に対応する表現である．このことより，$\wedge^3 H_{\mathbb{Q}}$ の既約分解は，$\wedge^3 H_{\mathbb{Q}}=[1]+[1^3]$ で与えられる．$H_{\mathbb{Q}}$ 上で定義されていた双一次形式 $\mu:[1]\otimes[1]\to\mathbb{Q}$ を用いることにより，この分解は直和分解として与えることができ，とくに $[1^3]$ は $\wedge^3 H_{\mathbb{Q}}$ の $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$-部分空間とみなすことができる．他の既約分解についても同様である．

3 主結果

先に述べた問題を $n=3$ のときに考えたもの，すなわち

$$\tau^*:\wedge^3 U_{\mathbb{Q}}\longrightarrow H^3(\mathcal{I}_g,\mathbb{Q})$$

の核を調べた結果が本講演における主結果である．そのために，まず $\wedge^3 U_{\mathbb{Q}}$ の既約分解を求める必要がある．$\wedge^3 U_{\mathbb{Q}}$ の既約分解は $g\geq 9$ で安定することが知られている．

補題 1　$\wedge^3 U_{\mathbb{Q}}$ の $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$-加群としての既約分解は次のページの表で与えられる．ただし，表の中の数字は重複度を表している．

(かっこの中の数字は，$\wedge:[1^3]\otimes([2^2]+[0])\to\wedge^3[1^3]$ の像を既約分解したときの重複度を表している．これはあとの定理 2 の証明に関する説明の中で使う.)

	$g=3$	$g=4$	$g=5$	$g=6$	$g=7$	$g=8$	$g\geq 9$
$[3^21^3]$			1	1	1	1	1
$[3^21]$		1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
$[32^3]$		1	1	1	1	1	1
$[321^2]$		1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
$[32]$	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
$[2^31^3]$				1	1	1	1
$[2^31]$			1	1	1	1	1
$[2^21^5]$					1	1	1
$[2^21^3]$			1 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)
$[2^21]$		1 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)
$[21^5]$				1	1	1	1
$[21^3]$		1 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)	2 (1)
$[21]$		1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
$[1^9]$							1
$[1^7]$						1	1
$[1^5]$			1	1	2	2	2
$[1^3]$	1 (1)	2 (2)	2 (2)	3 (2)	3 (2)	3 (2)	3 (2)
$[1]$			1	1	1	1	1

これらの既約分解を求めるには，Web 上で公開されているソフトウェア LiE [1] を用いるとよい．ソフトウェアで得られた結果を確かめるには，各成分への非自明な準同型を構成して，その成分が入っていることを確かめ，最後に次元を計算すればよい．

次の定理は，簡単のため $g \geq 9$ のときのみを述べることにする．

定理 2　$g \geq 9$ のとき，$\mathrm{Ker}\left(\tau^* : \wedge^3 U_{\mathbb{Q}} \to H^3(\mathcal{I}_g, \mathbb{Q})\right)$ は $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$-加群の直和

$$[3^21]+[321^2]+[32]+[2^21^3]+[2^21]+[21^3]+[21]+2[1^3]$$

を含む．さらに次のうちのどちらか一方が成り立つ．

a) $\mathrm{Ker}\,\tau^*$ は上のものと一致する．

b) $\mathrm{Ker}\,\tau^*$ は上のものと $[1]$ との直和と一致する．

この定理の証明は大きくわけて次の 2 つのステップに分けられる．

1. Hain の結果より，2 次のコホモロジーについては，τ^* は非自明な核 $[2^2]+[0]$ をもつ．したがって，これらの成分とのカップ積の様子を見ることにより，3 次のコホモロ

[1] http://wwwmathlabo.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE/ よりダウンロード可能（2003 年 11 月現在）．$g \leq 8$ ならそのサイト上で計算することもできる．ただし，このソフトウェア上では違う Young 図形の記方が採用されている．($[1]$ は $[1,0,0,\ldots]$ に，$[1^3]$ は $[0,0,1,0,\ldots]$ に対応している．)

ジーにおける核に入っている成分が得られる．これは，シンプレクティック群の表現論の言葉では，

$$\wedge : [1^3] \otimes ([2^2] + [0]) \to \wedge^3[1^3]$$

の像を考えることに対応する．補題 1 の表のかっこで表した数がその答えである．

2. 準同型 $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathcal{I}_g$ を構成し，対応するアーベリアンサイクルをとる．これを用いてコホモロジー類を評価し，核に入らない既約成分を決定していく．

上の 2 つのステップによって [1] を除く既約成分に関しては τ^* の核に入るか否かが決定できる．残された既約成分 $[1] \subset \wedge^3 U_{\mathbb{Q}}$ が $\operatorname{Ker} \tau^*$ に入るための必要十分条件は以下のように与えられる．

定理 3 $g \geq 5$ に対し，

$$\tau^*([1]) = \{0\} \subset H^3(\mathcal{I}_g, \mathbb{Q}) \iff e_2 - (2-2g)e^2 = 0 \in H^4(\mathcal{I}_{g,*}, \mathbb{Q}).$$

が成り立つ．

この定理は群の完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1 \Sigma_g \longrightarrow \mathcal{M}_{g,*} \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow 1$$

に関するコホモロジーのスペクトル系列を見る必要があり，ここで詳しく述べることは省略する．上の条件は普遍 Σ_g-バンドルの引き戻しに関して compatible である．したがって，森田茂之氏による，amenable 群上での Euler 類のべきの消滅に関する結果 [Mo2] より次の系を得る．

系 4 任意の amenable 群 G と任意の群準同型写像 $f : G \to \mathcal{I}_g$ に対し，

$$f^* \tau^*([1]) = \{0\} \subset H^3(G, \mathbb{Q})$$

が成り立つ．

abelian ⊂ nilpotent ⊂ solvable ⊂ amenable という関係があるので，この系より，とくにアーベリアンサイクルでは既約成分 [1] は評価することができないことがわかる．

参考文献

[Br] K. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics 87, Springer-Verlag, 1982.

[FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer-Verlag, 1991.

[Ha] R. Hain, *Infinitesimal presentations of the Torelli groups*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), 597-651

[Jo1] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$*, Math. Ann. 249 (1980), 225-242

[Jo2] D. Johnson, *The structure of the Torelli group III: The abelianization of $\mathcal{I}_g$*, Topology, 24 (1985), 127-144

[KM] N. Kawazumi, S. Morita, *The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the Mumford-Morita-Miller classes*, preprint (2001)

[Mo1] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. 90 (1987), 551-577

[Mo2] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles and bounded cohomology*, from: "A Fête of Topology", Academic Press (1988), 233-257

[Mo3] S. Morita, *The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group*, Invent. Math. 111 (1993), 197-224

[Mo4] S. Morita, *A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles*, from: "Proceeding of the Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces", held in Finland, July 1995, World Scientific (1996), 159–186

[Mo5] S. Morita, *Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect*, Geometry and Topology monographs 2 (1999), *Proceedings of the Kirbyfest*, 349-406

[Sa] T. Sakasai, *The Johnson homomorphism and the third rational cohomology group of the Torelli group*, preprint (2003)

逆井卓也（さかさい たくや）
東京大学大学院数理科学研究科博士課程 1 年
sakasai@ms.u-tokyo.ac.jp