数理解析研究所講究録 1389 巻 2004 年 12-20

Singular integral and cancellation property

東海大学・開発工学部　小森康雄 (Yasuo Komori)
School of High Technology for Human Welfare
Tokai University

序　cancellation property というのは特異積分, Hardy 空間のどちらにおいても重要な性質である. この条件は自然であり, ある場合には必要条件でもあるので安易に仮定してしまうことがある. 本論では特異積分と Hardy 空間のそれぞれにおいて cancellation property の果たす役割について論じる.

1　特異積分と cancellation property

定義　(古典的特異積分作用素)
$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x-y)f(y)dy$ が古典的特異積分作用素であるとは積分核 K が以下の条件を満たすことをいう.

$$(1) \qquad |K(x)| \le \frac{C}{|x|^n},$$

$$(2) \qquad |\nabla K(x)| \le \frac{C}{|x|^{n+1}},$$

$$(3) \qquad \int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)dx = 0, \qquad 0 < \forall\varepsilon < \forall N.$$

例　(Hilbert 変換)

$$Hf(x) = \text{p.v.} \int_{R^1} \frac{1}{x-y} f(y)dy.$$

(3) の条件を **cancellation property** という.
(1) ~ (3) によって $\hat{K} \in L^\infty$ がわかり, それにより T の L^2 有界性が導かれる.
($|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}/y dy| \le C$ の一般化である.)

命題

古典的特異積分作用素 T は L^p 有界である $(1 < p < \infty)$.

注意　T^* を T の adjoint operator $T^*f(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(y-x)f(y)dy$ とすると (3) は形式的には $T^*1 = 0$ と書ける (§4 を参照).

2 Hardy 空間と cancellation property

定義 (Hardy 空間 H^p) $\varphi \in \mathcal{S}, \int_{R^n} \varphi(x)dx \neq 0$ を一つ固定して $f \in \mathcal{S}'$ に対して $f^{++}(x) = \sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)|$ と定義する ($\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$). そして

$$H^p(R^n) = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{H^p} = \|f^{++}\|_{L^p} < \infty\}.$$

注意 H^p は φ の選び方によらない. そして $H^p = L^p$ $(1 < p < \infty)$.

命題 $f \in L^1 \cap H^p$ $(p \leq 1)$ のとき $\int_{R^n} f(x)dx = 0$.

この性質を cancellation property という.

注意 $f \in L^1$, $\int_{R^n} f(x)dx = 0$ でも $f \in H^1(R^n)$ とは限らない.

そしてこのことをもっとはっきり示したのが以下の atom 分解である.
定義 (H^p-atom) 関数 $a(x)$ が H^p-atom $(n/(n+1) < p \leq 1)$ であるとは

$$\mathrm{supp}(a) \subset \exists Q \text{ (ball)}, \quad \|a\|_{L^\infty} \leq |Q|^{-1/p}, \quad \int_Q a(x)dx = 0.$$

命題 (atom 分解, Coifman [4], Latter [20]) $n/(n+1) < p \leq 1$ のとき

$$f \in H^p(R^n) \Leftrightarrow f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j a_j, \quad a_j \text{ は } H^p\text{-atom で } \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^p \approx \|f\|_{H^p}^p.$$

3 Hardy 空間上の特異積分

命題 R_j を Riesz 変換 $(R_j f)\hat{}(\xi) = i\xi_j/|\xi|\, \hat{f}(\xi)$ とするとき

$$\|f\|_{H^p} \approx \|f\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^p}, \qquad f \in L^2(R^n) \cap H^p(R^n), \quad n/(n+1) < p \leq 1. \tag{4}$$

さらに

$$\|R_j f\|_{H^p} \leq C\|f\|_{H^p} \qquad f \in L^2(R^n) \cap H^p(R^n). \tag{5}$$

この命題を使うと以下のことがわかる.

命題 古典的特異積分作用素 T は H^p 有界である $(n/(n+1) < p \leq 1)$.

注意 $p \leq n/(n+1)$ の場合の H^p 有界性をいうには K に (1), (2) 以外にさらなる reguralitry を仮定する必要がある (たとえば [25] 参照).

命題の証明には以下の補題が必要である.

補題 T が $H^p \to L^p$ 有界であれば T は $H^p \to H^p$ 有界である.

補題の証明 T が $H^p \to L^p$ 有界とすると

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{H^p} &\approx \|Tf\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j Tf\|_{L^p} & \text{by} \quad (4)\\ &\le C\|f\|_{H^p} + \sum_{j=1}^{n} \|TR_j f\|_{L^p} \\ &\le C\|f\|_{H^p} + C\sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{H^p} \le C\|f\|_{H^p} & \text{by} \quad (5). \quad \square\end{aligned}$$

命題の証明

補題と atom 分解より

$$\|Ta\|_{L^p} \le C \qquad \text{for any atom } a \qquad (C \text{ は atom a によらない定数}),$$

を示せば十分であることがわかる.

