数理解析研究所講究録 1388 巻 2004 年 54-65

THE RELATION BETWEEN THE EXTRAPOLATION ESTIMATES

曽布川拓也 (TAKUYA SOBUKAWA)

岡山大学・教育学部
Faculty of Education, Okayama University

Abstract. We know many operators which is bounded on L^p $(p>1)$ but on L^1 not. For such operators, especially, the Yano-type operators, we have known several extrapolation theorem on L^p spaces over infinite measure spaces. In this note, we shall show the equivalence between them.

1. INTRODUCTION AND RESULT

(Ω,μ) を σ-有限測度空間とする。実解析で扱う作用素で，L^p 有界 $(1<\forall p<2)$ であるが，L^1 有界でないものはたくさん知られている。たとえば，Hilbert 変換・Riesz 変換，さらに一般の Calderon-Zygmund 型の特異積分作用素，Hardy-Littlewood 型などの極大関数，多重ウィナー積分作用素などがこの条件を満たす。こうした作用素に対しては L^1 有界性は求められないが，L^1 評価に に “近い”ものを求める，たとえばその「近いもの」として

(1) 作用素の定義域として，L^1 より狭い Hardy Class H^1 を用いる
(2) 作用素の値域として，L^1 より広い弱 L^1 Class を用いる

等の方法が良く知られている。

ところで上に挙げたものはもとより，そのような作用素の多くは次の条件を満たす。

Yano's condition. $1<p_1<\infty$ とする。

(1) T は劣加法的，すなわち $|T(f+g)|\leq|Tf|+|Tg|$ *a.e.* が成り立つ
(2) T は L^p 有界 $(1<\forall p\leq p_1)$ であり，さらに，

$$\left[\int_\Omega |Tf(x)|^p d\mu(x)\right]^{1/p}\leq\frac{A}{(p-1)^\alpha}\left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right]^{1/p}. \tag{1.1}$$

という評価を満たす (A および α は p や f に依存しない)。

このような作用素に対して，S.Yano (矢野茂樹) は対象とする測度空間が有限のときに，次のような評価が成り立つことを証明した。

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B99, 46E30; Secondary 46B70.
Key words and phrases. Extrapolation theorem, Lorentz class, Orlicz class.

Fact 0([10]).

$$\int_\Omega |Tf(x)|d\mu(x) \le B\int_\Omega |f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha + C\mu(\Omega) \tag{1.2}$$

この評価は $\mu(\Omega)=\infty$ のときには右辺第2項が発散するので意味がない。そしてその場合にはこのような $L\log^\alpha L \to L^1$ 評価も成り立たないことが知られている。

そこで，$\mu(\Omega)=\infty$ のときに L^1 に "近い" 評価として筆者は次のようなものを求めた。

Fact 1([9]). 任意の $1<q<p_1$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_{|Tf|\le 1}|Tf(x)|^q d\mu(x)+\int_{|Tf|>1}|Tf(x)|d\mu(x)\\ \le&\frac{C_A}{(q-1)^\alpha}\left[\int_{|f|\le 1}|f(x)|^q d\mu(x)+\int_{|f|>1}|f(x)|(1+\log|f(x)|)^\alpha d\mu(x)\right]\end{aligned} \tag{1.3}$$

が成り立つ。

この評価は L^1 の "近く" というには語弊があるが，B.Jawerth - M.Milman の抽象的な補外空間によれば，$\mu(\Omega)=1$ のときに $L^1(\Omega)=\bigcup_{p>1}L^p$，言い方を変えれば，$L^1$ は一番「広い」クラスであり，矢野の結果はその「広い」空間における評価式と見ることができるという。$\mu(\Omega)=\infty$ のときには $\bigcup_{1<p<q}L^p=L^1+L^q$ なのでそれに対応した評価式がこの結果である。

この評価では，$q=1$ とすることは出来ないことが反例を持って知られているが，それに代わるものとして筆者は次の評価を得た。

Fact 2 ([8]).

