数理解析研究所講究録 1390 巻 2004 年 23-29

ザリスキータイプの幾何 (2)
Bézoutの定理，Chowの定理，そして主定理

板井　昌典 (ITAI Masanori)
東海大学　理学部　情報数理学科
Department of Mathematical Sciences, Tokai University

1　はじめに

本稿では，安定理論の枠組みでザリスキー幾何の議論を展開した場合の諸結果について考察する．正標数の分離閉体の理論が安定 (stable) であることはよく知られている．この理論において，薄い (thin) 極小 (minimal) タイプがザリスキー・タイプになることは Hrushovski [Hr96] が示した．ザリスキー・タイプの定義等については [Hr96, It02, It03] を参照してもらうことにして，ここではザリスキー・タイプが定義するザリスキー型の幾何に関して，

1. 局所モジュラーでない場合，代数的閉体を定義すること
2. ザリスキータイプから定義される代数的閉体に関して Bézout の定理と一般化された Chow の定理が成り立つこと
3. ザリスキー幾何の主定理がなりたつこと

の 3 点について確認する．ザリスキー幾何の議論の核心部である，indiscenible array，特殊化 (specialization)，群図表，体図表については，2004 年 3 月 1～5 日に行った共同研究「正標数ザリスキー幾何の研究」の講究録で詳述の予定であるのでここでは書かない．

2　弱完備性とその帰結

ザリスキー幾何の理論を用いて構成された体が代数的閉体になることを示すには，まず「弱完備性」を示し，この弱完備性から体が代数的に閉じていることを示す．ザリスキータイプから体を構成した段階では，代数的閉体になっているかどうか不明であることに注意しよう．

ザリスキー幾何の議論では 2 種類の位相概念が混在することに留意することが肝要である．初めにあたえられたネーター位相と，代数的閉体を構成した後での代数幾何的ザリスキー位相の 2 種類である．いずれは両者が一致するすることになるが，そのことが証明されるまでは両者を区別して議論しなければならない．

次の定理 1 において「既約閉集合」および「稠密」というのは，ザリスキータイプから定まるネーター位相における意味である．

定理 1 (弱完備性) F をザリスキータイプによって定まるザリスキー幾何によって構成された体とする．X を多様体とする．$C \subset X \times \mathbb{P}^n(F)$ を既約閉集合とする．このとき $\pi(C)$ が X で稠密ならば $\pi(C) = X$ である．

次の定理の証明において，ザリスキータイプから定まる位相に関して，空間が1次元の場合,「稠密」というのは単に「無限集合」であることに注意する.

定理 2 F をザリスキー幾何によって構成された体とする．F は代数的閉体である.

証明：$f(x) \in F[x]$ を多項式とする．既約多項式の場合を考えれば充分である．$f: F \longrightarrow F$ を射と考える．f を $g: \mathbb{P}^1(F) \longrightarrow \mathbb{P}^1(F)$ へ次のように拡張する．$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ に対して，$g(t, x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}t + \cdots + a_{n-1}xt^{n-1} + a_nt^n$ を考え，$(t : x) \mapsto (t^n : g(t, x))$ とする．$t = 1$ の時を考えると $(1 : x) \mapsto (1 : g(1, x)) = (1 : f(x))$ である．また $(0 : 1) \mapsto (0 : 1)$ である．$g(F)$ が $\mathbb{P}^1(F)$ でザリスキー稠密であることを言えばよい．ところでザリスキー幾何の位相に関して $\mathbb{P}^1(F)$ を多様体と考えたとき，その部分集合がザリスキー幾何の位相に関して $A \subset \mathbb{P}^1(F)$ が稠密ということは A が無限集合であるということに他ならないから，$g(F)$ は $\mathbb{P}^1(F)$ で稠密である．よって定理1（弱完備性）から $g(F) = F$ が得られる．したがって g は上への射である.

よって $g(a) = 0$ となる $a \in \mathbb{P}^1(F)$ が存在する．f は ∞ に対しては定義されていないので $g(\infty) = \infty$ である．よって $a \neq \infty$ である．この a に対しては $f(a) = 0$ となっているので代数方程式 $f(x) = 0$ は解を持つ．したがって F は代数的に閉じている. **証明終り**

弱完備性は安定体の乗法群の連結性と，ザリスキータイプの幾何で成り立つ次元定理から導かれた．その応用として体が代数的に閉じていることを示したが，それ以外にも幾つかの重要な性質が導かれる非常に基本的な定理である.