$\mathrm{supp}(a) \subset \{x \in R^n; |x - x_0| < r\}$ とすると x ; $|x - x_0| > 2r$ に対して

$$\begin{aligned}|Ta(x)| &= \left|\int K(x-y)a(y)dy\right| \\ &= \left|\int (K(x-y) - K(x-x_0)a(y)dy\right| \qquad \text{by cancellation property of} \quad a \\ &\le C\int \frac{|y-x_0|}{|x-x_0|^{n+1}}|a(y)|dy \le C\frac{r^{n(1-1/p)+1}}{|x-x_0|^{n+1}}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{|x-x_0|>2r} |Ta(x)|^p dx \le C, \qquad p > n/(n+1)$$

が得られる.

T の L^2 有界性と Hölder の不等式より

$$\int_{|x-x_0|\le 2r} |Ta(x)|^p dx \le Cr^{n(1-p/2)}\|Ta\|_{L^2}^p \le Cr^{n(1-p/2)}\|a\|_{L^2}^p \le C.$$

$\square$

ここで重要なのは上の補題である. Tf を H^p 上で評価をするのに L^p 評価, 大きさの評価をするだけで十分であるといっているわけである. すなわち $f \in H^p$ の持っている cancellation property はそのまま Tf に遺伝しているわけである (§4 と比較せよ).

4 一般化された特異積分作用素

定義 $Tf(x) = \text{p.v.}\int_{R^n} K(x,y)f(y)dy$ が 一般化された特異積分作用素であるとは積分核 K が以下の条件を満たすことをいう.

$$(1') \qquad |K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^n},$$

$$(2') \qquad |\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{n+1}},$$

(3′) T は L^2 有界作用素である.

例 (Calderón's commutator)

$$C_\phi f(x) = \text{p.v.}\int_{R^1} \frac{\phi(x)-\phi(y)}{(x-y)^2} f(y)dy, \qquad \phi' \in L^\infty.$$

注意 現在ではこのタイプの作用素は Calderón-Zygmund 作用素と呼ばれ，もっと一般化されて，必ずしも上記のように主値積分で表現されている必要はないが，ここでは簡単のためにこのように表す ([7] 参照).

注意 条件 (3′) を古典的特異積分作用素 (convolution 型) のように (§1), K の条件で表せないか？ということは大きな問題であるが (David-Journé (1984) [8] or [28]), ここでは扱わない. 我々が興味あるのは特異積分の H^p 有界性であり，その場合 L^2 有界性は必要条件だからである. 実際, Calderón's commutator の L^2 有界性がわかったのも比較的最近である ([3], [5], [8]).

命題 一般化された Calderón-Zygmund 型の特異積分作用素 T は
$T: L^p \to L^p$ 有界である $\quad (1 < p < \infty)$,
$T: H^p \to L^p$ 有界である $\quad (n/(n+1) < p \le 1)$.

注意 $T: H^p \to H^p$ 有界でないことに注意せよ.

Alvarez and Milman [2] は以下の結果を得た.
T^* を T の adjoint operator $T^*f(x) = \text{p.v.}\int_{R^n} K(y,x)f(y)dy$ とする.

定理 (Alvarez and Milman)
T を一般化された Calderón-Zygmund 型の特異積分作用素とする.

$$T^*1 = 0 \quad \text{のとき} \quad T: H^p \to H^p \text{ 有界である} \quad (n/(n+1) < p \le 1).$$

注意 §1 の cancellation property と比較せよ. T^*1 の厳密な定義については，たとえば [28] を見よ.

§1 の条件と比べて $T^*1 = \int K(y,x)dy = 0$ という条件は自然なように思われるが，この条件は K の形にひじょうに強い制限をしており，Calderón's commutator は一般にはこの条件を満たさない．そこで我々は以下のような結果を得た．

アイデアの背景にはつぎのような事実がある．

1. T と T^* は $L^\infty \to BMO$ 有界がいえるので常に $T^*1 \in BMO$ は成り立っている．

2. 関数の局所的な性質のみ考えると，リプシッツクラス Lip_ε は BMO に含まれ，さらに以下の命題より $\mathrm{Lip}_0 = BMO$ とみなすことができる．

定義 (BMO)

$$BMO(R^n) = \left\{f; \|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int |f(x) - f_Q|dx < \infty\right\}, \qquad f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx.$$

