数理解析研究所講究録 1390 巻 2004 年 57-64

言語の拡大と可算モデルの個数に関して

東京大学数理科学研究科・玉江 伸成 (Tamae Nobuaki)
Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo

以下、考える言語は断らなければ可算とする。完全な理論 T に対し、$I(T,\omega)$ で、T の可算モデルの (同型を除いた) 数を表すことにする。

$I(T,\omega)$ は、70年代からモデル理論の専門家にとっての関心事であり、特に Lachlan [2] による「$1<I(T,\omega)<\omega$ ならば T は安定である」という予想は大きな未解決問題でもある。

この論文では、言語を拡大することによって可算モデルの数がどう変化するかを調べる。第1節では、Millar [3] の構成法にならい、$4\leq I(T,\omega)<\omega$ となる完全な理論に、定数記号を一つ付加して可算モデルの数を減少させることができるような理論 T とその拡大の存在を示す。その構成は統一的で、3以上の自然数までなら自由に可算モデルの数を減らすことができる。

第2節では、言語を拡大していき、有限個付加した段階では $I(T,\omega)=\omega$ だが、無限個付加した瞬間に $I(T,\omega)$ を有限にするような理論とその拡大を構成する。

1 可算モデルの数を減少させる理論の構成

例 1.1 (2^ω から ω) $L=\{E_1\}\cup\{c_i^j\}_{i,j<\omega}$ (E_1 は2変数述語記号) とし、L-理論 T を

- E_1 は同値関係で、各同値類は無限集合、同値類の個数も無限個、
- $c_i^j\neq c_k^l \quad ((i,j)\neq(k,l))$,
- $E_1(c_i^j,c_i^k)$ (i,j,k は任意の自然数)、
- $\neg E_1(c_i^0,c_j^0)$ (i,j は任意の自然数)。

を表現する理論とする。T は完全な理論となる。$L'=L\cup\{E_2\}$ (E_2 は2変数述語記号) とし、L'-理論 T' を上の T に

- E_2 は同値関係、
- $E_2(c_i^k,c_j^k)$ (i,j,k は任意の自然数)、
- $\neg E_2(c_0^i,c_0^j)$ (i,j は任意の自然数)。
- 任意の $i<\omega$ と任意の同値類 $x/E_1, y/E_2$ に対し、$|x/E_1\cap y/E_2|=1.$

を付け加えたものとする。T' も完全な理論となる。

Claim 1. $I(T,\omega)=2^\omega$.

(証明) 同値類 c_i^0/E_1 の中に、定数記号の解釈として現れる以外の元が存在するか否かで2通りあり、それが $i<\omega$ によって選べるので 2^ω 種類の可算モデルがある. ∎

一方、

Claim 2. $I(T',\omega)=\omega$.

(証明) c_i^0/E_1 の中に定数記号の解釈として現れる以外の元の個数は、$n=0,1,2,\ldots,\omega$ の ω 個ある。T' の定義より、この元の個数 n は、各 $i<\omega$ に対して一定でなくてはならない。一方、E_1 に関する同値類で、定数記号の解釈を代表元に持たないものの個数も、$0,1,2,\ldots,\omega$ の ω 個ある。これらが決まれば T' のモデルは決定されるので、$I(T',\omega)=\omega\times\omega=\omega$ となる。∎

上の例は2変数述語記号を1つつけることにより、可算モデルの数を 2^ω から ω に減らしているが、このように、言語を拡大する際、拡大させる前のモデルの種類を「削る」ような文を考える必要がある。

注: 定数記号を1つつけて、2^ω を ω にするような例は、まだ作れていない。

定義 1.2 次の文を満たす $\{<\}$-構造を、木構造と呼ぶ。

- $\neg(x<x)$,
- $x<y\wedge y<z\rightarrow x<z$,
- $x<z\wedge y<z\rightarrow x<y\vee y<x\vee x=y$.

定義 1.3 $U_1,\ldots,U_n,V_1,\ldots,V_m$ を1変数述語記号とし、$L^0_{nm}=\{<,U_1,\ldots,U_n,V_1,\ldots,V_m\}$ と置く。次のような L^0_{nm}-理論 (完全ではない) Σ を考える:

- モデルは木構造である、
- $U_1,\ldots,U_n,V_1,\ldots,V_m$ のどの2つも共通解を持たない、
- $\exists y\,(y>x)\rightarrow\bigwedge_{i=1}^{n}U_i(x)$,
- $\forall x\left(\bigvee_{i=1}^{n}U_i(x)\vee\bigvee_{j=1}^{m}V_j(x)\right)$.