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}\int_{|Tf|\le 1}\frac{|Tf(x)|}{(1-\log|Tf(x)|)^{\alpha+\varepsilon}}d\mu(x)+\int_{|Tf|>1}|Tf(x)|d\mu(x)\\ \le& C_{q,A}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{|f|\le 1}\frac{|f(x)|}{(1-\log|f(x)|)^{\varepsilon}}d\mu(x)+\int_{|f|>1}|f(x)|(1+\log|f(x)|)^\alpha d\mu(x)\right]\end{aligned} \tag{1.4}$$

が任意の $\varepsilon>0$ に対して成り立つ。

この評価式において $\varepsilon=0$ とできないことは知られているが，両辺の $(1+\log|f|)^\varepsilon$ の部分を，$(1+\log(1+\log|f|))^{1+\varepsilon}$ のオーダーに置き換えることは出来る。同様にして log の階数を上げげた精密なものに切り替えることはできるが，"任意の $\varepsilon>0$" という「不定の」部分を完全に無くしてしまうことはできない。

一方，(1.3) の右辺で $q=1$ とおいてしまって左辺を変える，すなわち作用素 T の定義域を $L\log^\alpha L$ に固定して次のような評価が得られている。

Fact 3.

$$\sup_{r>0} \frac{\int_\Omega (|Tf(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1+\log^+ r)^\alpha} \le C \int_\Omega |f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha d\mu(x) \tag{1.5}$$

この評価は初め，M.Carro ([2]) によって，普通の劣線形性（Yano の条件にさらに $|T(\lambda f)| = |\lambda Tf|$, *a.e.* を加える）を仮定し，$L^p$ 有界性を少し弱めた条件の下で証明された。A.Gogatishvili と筆者は上の Yano の条件のもとで，同じ評価を得た（[5])。

またこれとよく似た次の評価も得られる。

Fact 4.

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1+\log^+ t)^\alpha} \le \int_0^\infty (1+\log^+ \frac{1}{t})^\alpha f^*(t)dt, \tag{1.6}$$

これは M.Carro と J.Martin によって (1.5) と同様の条件下で証明されている ([4])。その証明は，抽象的な補間空間論を用いており，さらに一般的な結果も示されている。

本論文ではまずこの (1.6) を Yano の（より少し弱い）条件下で初等的に証明する (§2)。ついで，ここに上がっている 4 つの補外評価について，それら相互の関係が次のようになることを示す。

Claim.

$$(1.4) \Longleftarrow (1.3) \Longrightarrow (1.5) \longleftrightarrow (1.6)$$

である。さらに

$$L^q \text{ 有界性\&}\ (1.6) \Longrightarrow (1.3)$$

という補間定理が成り立つ。

これにより，知られているこれらの 4 つの補外評価の関連が明らかになる。

$(1.3) \Longrightarrow (1.4)$ は [8] で示されている。そこで，$(1.3) \Longrightarrow (1.5)$ を§3 で，$(1.5) \longleftrightarrow (1.6)$ を §4 で，そして最後にこの補間定理を証明する。

2. Almost pointwise decomposition とその応用

この章では Yano's condition が成り立つ作用素が (1.6) を満たすことを証明する。

まず Lorentz Class の定義とその性質を挙げる。

Definition. 測度空間 (Ω, μ) 上の可測函数 f に対して

$$\lambda_f^\mu(\sigma) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \sigma\})$$
$$f^*(t) = \inf\{\sigma \ge 0 : \lambda_f^\mu(\sigma) \le t\}$$
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$$

をそれぞれ f の分布関数，再配列，および平均再配列と呼ぶ。

これらを用いて，次のような関数の族が定義される。

Definition. $0 < p < \infty, 0 < q < \infty$ に対して

$$L^{p,q}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{p,q} = \left[\frac{q}{p} \int_0^{\mu(\Omega)} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

$$L^{(p,q)}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{(p,q)} = \left[\int_0^{\mu(\Omega)} (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

また

$$L^{p,\infty}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t)) \right\}$$

$$L^{(p,\infty)}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{p,q} = \sup_{t>0} (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)) \right\}$$