定義 (homogeneous Lipschitz space)

$$\mathrm{Lip}_\varepsilon(R^n) = \left\{f; \|f\|_{\mathrm{Lip}_\varepsilon} = \sup_{x\neq y}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\varepsilon} < \infty\right\} \quad \text{for} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

命題 ([28] p. 213 参照)

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\varepsilon} \approx \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\varepsilon/n}}\int |f(x) - f_Q|dx.$$

3. T は $H^p \to H^p$ 有界のとき，Hardy 空間の cancellation property (§2) より $T^{*1} = 0$ である．だからこの条件をはずすためには $H^p(R^n)$ より広い空間を考える必要がある．

定義 (local Hardy space H^p, Goldberg [11]) $f^+(x) = \sup_{0<t<1}|f * \varphi_t(x)|$ と定義する．そして

$$h^p(R^n) = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{h^p} = \|f^+\|_{L^p} < \infty\},$$

と定義する．

注意 $H^p \subset h^p$.

以下が我々の結果である．

定理 ([13])

T を一般化された Calderón-Zygmund 型の特異積分作用素とする．

$$T^*1 \in \mathrm{Lip}_\varepsilon\ (0 < \varepsilon \leq 1) \text{ のとき}, T : H^p \to h^p \text{ 有界である} \quad (n/(n+\varepsilon) < p \leq 1).$$

系 $\phi' \in L^\infty(R^1), \phi' \in \mathrm{Lip}_\varepsilon(R^1)$ のとき $C_\phi : H^p(R^1) \to h^p(R^1)$ 有界である $(1/(1+\varepsilon) < p \leq 1)$.

系の証明　$\phi' \in L^\infty(R^1)$ のとき T は L^2 有界である ([5]). そして部分積分を使って $C_\phi 1 = -H(\phi)$ (H は Hilbert 変換) と表せ，さらに Hilbert 変換はリプシッツ空間上で有界であるので ([28] p. 214), $C_\phi 1 \in \mathrm{Lip}_\varepsilon(R^1)$ となり定理を応用できる. □

5 定理の証明

まず Alvarez and Milman [2] の証明を解説する. 一般化された特異積分作用素の場合は §3 の補題を使うことができないので
$T:\ H^p \to H^p$ 有界を証明するには

$$\|Ta\|_{H^p} \le C \quad a:\ H^p\text{-atom}$$

を示す必要がある. しかし，定義にしたがって $\|Ta\|_{H^p} = \|(Ta)^{++}\|_{L^p}$ を評価するのは難しい. そこで Taibleson and Weiss [27] は molecule を導入した.

定義　(H^p-molecule)
関数 $M(x)$ が (H^p, x_0, r)-molecule $(n/(n+1) < p \le 1)$ であるとは

$$(\mathrm{M}_1)\quad \Big(\int_{|x-x_0|<2r} |M(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \le r^{n(1/2-1/p)},$$

$$(\mathrm{M}_2)\quad |M(x)| \le \frac{r^{n(1-1/p)+\delta}}{|x-x_0|^{n+\delta}} \quad \text{for} \quad |x-x_0| \ge 2r,$$

$$(\mathrm{M}_3)\quad \int M(x)dx = 0.$$

命題　([27]) 関数 $M(x)$ が (H^p, x_0, r)-molecule のとき

$$\|M\|_{H^p} \le C_p, \quad C_p \text{ は } x_0, r \text{ に依存しない定数.}$$

Alvarez and Milman は以下のことを示した.

補題　$T^*1 = 0$ とする. 関数 $a(x)$ が H^p-atom で support が $\{x; |x-x_0| < r\}$ に含まれるとき $Ta(x)$ は (H^p, x_0, r)-molecule の定数倍である.

この補題と命題により T の H^p 有界性が証明される.

補題の証明　条件 $(\mathrm{M}_1), (\mathrm{M}_2)$ が成り立つことは積分核の条件 $(1'), (2'), (3')$ を使って §3 の証明と同様にして示される. (M_3) は仮定 $T^*1 = 0$ より明らか. □

