数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 70-77

1点穴あきトーラスから 2点穴あきトーラスへ

和田昌昭 (Masaaki Wada)
奈良女子大学理学部情報科学科
Department of Information and Computer Sciences
Nara Women's University

1 1点穴あきトーラス群

1点穴あきトーラス群とは2元 A, B によって生成される $PSL(2, \mathbf{C})$ の部分群であって交換子 $[A, B]$ が放物的となるものである．交換子の（一意的な）平方根を K で表すことにする．よって $[A, B]=K^{2}$ である．この論文中では記号 $=$ は $PSL(2, \mathbf{C})$ における等号，すなわち符号を除く等号を意味するものとする．

Jørgensen [Jør03] に従い1点穴あきトーラス（クライン）群をフックス型1点穴あきトーラス群の変形として考察することにしよう．([ASWY00, ASWY03] も見よ）Jørgensen の理論におけるキーコンセプトの一つは複素確率であるが，ここでは2点穴あきトーラス群の場合に拡張できるような仕方で複素確率の説明をしよう．コンピュータ・プログラム OPTi [Wad] は内部的には複素確率に基づいて作られている．

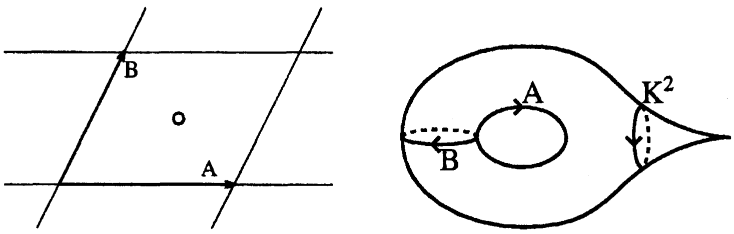

図 1: フックス型1点穴あきトーラス群.

まず最初に1点穴あきトーラス群は常に位数2の対称性を持つことに注意しよう．(図2参照)

命題 1.1. すべての1点穴あきトーラス群 $G=\langle A, B\rangle$ に対し，指数 2 の拡張 $G'=\langle P, Q, R\rangle$ であって $RQP=K$ をみたすインボリューション P, Q, R で生成されるものをが存在する．

これを証明するために，次のよく知られた補題を用いる．

補題 1.2. $A, B\in PSL(2, \mathbf{C})$ は $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ において固定点を共有しないとする．このとき $QAQ=A^{-1}, QBQ=B^{-1}$ を同時にみたすインボリューション Q が存在する．

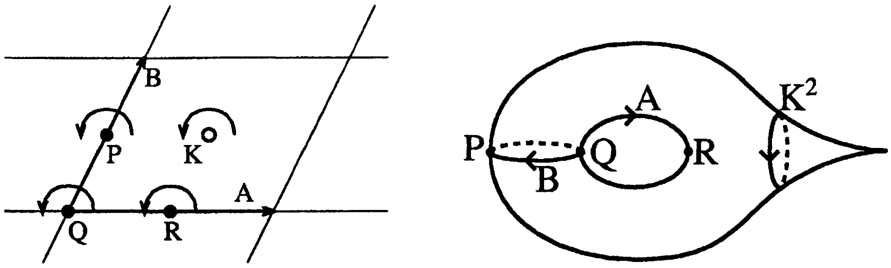

図 2: $RQP = K$ をみたすインボリューション P, Q, R

実際，$Q = AB - BA$（を $Q \in SL(2, \mathbf{C})$）となるように正規化したもの）とすればよい．幾何的には Q は A と B の軸の共通垂線に関する π-回転である．

命題 *1.1* の証明．補題 1.2 によって，インボリューション Q であって，

$$QAQ = A^{-1}, \quad \text{かつ} \quad QBQ = B^{-1}$$

をみたすものがある．このとき $R = AQ, P = BQ$ とおけば，

$$R^2 = AQAQ = 1 \quad \text{かつ} \quad P^2 = BQBQ = 1$$

である．インボリューション P, Q, R は

$$A = RQ, \quad B = PQ, \quad [A, B] = RQPQQRQP = K^2,$$

をみたし，したがって

$$RQP = K$$

がなりたつ． □

逆に，もし P, Q, R を $RQP = K$ が放物的となるようなインボリューションとすると，A, B を

$$\begin{aligned} A &:= RQ = KP \\ B &:= PQ = K^{-1}R \end{aligned}$$

によって定義すれば

$$[A, B] = K^2$$

がなりたつ．すなわち 1 点穴あきトーラス群の研究は，本質的には $(2, 2, 2, \infty)$-オービフォルド群の研究と同じものである．(図 3 参照)