有限構造 A に対し、$\mathrm{Diag}(A)$ で A の満たす全ての atomic な論理式の集合を表すことにする。全ての有限構造 $A,C\models\Sigma$, $C=AB$ に対し、

- $\forall A\,(\mathrm{Diag}(A)\rightarrow\exists B\,\mathrm{Diag}(AB))$.

を Σ につけた理論を T^0_{nm} とする。

更に ω 個の新しい定数記号 $\{c_i\}_{i<\omega}$ を用意し、$L_{nm} = L^0_{nm} \cup \{c_i\}_{i<\omega}$ とする。

- $c_i < c_{i+1}$ （i は任意の自然数）、
- $U_1(c_i)$ （i は任意の自然数）

を T^0_{nm} につけた L_{nm}-理論を T_{nm} と置く。

補題 1.4 T^0_{nm} は無矛盾である。

（証明）次のような有限 L^0_{nm}-構造の増大列 $A_0 \subset A_1 \subset \cdots$ を帰納的に作る：

- $A_i \models \Sigma$
- A_i の任意の部分構造 B と、B と同型な部分構造を持つ濃度 $|B|+1$ の有限 L^0_{nm}-構造 $C' \models \Sigma$ に対して、$B \subseteq C \subset A_{i+1}$ で、C と C' が同型になるようなものが存在する。

Claim. $A, B \models \Sigma$, $A \supseteq B$ とする。$Bc' \models \Sigma$ となる c' に対して、$\mathrm{Diag}(Bc') = \mathrm{Diag}(Bc)$ かつ $Ac \models \Sigma$ となる c が存在する。

(i) $b_1 < c' < b_2$ となる $b_1, b_2 \in B$ が存在する場合：予め、b_1 をそのようなもののうち最大のもの、b_2 をそのようなもののうち最小のものに取り直す。$c' \in U_i$ とする。$b_1 < a < b_2$ かつ $U_i(a)$ となる $a \in A$ が存在すれば、$c = a$ とすればよい。そのような $a \in A$ がなければ、$b_1 < c < b_2$ かつ $U(c)$ なる c を A に外側から付加したとき、$Ac \models \Sigma$ かつ $\mathrm{Diag}(Bc) = \mathrm{Diag}(Bc')$ となる。

(ii) c' が Bc' の中で極小だが、極大ではない場合：(i) とほぼ同様。

(iii) c' が Bc' の中で極大の場合：$c' \in \bigcup_{j=1}^{n} V_j$ の場合のみ調べればよい。$V_j(c')$ とする。（それ以外の場合は (i) とほぼ同様。）c' が Bc' の中で極小でもある場合（すなわち B の元と大小関係が全くつかない場合）は、すべての $a \in A$ に対し、$\neg c < a \wedge \neg a < c \wedge V_j(c)$ となるように c を A に外側から付加すればよい。$b < c'$ となる $b \in B$ が存在する場合は、b をそのようなもののうち最大のものに取り直す。$b < a \in A$ で $a \in V_j$ となるものがあれば、$c = a$ とすればよい。そのような $a \in A$ がなければ、b 以上の A で極大な元 a を 1 つ選び、$c > a$ かつ $c \in V_j$ となる c を外側から A に付加したとき、$Ac \models \Sigma$ かつ $\mathrm{Diag}(Bc) = \mathrm{Diag}(Bc')$ となる。　(Claim の証明終)

有限構造 $A_0 \models \Sigma$ は任意にとる。A_i まで出来たとする。A_i の部分構造を $\{B_j\}_{j<M}$ と並べる。M は有限である。B_j 上の quantifier-free なタイプは有限個しかないので、それを $q_{j0}, \ldots, q_{jN_j}$ と並べ、解を $c'_{j0}, \ldots, c'_{jN_j}$ とする Claim を $A = A_i$, $B = B_0$, $c' = c'_{00}$ として適用し、$A_i c_{00}$ を得る。更に Claim を $A = A_i c_{00}$, $B = B_0$, $c' = c'_{01}$ として適用する。この操作を繰り返す（有限回）と、上で望んだような A_{i+1} ができる。