我々の定理は $T^*1=0$ を仮定していなので条件 (M_3) は成り立たない．そこで h^p-molecule を導入した．

定義 (h^p-molecule) $n/(n+1)<p\le 1$ とする．
関数 $M(x)$ が large (h^p,x_0,r)-molecule であるとは $r\ge 1$ で条件 (M_1), (M_1) を満たすことをいう．
関数 $M(x)$ が small (h^p,x_0,r)-molecule であるとは $r<1$ で条件 (M_1), (M_1) と

$$(\mathrm{M}_3') \quad \left|\int M(x)dx\right| \le r^{n/p}$$

を満たすことをいう．
そして我々を以下の命題を示した．

命題 関数 $M(x)$ が larege または small (h^p,x_0,r)-molecule のとき

$$\|M\|_{h^p}\le C_p, \qquad C_p \text{ は } x_0, r \text{ に依存しない定数.}$$

定理の証明 関数 $a(x)$ は support が $\{x;|x-x_0|<r\}$ に含まれる H^p-atom とする．条件 $(\mathrm{M}_1),(\mathrm{M}_2)$ については Alvarez and Milman の証明と同様である．示すべきことは $r<1$ のときの条件 (M_3') である．

$$\begin{aligned}\left|\int Ta(x)dx\right| &= |(Ta,1)| = |(a,T^*1)| \le C_n\|a\|_{H^{n/(n+\epsilon)}}\|T^*1\|_{\mathrm{Lip}_\epsilon}\\ &\le C_n r^{n/p}.\end{aligned}$$

ここでは $H^{n/(n+\epsilon)}$ と Lip_ϵ の duality を使った． □

我々は同様の方法で，一般化された特異積分の有界性を重みつきの Hardy 空間 [17]，Herz タイプの Hardy 空間 [16]，predual of Morrey 空間 [15], Lipschitz 空間, Sobolev 空間上 [18], [19] でも示した．

参考文献

参考書
§1 の古典的な特異積分に関しては Stein の有名な教科書 [24], [26] や Garcia-Cuerva and Rubio de Francia [10], §4 の一般化された特異積分に関しては Journé [12], Torchinsky [28], Hardy 空間に関しては [10], [28], Stein [25], Lu [21], 内山 [29] などがある．

[1] J. Alvarez, *Continuity of Calderon-Zygmund type operators on the predual of a Morrey space*, Clifford Algebra in Analysis and Related Topics, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, (1996), 309-319.

[2] J. Alvarez and M. Milman, *H^p continuity of Calderon-Zygmund type operators*, J. of Math. Anal. and Appl. **118** (1986), 63-79.

[3] A. P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1324-1327.

[4] R. Coifman, *A real variable characterization of H^p*, Studia Math. **51** (1974), 269-274.

[5] R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes*, Ann. Math. **116** (1982), 361–387.

[6] R. Coifman and Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, Vol. 57, 1978.

[7] R. Coifman and Y. Meyer, *Wavelets Calderón-Zygmund and multilinear operators* , Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 48, 1997.

[8] G. David and J.-L. Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. Math. **120** (1984), 371-397.

[9] C. Fefferman and E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[10] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math. Studies, Vol. 116, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[11] D. Goldberg, *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. **46** (1979), 27–42.

[12] J.-L. Journé, *Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón*, Lecture Notes in Math. **994**, Springer-Verlag, 1983.

[13] Y. Komori, *Calderón-Zygmund operators on $H^p(R^n)$*, Sci. Math. Japonicae **53** (2001), 65-73.

[14] ———, *The atomic decomposition of molecule on discrete Hardy spaces*, Acta Math. Hungarica **95** (2002), 23-29.

[15] ———, *Calderón-Zygmund operators on the predual of a Morrey space*, Acta Math. Sinica Engl. Ser. **19** (2003), 297-302.

[16] ________ , *Calderón-Zygmund operators on Herz-type Hardy spaces*, to apper in J. of Math. Anal. and Appl.

[17] ________ , *Calderón-Zygmund operators on weighted $H^p(R^n)$*, to appear in Hokkaido Math. J. **32** (2003).

[18] ________ , *Singular integrals on Lipschitz and Sobolev spaces*, to appear in Taiwanese J. Math.

[19] ________, *Higher order commutators on $H^p(R^1)$*, to appear in Far East J. Math. Sci.

[20] R. H. Latter, *A decomposition of $H^p(R^n)$ in terms of atoms*, Studia Math. **62** (1978), 92-101.

[21] S. Lu, *Four Lectures on Real H^p Spaces*, World Scientific (1995).

[22] S. Lu and D. Yang, *The local version of $H^p(R^n)$ spaces at the origin*, Studia Math. **116** (1995), 103-131.

[23] T. Quek and D. Yang, *Calderón-Zygmund operators on weighted weak Hardy spaces over R^n*, Acta Math. Sinica Engl. Ser. **16** (2000), 141-160.

[24] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[25] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[26] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[27] M. H. Taibleson and G. Weiss , *The molecular characterization of certain Hardy spaces*, Astérisque, **77**, (1980), 67-149.

[28] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, 1986.

[29] A. Uchiyama, *Hardy Spaces on the Euclidean Space*, Springer, 2001.

410-0395 沼津市西野 317 東海大学開発工学部
komori@wing.ncc.u-tokai.ac.jp