これらのクラスについて次の関係が成り立つ。

Proposition 2.1. 任意の $1 \leq p < \infty$ に対して

$$L^{p,1} \subset L^{p,p} = L^p \subset L^{(p,\infty)}$$

が成り立つ。さらにこれらの埋め込みは縮小写像である。

Proof. 次の不等式を示す。

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) &\leq \left(\int_0^{\mu(\Omega)} |f^*(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^{\mu(\Omega)} t^{\frac{1}{p}} |f^*(t)|^p \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

まず，Hölder の不等式から

$$t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \leq t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t} \left(\int_0^t f^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^t f^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

と最初の不等式を得る。次の等式は，再配列の定義から求められる。

また，単純関数 f が，

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

$(|a_1| \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_n|, E_1, E_2, \ldots E_n$ は可測集合) と表されるならば，その再配列 f^* は

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[t_{i-1}, t_i)}(t), = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{[0,t_i)}(t),$$

$(t_0 = 0,\ t_i = \mu(E_i),\ c_i = a_i - a_{i+1}$ となる。そこでこのような f については

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{p,p} &= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{[0,t_i)}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,t_i)}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int_0^{t_i} dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i^{\frac{1}{p}} = \int_0^{\mu(\Omega)} \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{[0,t_i)} \frac{dt}{t} \\
&= \|f\|_{p,1}
\end{aligned}
$$

となる。

この章で示すのは次の定理である。

Theorem 2.2. $\alpha > 0,\ p_1 > 1$ とする。作用素 T は，測度空間 (Ω, μ) 上の単純関数 f を可測関数 Tf に写像し，半加法的すなわち

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$$

がほとんど至るところで成り立ち，さらに任意の $1 < p < p_1$ に対して 弱 L^p 有界性

$$\|Tf\|_{(p,\infty)} \leq \frac{A}{(p-1)^\alpha} \|f\|_{p,1}$$

を持つとする。このとき，任意の $f \in L \log^\alpha L$ に対して

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1+\log^+ t)} \leq \int_0^\infty (1 + \log^+ 1/t)^\alpha f^*(t) dt$$

が成り立つ。

Remark. この定理の条件は，Yano's Condition よりも弱いものであることが Proposition 2.1 からわかる。

Proof. $f \in L^{p,1}$ とする。このとき，$f^*(t) \to 0\ (t \to \infty)$ が成り立つ。そこで pairwise disjoint な可測集合の族

$$E_n = \{x \in \Omega : f^*(2^{n+1}) < |f(x)| \leq f^*(2^n)\}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

を考える。ただし $f^*(2^n) = f^*(2^{n+1})$ ならば $E_n = \emptyset$ とする。このとき 関数 f を

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

と分解する。もちろん $f = \sum_n f_n$ である。このとき，再配列関数の定義から任意の n に対して

$\mu(E_n) \leq 2^{n+1}\ |f_n(x)|,\ |(f_n)^*(t)| \leq f^*(2^n)$

である。このとき，定理の前提から，任意の $0<s<\infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
s^{\frac{1}{p}}(Tf_n)^{**}(s) &\le \frac{A}{(p-1)^\alpha p}\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}f_n^*(t)\frac{dt}{t}\\
&\approx \frac{A}{(p-1)^\alpha}\sum_{i=-\infty}^{\infty}(2^i)^{\frac{1}{p}}f_n^*(2^i)\\
&\le \frac{A}{(p-1)^\alpha}\sum_{i=-\infty}^{n+1}(2^i)^{\frac{1}{p}}f_n^*(2^i)\\
&\le 2\frac{A}{(p-1)^\alpha}(2^{n+1})^{\frac{1}{p}}f^*(2^n) \le 4\frac{A}{(p-1)^\alpha}(2^n)^{\frac{1}{p}}f^*(2^n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで $s=2^k$, $k\in\mathbb{Z}$ とおくと

$$
(Tf_n)^{**}(2^k) \le 4\frac{A}{(p-1)^\alpha}(2^n/2^k)^{\frac{1}{p}}f^*(2^n)
$$