$M=\bigcup_{i<\omega}A_i$ とすると、M は T^0_{nm} のモデルとなる。$\forall A\,(\mathrm{Diag}(A)\to\exists B\,\mathrm{Diag}(AB))$ のみが問題である。変数 $B=b_1\dots b_n$ とする。$\mathrm{Diag}(A)$ なる $A\subset M$ をとる。$A\subset A_i$ なる $i<\omega$ が存在する。上の構成法より、$A_{i+1}\models\mathrm{Diag}(Ab_1)$ となる $b_1\in A_{i+1}$ が存在する。これを n 回繰り返し、$A_{i+n}\models\mathrm{Diag}(AB)$ となる $B\subset A_{i+n}$ がとれる。従って $M\models\exists B\,\mathrm{Diag}(AB)$ である。∎

補題 1.5 T^0_{nm} は *ω-categorical.* 従って、T^0_{nm} は完全である。

(証明) T^0_{nm} の可算モデル M,N をとり、通常の back and forth の議論で $M\cong N$ を証明すればよい。

$f_i: M_i\to N_i$ なる partial isomorphism まで作れたとして、$a\in M\setminus M_i$ とする。$N\models\forall M_i\,(\mathrm{Diag}(M_i)\to\exists a\,\mathrm{Diag}(M_ia))$ より、$N\models\exists a\,\mathrm{Diag}(N_ia)$. この解を b として、$f_{i+1}=f\cup\{(a,b)\}$ とする。このステップを交互に繰り返し、$f=\bigcup_{i<\omega}f_i$ とすれば、M と N の間の同型写像が得られる。∎

補題 1.6 T_{nm} は完全である。

(証明) T_{nm} を言語 $L^0_{nm}\cup\{c_i|\,i\le k<\omega\}$ に制限した理論を T^k_{nm} とすると、T^k_{nm} は ω-categorical である。実際、補題 1.5 の証明中で M_0,N_0 をそれぞれ $\{c_i|\,i\le k<\omega\}$ を M,N に解釈させたものとして、そこから back and forth の議論を進めればよい。したがって T^k_{nm} は完全である。

一方、$T_{nm}=\bigcup_{k<\omega}T^k_{nm}$ より、完全な理論の増大列の極限の和はまた完全なので、T_{nm} も完全となる。∎

補題 1.7 $I(T_{nm},\omega)=n+m+2.$

(証明) $M\models T_{nm}$ とする。証明の方針は、可算モデルを 3 種類持つ Ehrenfeucht の有名な例 (cf. [4]) とよく似ている。結局は、$\{c_i|\,i<\omega\}$ の上限(以下 $\lim c_i$ と書く)の種類で、大きく分けて 4 種類に可算モデルが分別される。

(1) $\{c_i|\,i<\omega\}$ が M に cofinal に含まれている場合。つまり、全ての i に対して $c_i<a$ となるような $a\in M$ が存在しない場合。(2) $\lim c_i\notin M$ だが、全ての i に対して $c_i<a$ となるような $a\in M$ が存在する場合。(3) $\lim c_i\in U_j$ となる場合。(4) $\lim c_i\in V_k$ となる場合。

それぞれの場合に当てはまる可算モデルがちょうど 1 つだけ存在することは、補題 1.4 に似た back and forth の議論で確かめられる。従って $I(T,\omega)=1+1+n+m=n+m+2$ である。∎

次のような論理式の集合 $p(x)$ を考える。

$$p(x)=\{x>c_i|\,i<\omega\}\cup\{V_1(x)\}$$

$d, d' \models p$ を（充分大きな saturation を持ったモデル $\mathcal{M}$ の中でとると、d を d' に移すような $\mathcal{M}$ の自己同型写像が容易に作れるので、これは（$\emptyset$ 上の）タイプになっている。従って $T = T_{nm} \cup p(d)$ （d は新しい定数記号）と定義すると、T は完全な理論である。

定理 1.8 $I(T, \omega) = n + 2$.

