

Strong convergence of Kleinian groups

大鹿健一 (Ken'ichi Ohshika)

大阪大学 (Osaka University)

5/2004

1 Introduction

この小論では研究集会での講演に基づき、有限生成、topologically tame Klein 群の強収束の為の条件について、最近分かったことを述べる。

ここで考える Klein 群はすべて、有限生成、torsion free, parabolic free とする。問題とする状況は次のようなものである。Klein 群 G とそこからの faithful discrete representations $\{\phi_i : G \rightarrow PSL_2\mathbb{C}\}$ で、 $\phi_i(G)$ が topologically tame であるようなものを考える。 $\{\phi_i\}$ が表現として、 $\psi : G \rightarrow PSL_2\mathbb{C}$ で parabolic free なものに収束したとする。(このとき $\psi(G)$ を代数的極限という。) 問題はこの時、 $\phi_i(G)$ の幾何的極限は $\psi(G)$ に一致するか、ということである。極限が一致するとき、 $\phi_i(G)$ は $\psi(G)$ に強収束するというのであるが、強収束する場合には極限の群の幾何的性質が、 $\phi_i(G)$ のそれを引き継ぐこともあり、どのような条件下で、強収束するかということが問題になっていたのである。

そもそも代数的極限と幾何的極限が異なるような場合があることに最初に注目したのは Jørgensen である。それをより一般的枠組みでとらえたものを、Thurston がかの lecture notes の 9 章で解説をしている。(これについては Kerckoff-Thurston [4], Ohshika [6] も参照のこと。) 一方で強収束が起こるための条件については、代数的極限が新たに parabolic 元を持たなければよいだろうと予想されてきた。これは Thurston が quasi-Fuchs 群の極限の場合に観察した現象である。(これについても [6] を見よ。) freely decomposable の場合については、Ohshika [5], Canary-Minsky [2], Anderson-Canary [1], Evans [3] の研究により、残るのは $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ が compression body の内部と同相で、代数的極限が無遠球面 S_∞^2 に不連

続領域を持たないときのみになっていた。この小論ではこの残りの場合でも強収束が起こることを示す。

なお私の議論とは異なる方法で、独立に Brock-Souto が $\phi_i(G)$ が幾何的有限な G の擬等角変形という仮定の元で、(ただし parabolic 元は許し、 $\psi(G)$ で新たに生じないという仮定で、) 証明を行っている。

2 Uniform compact cores

以降のような $\phi_i(G)$ が $\psi(G)$ に代数的収束をし、 G_∞ に幾何的収束をしているとする。最終的に示したいのはこの両者が一致することである。

まず準備として、代数的極限 $\mathbb{H}^3/\psi(G)$ から、 $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ の compact core を統一的に作る方法を述べる。我々は $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ が compression body の内部と同相な場合を考えていた。したがって、 $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ の end は 1 つを除いて、compact core C_i の incompressible boundary component に面している。これらの boundary component に対応する部分群を考え、その代数的極限をとれば、次のいずれかになる。

1. 極限は geometrically infinite tame end をもち、その近傍が $\mathbb{H}^3/\psi(G)$ のある end の近傍に同相に写る。
2. 極限は quasi-Fuchsian であり、 $\psi(G)$ は region of discontinuity をもつ。

2 番目の場合は強収束であることが分かっているので、問題にしなくて良い。したがって、以降 1 番目の状況のみを考える。

状況を明確にするためいくつかの記号を導入しよう。 $\mathbb{H}^3/\psi(G)$ の上で現れた、 $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ の compact core の incompressible boundary components に対応する ends を e_1, \dots, e_m としよう。これらは $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ の compact core の boundary components にそれぞれ対応しており、それらと開区間の直積と同相な近傍をもつ。Relative core theorem により、 $\mathbb{H}^3/\psi(G)$ の compact core C_ψ で、 e_1, \dots, e_m に面する incompressible boundary components S_1, \dots, S_m を C_ψ の補集合のうち e_j を含むものは $S_j \times (0, 1)$ に同相になっているようなものが存在する。 $\mathbb{H}^3/\psi(G)$ の compact core は compression body に homotopy 同値であるから、(incompressible boundary components の数を数えて、) C_ψ 自身が compression body であることがわかる。さらに Thurston の covering theorem より、これらの $S_j \times (0, 1)$ は \mathbb{H}^3/G_∞ に被覆写像で同相に落とされているとして良い。この compression

body を approximate isometry $\rho_i : \mathbb{H}^3/\phi_i(G) \rightarrow \mathbb{H}^3/G_\infty$ の逆写像をもちいて引き戻したものが uniform compact core である。