が任意の $-\infty<k\le\infty$, $-\infty<n<\infty$ に対して成り立つことがわかる。そこで 両辺で p を動かして inf をとると,

$$
(Tf_n)^{**}(2^k) \le 4\inf_p\left(\frac{A}{(p-1)^\alpha}(2^n/2^k)^{\frac{1}{p}}\right)f^*(2^n)
$$

さらに n について和を取れば

$$
(Tf)^{**}(2^k) \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}(Tf_n)^{**}(2^k) \le 4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\inf_p\left(\frac{A}{(p-1)^\alpha}(2^{n-k})^{\frac{1}{p}}\right)f^*(2^n)
$$

を得る。これを almost pointwise decomposition と呼ぶ。ここで

$$
\inf_{1<p<p_1}\frac{A}{(p-1)^\alpha}(2^{n-k})^{\frac{1}{p}} \approx \begin{cases}(k-n)^\alpha 2^{n-k} & (n<k)\\ (2^{n-k})^{\frac{1}{p_1}} & (n\ge k)\end{cases}
$$

であるから

$$
(Tf)^{**}(2^k) \le \sum_{n=-\infty}^{k-1}(k-n)^\alpha 2^{n-k}f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty}f^*(2^n)(2^{n-k})^{\frac{1}{p_1}}
$$

という評価を得る。この両辺に 2^k をかけて

$$
\begin{aligned}
\sup_{k\le 0}2^k(Tf)^{**}(2^k) &\approx \sup_{0<t<1}t(Tf)^{**}(t)\\
&\le \sup_{k\le 0}\left[\sum_{n=-\infty}^{k-1}(k-n)^\alpha 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty}(2^n)^{\frac{1}{p_1}}(2^k)^{\frac{1}{p_1'}}f^*(2^n)\right]\\
&\le \sup_{k\le 0}\left[\sum_{n=-\infty}^{0}(1-n)^\alpha 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty}2^n f^*(2^n)\right]\\
&\approx \int_0^1(1-\log t)f^*(t)dt + \int_1^\infty f^*(t)dt
\end{aligned}
$$

を，また $2^k/k$ をかけると

$$
\begin{aligned}
\sup_{k\geq 1}\frac{2^k}{k}(Tf)^{**}(2^k) &\approx \sup_{1\leq t<\infty}\frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1-\log t)} \\
&\leq \sup_{k\geq 1}\left[\sum_{n=-\infty}^{k-1}(1-\frac{n}{k})2^n f^*(2^n)+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{2^k}{k}f^*(2^n)\right] \\
&= \sup_{k\geq 1}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}(1-\frac{n}{k})2^n f^*(2^n)+\sum_{n=0}^{k-1}(1-\frac{n}{k})2^n f^*(2^n)+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{2^k}{k}f^*(2^n)\right] \\
&\leq \left[\sum_{n=-\infty}^{0}(1-n)^\alpha 2^n f^*(2^n)+\sum_{n=0}^{\infty}2^n f^*(2^n)\right] \\
&\approx \int_0^1(1-\log t)f^*(t)dt+\int_1^\infty f^*(t)dt
\end{aligned}
$$

という評価を得る。これらをあわせて

$$
\begin{aligned}
\sup_{0<t<\infty}\frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1+\log^+ t)} &\approx \sup_{-\infty<k<\infty} 2^k(Tf)^{**}(2^k) \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{k-1}(1-n)^\alpha 2^n f^*(2^n)+\sum_{n=k}^{\infty}2^k f^*(2^n) \\
&\approx \int_0^\infty(1+\log^+\frac{1}{t})^\alpha f^*(t)dt
\end{aligned}
$$

と定理の結論を得る。

3. The relation between extrapolation theorems around L^1

この章では，(1.3) と (1.5) の関係について述べる。

Proposition 3.1. (Ω,μ) 上の可測関数 f および g が

$$
\begin{aligned}
&\int_{|g|\leq 1}|g(x)|^q d\mu(x)+\int_{|g|>1}|g(x)|d\mu(x) \\
&\leq\frac{C_A}{(q-1)^\alpha}\left[\int_{|f|\leq 1}|f(x)|^q d\mu(x)+\int_{|f|>1}|f(x)|(1+\log|f(x)|)^\alpha d\mu(x)\right]
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