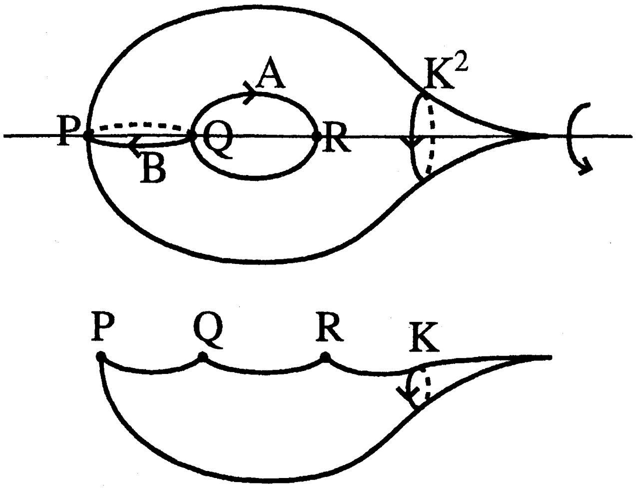

図 3: 1点穴あきトーラスと $(2,2,2,\infty)$-オービフォルド.

さて，係数について拘束条件 $RQP=K$ を求めてみよう．$PSL(2,\mathbf{C})$ における共役によって次のように仮定することができる.

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -x^{-1} \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Q &= \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -y^{-1} \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R &= \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z^{-1} \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
K &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

条件を係数に関して書き下すために，次のパラメータを導入すると便利である.

$$a_0 = z_1 - z_0, \quad a_1 = z_2 - z_1, \quad a_2 = z_0 + 1 - z_2.$$

この3つ組 (a_0, a_1, a_2) は $a_0+a_1+a_2=1$, をみたし，**複素確率**と呼ばれる．条件 $RQP=K$ は

$$a_0xy = z, \quad a_1yz = x, \quad a_2zx = y$$

となる．従って

$$a_0 = \frac{z}{xy}, \quad a_1 = \frac{x}{yz}, \quad a_2 = \frac{y}{zx},$$

および

$$x^2 = \frac{1}{a_2a_0}, \quad y^2 = \frac{1}{a_0a_1}, \quad z^2 = \frac{1}{a_1a_2}$$

を得る．図4はインボリューション P,Q,R と複素確率の関係を示している．等式 $a_0+a_1+a_2=1$ から Markoff 等式

$$x^2+y^2+z^2 = xyz$$

が導かれる．

$$\mathrm{tr}\,A = \mathrm{tr}\,KP = x, \quad \mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,KQ = y, \quad \mathrm{tr}\,B = \mathrm{tr}\,K^{-1}R = -z$$

であり，普通は Markoff 等式はトレース恒等式の帰結とみなされることに注意しよう．

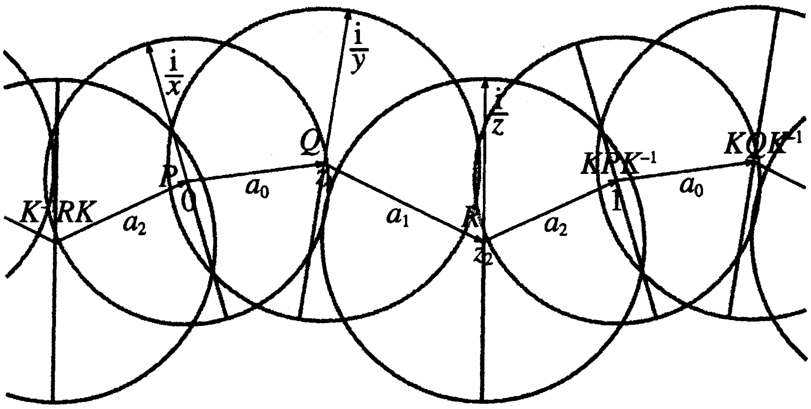

図 4: インボリューション P, Q, R と複素確率

2　2点穴あきトーラス群

2点穴あきトーラス群は PSL(2,C) の2元 A, B と2つの放物的元 L, L' で $[A, B] = L'L$ をみたすものによって生成される．このような群を対応するフックス群の変形として研究したい．(図5参照)