（証明）補題 1.7 と同様に、$\lim c_i$ の様子によって、可算モデルの種類が分別される。補題 1.7 の証明中の (1)–(4) に連動させて議論する。$M \models T$ とする。

(1) $\{c_i | i < \omega\}$ が $M \setminus \{d\}$ に cofinal に含まれている場合。つまり、全ての i に対して $c_i < a$ となるような $a \in M$, $a \neq d$ が存在しない場合。(2) $\lim c_i \notin M$ だが、全ての i に対して $c_i < a$ となるような $a \in M$, $a \neq d$ が存在する場合。(3) $\lim c_i \in U_j$ となる場合。(4) $\lim c_i \in V_k$ となる場合だが、このケースは考える必要がない。なぜなら V_k を満たす M の元は、M の中で極大でなければならないが、すでに $c_i < d$ であるので、$\lim c_i = d$ となるとき以外には、このケースは存在しないからである。そして、$\lim c_i = d$ となるケースは、すなわち (1) である。

従って、$I(T, \omega) = 1 + 1 + n = n + 2$ となる。∎

以上より、次が成り立つ。

系 1.9 任意の $3 \leq m < n < \omega$ に対し、完全な L-理論 T と、T を拡大した $L \cup \{c\}$-理論 T' で、$I(T, \omega) = n$ かつ $I(T', \omega) = m$ となるものが存在する。

注：上の系で $n = \omega$ として、そのような T, T' がとれるかは、まだ判らない。（ある m に関して、そのような T, T' が存在することは Millar [3] が示した。）

2 Limit extension

この節では、次のような理論を作る。

(*) 有限言語の増大列 $L_0 \subset L_1 \subset \cdots$ と、完全な理論の増大列 $T_0 \subset T_1 \subset \cdots$ （各 T_i は L_i-理論）で、全ての $i < \omega$ に対して $I(T_i, \omega) = 2^\omega$ であり、かつ $I\left(\bigcup_{i<\omega} T_i, \omega\right) = n < \omega$.

まず、第 1 節でも暗黙に使った事実を再度述べておく。

事実 2.1 ([4]) $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <) \cup \{c_i < c_{i+1} | i < \omega\}$ とする。このとき、$I(T, \omega) = 3$.

$L = \{<_0, <_1\} \cup \{c_{ij} | i, j < \omega\}$ とする。L-理論 T を以下のように定義する：

定義 2.2 T を次の L-閉論理式の集合とする。

- $<_0, <_1$ は極大元、極小元を持たない部分順序である。
- $i < \omega,\ j < k < \omega$ のとき、$c_{ij} <_0 c_{ik}$.
- $i < j < \omega,\ k < \omega$ のとき、$c_{ik} <_1 c_{jk}$.
- $<_0$ は分岐しない：$\forall x \neg \exists yz\,((x <_0 y) \wedge (x <_0 z) \wedge \neg (y <_0 z))$
- $<_1$ は分岐しない。
- $<_0$ は稠密である：$\forall xy\,(x <_0 y \to \exists z\,(x <_0 z <_0 y))$.
- $<_1$ は稠密である。
- $\forall x\, \exists y\,(((x <_1 y) \vee (x = y) \vee (x >_1 y)) \wedge ((y <_0 c_{00}) \vee (y = c_{00}) \vee (y <_0 c_{00})))$.
- 上の文の $<_0$ と $<_1$ を入れ替えたもの。

T のモデルとしては、例えば $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ を 座標平面内で考え、水平方向に $(\mathbb{Q}, <_1)$ が、垂直方向に $(\mathbb{Q}, <_2)$ が並んでいる図を想像し、c_{ij} が格子点 (i, j) を表していると考えると、イメージが湧く。T が完全であることは、$\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$ が完全であることを示すときに用いる量化子消去の手法が同じように働くので、示される。

定義 2.3 L を拡大した新しい言語を以下のように帰納的に定義する。$L_0 = L \cup \{R_f\}$, $L_{i+1} = L_i \cup \{R_{g_i}, R_{h_i}\}$ $(i \geq 0)$ （R_f, R_{g_i}, R_{h_i} は全て２変数述語記号)。

定義 2.4 φ_i を以下の命題を意味する閉論理式の *conjunction* とする。

- $R_{g_i}(x, y)$ は写像である：$\forall xyz\,(R_{f_i}(x, y) \wedge R_{f_i}(x, z) \to y = z)$.

  $R_{h_i}(x, y)$ は写像である。

  （$i = 0$ のときは、$R_f(x, y)$ についての同様の命題。以下、この（部分）写像を f, g_i, h_i と表す。）
- 各 $j < \omega$ に対し $g(c_{ji}) = c_{j,i+1}$, $h(c_{ij}) = c_{i,j+1}$.