を満たすならば，

$$
\sup_{r>0}\frac{\int_\Omega(|g(x)|-\frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1+\log^+ r)^\alpha}\leq C\int_\Omega|f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha d\mu(x)
\tag{3.2}
$$

が成り立つ。

Proof. (3.1) の右辺は (3.2) の右辺で押さえられることはすぐにわかる。すると，

$$\sup_{0<r<1} \frac{\int_\Omega (|g(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1+\log^+ r)^\alpha} \le \int_{|g|>1} |g(x)| d\nu(x)$$
$$\le C \int_\Omega |f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha d\mu(x)$$

$(r \ge 1)$ となる。(3.1) で $q = 1 + \frac{p_1 - 1}{\log r}$ とおけば

$$\int_\Omega |f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha d\mu(x) \ge (q-1)^\alpha \int_{|g|\le 1} |g(x)|^q d\mu(x)$$
$$\ge \left(\frac{p_1 - 1}{\log r}\right)^\alpha \int_{e^{-\log r}<|g|\le 1} |g(x)| \cdot |g(x)|^{\frac{p_1-1}{n}} d\mu(x)$$
$$\ge (p_1 - 1)^\alpha \frac{\int_{\frac{1}{r}<|g|\le 1} |g(x)| \cdot |g(x)|^{\frac{p_1-1}{\log r}} d\mu(x)}{(\log r)^\alpha} d\mu(x) \approx \frac{\int_{\frac{1}{r}<|g|\le 1} |g(x)|}{(\log r)^\alpha}.$$

となるので，

$$\frac{\int_\Omega (|g(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1+\log^+ r)^\alpha} \le C \int_\Omega |f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha d\mu(x)$$

が $\forall r > 0$ に対して成り立つことがわかる。

4. Equivalence between Lorentz and Orlicz type estimates

次に (1.4) $\longleftrightarrow$ (1.5) を示す。そのために，これらの評価式の左辺同士，右辺同士を比較する。

Lemma 4.1. (Ω, μ) を σ-有限測度空間，$\alpha \le 0$ とする。このとき *Orlicz-Zygund* クラス

$$L\log^\alpha L = \left\{ f : \int_\Omega |f(x)|(1+\log|f(x)|)^\alpha d\mu(x) \right\} \tag{4.1}$$

と *Lorentz-Zygmund* クラス

$$L^{1,1,\alpha} = \left\{ f : \int_0^\infty f^*(t)(1+\log^+\frac{1}{t})^\alpha dt \right\} \tag{4.2}$$

を考えると，$L\log^\alpha L = L^{1,1,\alpha}$ となる。

Proof. $\mu(\Omega) = 1$ の場合の証明 ([1 Lemma 4.6.7, p.244]) と同様に行う。定義から

$$f^*(t) \le f^{**}(t) \le \frac{1}{t}\|f\|_1$$

だから

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha d\mu(x)\\
&= \int_0^\infty f^*(t)(1+\log^+ f^*(t))^\alpha dt\\
&\le \int_0^\infty f^*(t)(1+\log^+ \frac{\|f\|_1}{t})^\alpha dt\\
&= \int_0^{\min(\|f\|_1,1)} f^*(t)(1+\log^+ \frac{\|f\|_1}{t})^\alpha dt + \int_{\min(\|f\|_1,1)}^\infty f^*(t)dt\\
&\le \int_0^1 f^*(t)(1+\log(\frac{1}{t}))^\alpha dt + \|f\|_1(1+\log\|f\|_1) + \|f\|_1
\end{aligned}$$

となって $L\log^\alpha L \supset L^{1,1,\alpha}$ を得る。
また

$$E = \{t : t^*(t) > t^{-\frac{1}{2}}\} \qquad \text{and} \qquad F = [0,1]\backslash E$$