注意 3
1. 定理2において，F の標数はザリスキー型幾何の元になっているザリスキー・タイプがどのような体の理論におけるタイプであるかによって定まる．例えば，標数 p の分離閉体におけるザリスキー・タイプの場合は，F の標数は p である.
2. ザリスキー幾何の公理とザリスキータイプの公理の比較：量記号消去に相当する公理が入っているかどうかである．ザリスキー幾何の公理 *(Z1)* は量記号消去に相当する公理であった．ザリスキータイプの公理には入っていない.
3. 定理2の議論は，ザリスキー幾何（モデル理論）とは無関係な議論である．しかし，定理1は万有構造の安定性とザリスキー幾何の性質，特に次元公式に依拠している．ここで次元公式はザリスキー幾何の公理ではなく，ザリスキータイプの公理にある次元公式を指していることに留意しなければならない.
4. 仮想元の弱い消去：ザリスキー幾何は仮想元の弱い消去を持つ．同様にザリスキータイプの幾何も仮想元の弱い消去を持つ.

3 Bézout の定理，Chow の定理

この節では，代数幾何における古典的な2つの定理と類似の定理がザリスキー幾何において成り立つことを確認する．F を豊富なザリスキー・タイプから定義される幾何によって構成される代数的閉体とする．$\mathbb{P}^2(F)$ を単に $\mathbb{P}^2$ と書く.

定義 4 *(1)* ザリスキー幾何の位相に関して既約な $\mathbb{P}^2$ の閉集合を曲線とよぶ.

(2) $C \subseteq \mathbb{P}^2$ を曲線とする．C と直線 l との交点を考えると，ほとんどすべての直線と C との交点の個数は同じである．この個数を C の次数といい，$\deg(C)$ と書く *(*代数曲線の次数と直線との交点の個数の関係の類推*)*.

3.1 射影曲線族のパラメーター空間 $\mathbb{Q}^d$ と $\mathbb{L}^d$

$\mathbb{P}^2$ における代数曲線たちの中で次数 d のものは,

$$C_d(a) = \left\{(x:y:z) : \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} a_{ij}x^iy^jz^{d-i-j} = 0\right\}$$

の形で書くことができる．ここで d 次斉次多項式の係数たちを適当な順序でならべて，各

$$a = (a_{ij} : i+j \leq d) = (\underbrace{a_{00} : a_{10} : a_{01} : a_{20} : \cdots : a_{0d}}_{(d+1)(d+2)/2\text{ 個}})$$

$\mathbb{P}^{(d+1)(d+2)/2-1}$ の点と考える ($i+j=0$ となる i, j の組合せは $i=j=0$ の 1 通り，$i+j=1$ となる i, j の組合せは 2 通り，以下 $i+j=k \leq d$ となる i, j の組合せは $k+1$ 通りである．よって $i+j \leq d$ となる i, j の組合せは全部で $1+2+\cdots+(d+1) = (d+1)(d+2)/2$ 通りある)．ここで $a, b \in \mathbb{P}^{(d+1)(d+2)/2-1}$ に対して，$a=b$ すなわち，ある $\lambda \in F\backslash\{0\}$ が存在して $a_{ij} = \lambda b_{ij}$ が各 a_{il}, b_{ij} について成り立っているとき，射影曲線 $C_d(a)$ と $C_d(b)$ は同じものであることに注意しよう．したがって

$$q(d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1$$

とおくと，$\mathbb{P}^{q(d)}$ の点を与えるごとに $\mathbb{P}^2$ の中の射影曲線が定まる．すなわち

$$C_d = \left\{((a_{ij} : i+j \leq d), (x:y:z)) : \sum a_{ij}x^iy^jz^{d-i-j} = 0\right\}$$

を考えると各 $a = (a_{ij} : i+j \leq d) \in \mathbb{P}^{q(d)}$ に対して 1 つの射影曲線 $C_d(a) \subseteq \mathbb{P}^2$ が得られる．

以後，$\mathbb{P}^{q(d)}$ を曲線 $C_d(a)$ のパラメーターの空間と見なすとき，紛らわしい記号ではあるが [HZ] にならって $\mathbb{Q}^d$ と書くことにする．$C_d \subseteq \mathbb{Q}^d \times \mathbb{P}^2$ は，定義式から明らかなように，代数的集合である．よってザリスキー幾何の位相に関しても閉集合である．