3 Pleated surfaces realising homotopies

この節では強収束が起きなかったときにそれを $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ の中で、双曲多様体の形の変化としてとらえ、その変化を pleated surface との交わりを観察して探る方法を述べる。まず $\phi_i(G)$ は幾何的に収束するとしても良いので、幾何的極限を $G_\infty \supset \psi(G)$ としよう。 $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ の基点 x_i を、 $\{\phi_i\}$ が収束するように共役をとったときに、同一の \mathbb{H}^3 の基点の射影像であるようにとる。このとき、 $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ は基点 x_i についての Gromov 極限が、 \mathbb{H}^3/G_∞ に基点 x_∞ をとったものになっている。

x_∞ を中心とした半径 r の metric ball B_r を考える。 $\mathbb{H}^3/\psi(G)$ の C_ψ の incompressible boundary components に面する ends は、Thurston の covering theorem により、 \mathbb{H}^3/G_∞ の ends の近傍に同相に落ちる近傍をもつ。これらを \mathbb{H}^3/G_∞ から取り去った部分 M_∞ と B_r の交わりを N_r で表そう。また ∂N_r のうち、 ∂M_∞ に含まれないものの和を $\partial_e N_r$ で表そう。 $\partial_e N_r$ の $r \rightarrow \infty$ で消えない component が 1 つしかなければ、実は $G_\infty = \psi(G)$ であることがわかる。

このような boundary components が 2 つ以上あるとしよう。 $\rho_i : \mathbb{H}^3/\phi_i(G) \rightarrow \mathbb{H}^3/G_\infty$ を approximate isometry としよう。 ρ_i^{-1} で N_r を引き戻したとき、1 つの boundary component 以外は $\partial_e C_i$ に homotopic でない。いっぽう、 $\phi_i(G)$ は topologically tame であるから、pleated surfaces とその間を補う negatively curved pleated surfaces による、homotopy で前節で構成した uniform compact core の境界から、convex core boundary, あるいは tame end へ向かう homotopy $H_i : \Sigma \times I \rightarrow \mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ が作れる。(ここで Σ は $\partial_e C_\psi$ に同相な閉曲面である。) これと先の boundary の交わりを調べる。

Pleated surface や negatively pleated surface はその面積が一様に押さえられているため、半径の大きい円板を中に含めないという共通の性質を持っている。したがって ∂N_r の引き戻しに囲まれた、 $\mathbb{H}^3/\phi_i(G)$ の欠落部分の奥深くに pleated surface 内の円板は入り込めない。これにより、 $H_i^{-1} \circ \rho_i^{-1}(\partial_e N_r)$ の成分達はお互いに絡み合うことができないことが分かる。そこで H_i をそこに制限すると $\rho_i^{-1}(\partial_e N_r)$ への degree 0 の写像になる部分を除去して考えると、必ず $\Sigma \times \{0\}$ の G の non-trivial な元を表

す単純閉曲線に $H_i^{-1} \circ \rho_i^{-1}(N_r)$ で homotopic なようなものが十分大きい i についてはとれる。この homotopy は ρ_i で、 \mathbb{H}^3/G_∞ に押し出せ、さらに $\mathbb{H}^3/\psi(G)$ に持ち上げることができる。Homotopy の片方の端が、代数的極限から来たものに乗っているので、 \mathbb{H}^3/G_∞ で同じ元を表している、 i ごとに異なることは無い。したがって、この状況は parabolic に収束する元があるか、互に極限で本質的に交わる Σ 上の単純閉曲線で、いずれも同じ end に行く長さが 0 へ向かう閉測地線に片側で homotopic なものがあるかいずれかである。2 番目の場合は、Bonahon の議論で排除でき、1 番目の場合は代数的極限に parabolic 元が無いという仮定に反する。よってこのような欠落部分は無く、代数的極限と幾何的極限は一致する。

4 Et le manteau tomba

数理研の講演から、この原稿を書き上げるまでの間に、大きなニュースがやって来た。U. Illinois at Chicago の Ian Agol 氏が Marden 予想を解いたというのである。Agol は北米合州国内の何ヶ所かで、このテーマでの講演をしているが、かの地の専門家の意見は、肯定的なものから、若干の留保をつけるものまでである。未だプレプリントもできていないので、内容について詳しく確かめようが無いが、もしこれが正しければ、strong convergence についての上記の結果も covering theorem のみを使って得ることができる。のみならず Klein 群論での未解決問題のうち Ahlfors 予想を始めとした重要ないくつかに従うことになる。この事態を喜ぶべきか悲しむべきか。

参考文献

- [1] James W. Anderson and Richard D. Canary. Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Kleinian groups. *Amer. J. Math.*, 118(4):745–779, 1996.
- [2] Richard D. Canary and Yair N. Minsky. On limits of tame hyperbolic 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 43(1):1–41, 1996.

- [3] Richard Evans. Tameness persists in weakly type-preserving strong limits. *preprint*.
- [4] Steven P. Kerckhoff and William P. Thurston. Noncontinuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmüller space. *Invent. Math.*, 100(1):25–47, 1990.
- [5] Ken'ichi Ohshika. Kleinian groups which are limits of geometrically finite groups. *preprint*.
- [6] Ken'ichi Ohshika. Geometric behaviour of Kleinian groups on boundaries for deformation spaces. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 43(169):97–111, 1992.