とおけば，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty f^*(t)(1+\log^+\frac{1}{t})^\alpha dt\\
&\le \int_E f^*(t)(\log f^*(t)^2)^\alpha dt + \int_F t^{1\frac{1}{2}}(1+\log(\frac{1}{t}))^\alpha dt + \int_1^\infty f^*(t)dt\\
&\le C_1\int_0^1 f^*(t)(1+\log f^*(t)) + C_2 + \int_1^\infty f^*(t)dt
\end{aligned}$$

となって $L\log^\alpha L \subset L^{1,1,\alpha}$ を得る。

Proposition 4.2. *Proposition 4.1* の条件下，(Ω,μ) 上の可測関数からなる次の２つの空間は一致し，さらにそのノルムは同等である。

$$B_\alpha = \left\{ f : \|f\|_{B_\alpha} = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{\int_{\frac{1}{r}}^\infty \mu(|f|>\alpha y)dy}{(1+\log^+ r)^\alpha} \le 1\right\} < \infty\right\}$$

$$M_{(t(1+\log^+ t)^{-\alpha})} = \left\{ f : \|f\|_{M(t(1+\log^+ t)^{-\alpha})} = \sup_{t>0}\left(\frac{t}{(1+t\log^\alpha t)^\alpha} f^{**}(t)\right) < \infty\right\}$$

このことは，M.Carro が [3] で $\alpha = 1$ の場合について示しており，さらにその証明を良く読むと全く同じようにして一般の $\alpha > 0$ の場合がわかるので証明は省略する。

これらの結果を用いれば，(1.5) と (1.6) の同等性が得られる。

5. Interpolation result

この章では次の補間定理を証明する。

Theorem 5.1. (Ω, μ) を σ-有限な測度空間とする。$1 < q < \infty$ を固定する。T が $L\log L^\alpha + L^q(\Omega, \mu)$ 上で定義された作用素で

$$\text{(1.1')} \qquad \left[\int_\Omega |Tf(x)|^q d\mu(x)\right]^{1/q} \le A\left[\int_\Omega |f(x)|^q d\mu(x)\right]^{1/q} \qquad \textit{for any } f \in L^q(\Omega, \mu)$$

および

$$\text{(1.6)} \qquad \sup_{r>0} \frac{\int_\Omega (|Tf(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1+\log^+ r)^\alpha} \le C\int_\Omega |f(x)|(1+\log^+|f(x)|)^\alpha d\mu(x)$$

を満たすならば

$$\int_{|Tf|\le 1} |Tf(x)|^q d\mu(x) + \int_{|Tf|>1} |Tf(x)| d\mu(x)$$
$$\text{(1.2)} \qquad \le \frac{C_A}{(q-1)^\alpha}\left[\int_{|f|\le 1} |f(x)|^q d\mu(x) + \int_{|f|>1} |f(x)|(1+\log|f(x)|)^\alpha d\mu(x)\right]$$

が成り立つ。

Remark. 作用素 T が弱 L^1 有界性を持つならば，仮定 (1.4) が成り立つが逆は成り立たない。一方でこの定理の結論は S.Koizumi(小泉澄之) [6] と同じであることから，この結果は。

Proof. 証明の方針は [6] と同様である。最初に f を次のように分解する。

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & (\text{if } |f(x)| \le 1) \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad \text{and put } h(x) = f(x) - g(x)$$

すると (1.1') より

$$\text{(5.1)} \qquad \int_{|Tg|\le 1} |Tg(x)|^q d\mu(x) \le C\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x) = \int_{|f|\le 1} |f(x)|^q d\mu(x),$$

$$\text{(5.2)} \qquad \int_{|Tg|>1} |Tg(x)|^1 d\mu(x) \le C\int_{|Tg|>1} |Tg(x)|^q d\mu(x)$$
$$\le \int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x) = \int_{|f|\le 1} |f(x)|^q d\mu(x)$$

はすぐにわかる。

次に，(1.6) で $r=1$ とすれば

$$
(5.3)\qquad \begin{aligned}\int_{Th>1}|Th(x)|d\mu(x) &\le C'\int_{\Omega}|h(x)|(1+\log^{+}|h(x)|)^{\alpha}d\mu(x)\\ &= C'\int_{|f|>1}|f(x)|(1+\log|f(x)|)^{\alpha}d\mu(x)\end{aligned}
$$