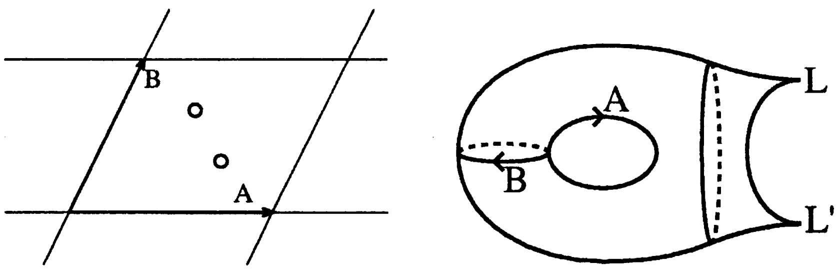

図 5: フックス型2点穴あきトーラス群

定理 2.1. フックス群の連続変形で得られるすべての2点穴あきトーラス群 $G = \langle A, B, L, L' \rangle$ に対し，指数 *2* の拡張 $G' = \langle P, Q, R, S \rangle$ であって $SRQP = L$ をみたす4つのインボリューション P, Q, R, S によって生成されるものが存在する．(図 *6* 参照)

Proof. 命題1.1と同じ証明によってインボリューション P, Q, R であって

$$[A, B] = K^2$$

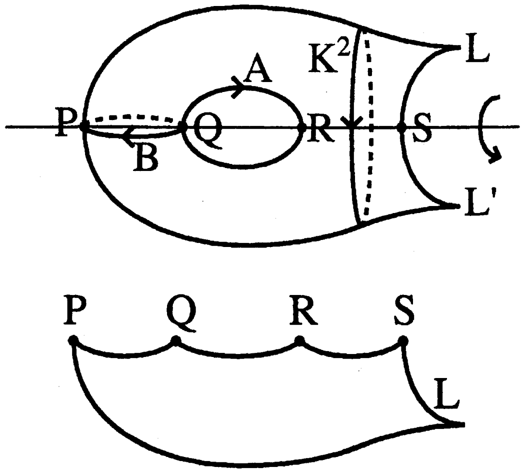

図 6: 2点穴あきトーラスと $(2,2,2,2,\infty)$-オービフォルド

をみたすものがあることがわかる．ここで $K = RQP$ である．(図 7 参照)

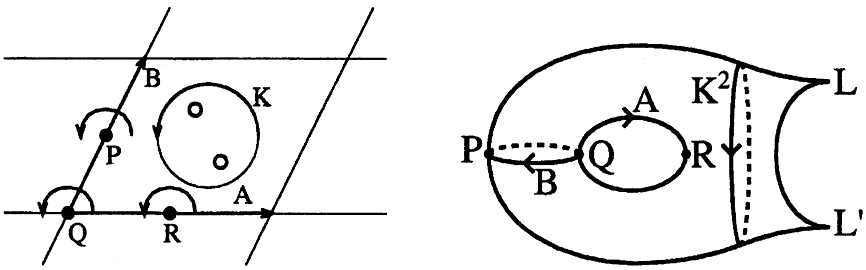

図 7: $RQP = K$ をみたすインボリューション P, Q, R

ここで次の補題が必要である．

補題 2.2. $L, L' \in PSL(2, \mathbf{C})$ は $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ において共通の固定点をもたないとする．もし L と L' が互いに共役ならば，それらはインボリューションによって共役となる．

Proof. まず L と L' が放物型としよう．一般性を失うことなく次のように仮定してよい．

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ かつ } L' = ALA^{-1} \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A を

$$S = AT = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+ta \\ c & d+tc \end{pmatrix}$$

で置き換えても依然として $SLS^{-1} = ATLT^{-1}A^{-1} = ALA^{-1} = L'$ がなりたつ．$c \neq 0$ なので t を調整して $\operatorname{tr} S = 0$ とすることができる．すると S はインボリューションである．