  （$i = 0$ のときは、各 $j < \omega$ に対し $f(c_{0j}) = c_{j0}$.）
- g_i の定義域は $G_i = \{x | x \leq_2 c_{0i}\} \cup \{x | x >_2 c_{0i}\}$, 値域は $G_{i+1} = \{x | x \leq_2 c_{0,i+1}\} \cup \{x | x >_2 c_{0,i+1}\}$, h_i の定義域は $H_i = \{x | x \leq_1 c_{i0}\} \cup \{x | x >_1 c_{i0}\}$, 値域は $H_{i+1} = \{x | x \leq_1 c_{i+1,0}\} \cup \{x | x >_1 c_{i+1,0}\}$.
  （$i = 0$ のときは 定義域は H_0, 値域は G_0.）

- g_i, h_i はそれぞれ $<_2$, $<_1$-同型写像である。($i = 0$ のときは f は $<_1$ の関係を $<_2$ の関係に委譲する全単射である。)

L_i-理論 T_i は帰納的に $T_{i+1} = T_i \cup \{\varphi_i\}$ $(i \geq 0)$ で定義される理論のこととする。

定理 2.5 *(1)* 各 $i < \omega$ に対して $I(T_i, \omega) = 2^\omega$.

(2) $I\left(\bigcup_{i<\omega} T_i\right) = 3$.

(証明) (1) $M \models T$ を可算とする。i を固定する。仮定より、任意の j に対して $(H_j^M, <_1), (G_j^M, <_2)$ は $(\mathbb{Q}, <)$ と同型である。従って、定数記号をつけたとき、事実 2.1 により、$I(\mathrm{Th}(H_j^M), \omega) = I(\mathrm{Th}(G_j^M), \omega) = 3$ となる。この構造に g_k, h_k $(k \leq i)$ がつけられても、c_{mn} $(m, n > i)$ の部分の構造には影響しないので、各 H_j^M, G_j^M $(j > i)$ はやはり 3 種類の可算構造を自由に取り得る。従って $I(T_i, \omega) = 3^\omega = 2^\omega$.

(2) $\lim_i c_{ij}, \lim_i c_{ji}$ が $(\mathbb{Q}, <)$ で、事実 2.1 の 3 種類の可算モデルのどのタイプに属するかを考えれば良いが、f, g_i, h_i $(i < \omega)$ が同型写像であるため、それらはすべて $\lim_i c_{0i}$ が属するタイプと一致する。よって $I\left(\bigcup_{i<\omega}, \omega\right) = 3$.
∎

事実 2.1 で使われた理論 T は $I(T, \omega) = 3$ であるから、定理 2.4(2) で示された可算モデルの種類も 3 であったが、よく知られているように ([1]) (第 1 節の構成も本質的にはこれである)、更に 1 変数述語を有限個つけて拡大した言語の下で、$4 \leq I(T, \omega) = n < \omega$ なる理論を作ることができる。上の構成と全く同様にして、(2) で $I, \bigcup_{i<\omega} T_i = n$ とすることができる。事実 2.1 の命題中に現れる言語は無限であるが、無限個の定数記号の代わりに 2 変数述語 (同値関係にする) を 1 つ導入して、命題中の理論と相互解釈可能な理論を作ることができる。よって、上の構成を踏襲することにより、

定理 2.6 *(*)* を満たす有限言語 L_i と、L_i-理論 T_i $(i < \omega)$ が存在する。

注: 上では、2 変数述語記号を付加していったが、定数記号を付加して (*) を満たすような理論が存在するかどうかは、まだわからない。(あると予想する)

参考文献

[1] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model theory, Third edition*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[2] A. H. Lachlan, *Two conjectures regarding the stability of ω-categorical theories*, Collection of articles dedicated to Andrzej Mostowski on the occasion of his sixtieth birthday, II, Fund. Math. 81 (1973/74), no. 2, 133–145.

[3] T. Millar, *Finite extensions and the number of countable models*, J. Symbolic Logic 54 (1989), no. 1, 264–270.

[4] R. L. Vaught, *Denumerable models of complete theories*, Infinitistic Methods (Proc. Sympos. Foundations of Math., Warsaw, 1959), (1961), pp. 303–321