となる。最後に (1.6) で　$r>1$ とすると

$$
\frac{\int_{|Tf|>\frac{1}{r}}\Omega(|Tf(x)|-\frac{1}{r})d\nu(x)}{(1+\log^{+}r)^{\alpha}} \le C\int_{\Omega}|f(x)|(1+\log^{+}|f(x)|)^{\alpha}d\mu(x)
$$

となる。従って各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}\int_{e^{-n-1}<|Tf|\le e^{-n}}|Tf(x)|^{q}d\mu(x) &\le \int_{e^{-n-1}<|Tf|\le e^{-n}}|Tf(x)|e^{-n(q-1)}d\mu(x)\\ &\le C(1+n)^{\alpha}e^{-n(q-1)}\int_{\Omega}|f(x)|(1+\log^{+}|f(x)|)^{\alpha}d\mu(x)\end{aligned}
$$

が成り立つ。n について和を取ると

$$
(5.4)\qquad \begin{aligned}\int_{|Th|\le 1}|Th(x)|d\mu(x) &\le C'\int_{\Omega}|h(x)|(1+\log^{+}|h(x)|)^{\alpha}d\mu(x)\\ &= C'\int_{|f|>1}|f(x)|(1+\log^{+}|f(x)|)^{\alpha}d\mu(x)\end{aligned}
$$

([7] 参照)。これらの評価 (5.1)(5.2)(5.3)(5.4) を下の Lemma 5.2 を用いて組み合わせれば

$$
\begin{aligned}&\int_{|Tf|\le 1}|Tf|^{q}d\mu+\int_{|Tf|>1}|Tf|d\mu\\ &\le \int_{|f|\le 1}|f|^{q}d\mu+\int_{|f|>1}|f|(1+\log^{+}|f|)^{\alpha}d\mu\end{aligned}
$$

を得る。

Lemma 5.2(S.Koizumi[6]). $A\le B+C$ かつ $A,B,C>0$ とする。$1<q<\infty$ に対して

(i) $0\le A\le 1$ ならば

$$
A\le\begin{cases}B+C, & \text{if } 0\le C\le 1\\ B+C^{\frac{1}{q}} & \text{if } C>1\end{cases}
$$

(ii) $A>1$ ならば

$$
A\le\begin{cases}2^{q}(B^{q}+C^{q}), & \text{if } 0\le C\le 1\\ 2^{q}(B^{q}+C) & \text{if } C>1\end{cases}
$$

が成り立つ。

REFERENCES

1. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, Boston, 1988.
2. M. J. Carro, *New extrapolation estimates*, J. Func. Anal. **174** (2000), 155–166.
3. M. J. Carro, *On the range space of Yano's extrapolation theorem and new extrapolation estimates at infinity*, Publication Matematiques, to appear.
4. M. J. Carro and J. Martin, *Extrapolation theory for the real interpolation method*, Collect.Math. (2002).
5. A. Gogatishvili and T. Sobukawa, *ON the extrapolation estimates*, Math. Ineq. Appl. (2002) (to appear).
6. S. Koizumi, *Contribution to the theory of interpolation of operatitons*, Osaka J. Math. **8** (1971), 135-149.
7. T. Sobukawa, *Extrapolation theorem on L^p-spaces over infinite measure space*, Mathematica Japonica **38** (1993), 781-789.
8. ———, *Extrapolation theorem on some quasi-banach spaces*, Tokyo J. Math. **18** (1995), 417–423.
9. ———, *Extrapolation theorem on quasi-normed L^p spaces*, Math. Japonica **43** (1996), 241–252.
10. S.Yano, *Notes on Fourier Analysis (XXIX):An Extrapolation Theorem*, J. Math. Soc. Japan **3** (1951).

〒700-8530 岡山大学教育学部数学教育講座 Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Okayama University 3-1-1 Tsushima-naka Okayama 700-8530 Japan

E-mail address: sobu@cc.okayama-u.ac.jp