他の場合の証明も同様にできるが，この論文では必要ないので，読者の練習問題に残しておくことにしよう． □

この補題によってインボリューション S で $SLS = L'$ をみたすものが得られる．よって

$$K^2 = [A, B] = L'L = SLSL$$

である．フックス群の場合には，ロクソドロミック元の平方根は一意的なので，これから

$$RQP = K = SL$$

が導かれる．また連続性によりこの関係式はフックス型２点穴あきトーラス群の連続変形についても成り立つ．したがって

$$SRQP = L$$

がなりたつ．定理 2.1 の証明終. □

条件 $SRQP = L$ を係数に関して求めてみよう．共役の後次のように仮定できる．

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -x_0^{-1} \\ x_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Q &= \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -x_1^{-1} \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R &= \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -x_2^{-1} \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
S &= \begin{pmatrix} 1 & z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -x_3^{-1} \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以前と同様「複素確率」を用いるのが便利である：

$$a_0 = z_1 - z_0, \quad a_1 = z_2 - z_1, \quad a_2 = z_3 - z_2, \quad a_3 = z_0 + 1 - z_3.$$

ここでは複素確率は４つ組 (a_0, a_1, a_2, a_3) であって $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$ をみたすものである．すると条件 $SRQP = L$ は次に帰着する．

$$\begin{aligned}
a_0 a_1 x_1^2 = a_2 a_3 x_3^2 &= 1 + \frac{x_1 x_3}{x_0 x_2} \\
a_1 a_2 x_2^2 = a_3 a_0 x_0^2 &= 1 + \frac{x_0 x_2}{x_1 x_3}
\end{aligned}$$

２点穴あきトーラス群のモジュライ空間は４次元なので，群を指定するためには複素確率以外にもう一つパラメータを導入する必要がある．我々は

$$t = \frac{x_0 x_2}{x_1 x_3}$$

で定義されるパラメータ t を使用することを提案したい．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{1+t}{a_3a_0} \\ x_1^2 &= \frac{1+t^{-1}}{a_0a_1} \\ x_2^2 &= \frac{1+t}{a_1a_2} \\ x_3^2 &= \frac{1+t^{-1}}{a_2a_3}. \end{aligned}$$

x_0, x_1, x_2, x_3 から複素確率を求めることも可能であるが，それほど簡単ではない．

最後に 1 点穴あきトーラス群と 2 点穴あきトーラス群を研究するための枠組みの比較表をもってこの論文を閉じることにしよう．

	Once-punctured Torus	Twice-punctured Torus
Quotient orbifold	$(2,2,2,\infty)$	$(2,2,2,2,\infty)$
Complex probability	$a_0+a_1+a_2=1$	$a_0+a_1+a_2+a_3=1$ and t
Trace	$x^2+y^2+z^2=xyz$	x_0, x_1, x_2, x_3 ???
Ford region	combinatorial description (Jørgensen)	???
Limit set	relatively easy to draw	???
Slices	Bers slice Maskit slice Earle slice Riley slice	???

1 点穴あき群はある種のしっかりとした構造を持ち比較的好ましい振舞いをするのに対し，2 点穴あきトーラス群ははるかにワイルドな振舞いをし，一般的な擬フックス群で起きる現象を見せると考えられる．ここで紹介した枠組みは，2 点穴あきトーラス群より複雑な群に拡張することはできないが，この枠組みによって一般的な擬フックス群に関する様々な知見が得られることを期待している．

参考文献

[ASWY00] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita (2000). A way from punctured torus groups to two-bridge knot groups, In *Geometry and Topology* (*Proceeding of Workshop in Pure Mathematics* **19**) Pure Math. Res. Assoc., The Korean Academic Council, pp. 145-173.

[ASWY03] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita (2003). Jørgensen's picture of punctured torus groups and its refinement. In *Kleinian Groups and Hyperbolic 3-Manifolds* (*Lond. Math. Soc. Lec. Notes* **299**), Cambridge Univ. Press, pp. 247–273.

[Jør03] T. Jørgensen (2003). On pairs of once-punctured tori. In *Kleinian Groups and Hyperbolic 3-Manifolds* (*Lond. Math. Soc. Lec. Notes* **299**), Cambridge Univ. Press, pp. 183–207.

[Wad] M. Wada. OPTi, `http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/OPTi/`