$d=1$ のとき $C_1(a)$ は直線と呼ばれる．$d \geq 2$ のとき，射影曲線 $C_d(a)$ は既約の場合と可約の場合がある．特に $\mathbb{P}^2$ における d 本の直線の和集合は

$$(a_1x + b_1y + c_1z)\cdots(a_dx + b_dy + c_dz) = 0$$

によって定義される．この集合も適当な $a \in \mathbb{Q}^d$ によって $C_d(a)$ と書くことができる．

$\mathbb{Q}^d$ の中で，この集合のように $C_d(a)$ が d 本の直線の和集合を定義するようなパラメーター a 全体を考え $\mathbb{L}^d$ とおく．$\mathbb{L}^d$ は代数的集合である．各 $(a_1 : b_1 : c_1), \cdots, (a_d : b_d : c_d)$ は $\mathbb{P}^2$ の点だから，射影空間の部分空間としての $\mathbb{L}^d$ の次元は $2d$ である．

各 $a \in \mathbb{L}^d$ に対して $C_d(a)$ は d 本の直線の和集合であるが，各直線がすべて異なるとは限らないことに注意しよう．また $c \in C_d(a)$ が 2 本以上の直線上にあるとき c を多重点と呼ぶ．$\mathbb{L}^d$ に関しては次のことが基本的である．すなわち，

> $a \in \mathbb{L}^d$ に対して曲線 $C_d(a)$ を考える．射影直線 l が $C_d(a)$ に接するのは l が $C_d(a)$ を構成する d 本の直線のうちのどれかであるか，または l が $C_d(a)$ の多重点を通る場合である．

射影空間 $\mathbb{P}^n$ やアフィン空間 $\mathbb{F}^n$ ではザリスキー幾何の次元定理が自由に使えることを思いだしておこう．

3.2 Bézout の定理

ここでは代数曲線の基本定理である Bézout の定理がザリスキー幾何でも成り立つことを示す．ザリスキー幾何における曲線 C が，代数曲線の部分集合になっていれば C 自身が代数曲線になることを主張するのが，Hrushovski の次の補題である．

補題 5 C を曲線，L を代数曲線とし，さらに $C \subseteq L$ とする．このとき C も代数曲線である．

証明： 代数曲線 L に対しそのヤコビ多様体を J_L とする．J_L は可除 (divisible) なアーベル多様体である．L を J_L に埋め込むことができるので $L \subseteq J_L$ と見なす．$g = \dim J_L$ とおく．$x \in J_L$ を一般点とすると

$$x = y_1 + \cdots + y_g, \text{ ただし } y_1, \cdots, y_g \in L$$

と書くことができる．

C を L の真部分集合とし，$\dim(L) = \dim(C) = \dim(L \backslash C) = 1$ とする．集合

$$\{y_1 + \cdots + y_g : y_1, \cdots, y_g \in C\} \text{ と } \{z_1 + \cdots + z_g : z_1, \cdots, z_g \in L \backslash C\}$$

は，J_L の部分集合で共通部分を持たない．またともに次元は g である．このことは J_L が連結でないことを意味する．ところが J_L は可除であり連結でなければならないので，矛盾してしまう．したがって $L \backslash C$ は次元 0，すなわち有限集合でなければならないので C も代数曲線である．

証明終り

準備が整ったので，ザリスキー幾何における曲線の基本定理としての Bézout の定理を紹介しよう．

定理 6 (ザリスキー幾何に対する Bézout の定理) 任意の $e \in \mathbb{Q}^d$ と任意の曲線 C に対して，もし $C_d(e) \cap C$ が有限集合ならば，

$$|C_d(e) \cap C| \leq d \cdot \deg(C)$$

である．

証明：（概略）まず C が代数曲線の部分集合の場合を考える．この場合は，上の補題 5 より，C 自身代数曲線になっている．よって代数曲線に関する通常の Bézout の定理より結論が成り立つ．

次に C が代数曲線の部分集合でない場合を考える．e^* を $\mathbb{Q}^d$ の一般点とすると，

$$|C_d(e) \cap C| \leq |C_d(e^*) \cap C|$$

であることが分かる．よって一般点 e に対して，$|C_d(e) \cap C| \leq d \cdot \deg C$ を示せば充分である．

$e' \in \mathbb{L}^d$ を一般点とする．$C_d(e')$ は d 本の一般的な線の和集合なので

$$|C_d(e') \cap C| = d \cdot \deg(C)$$

が成り立つ．よって

$$|C_d(e) \cap C| \leq |C_d(e') \cap C|$$

となっていることを示せばよい．この不等式の証明には，パラメーター空間 $\mathbb{Q}^d$ に関する補題や，特殊化に関する議論が必要なので，詳しくは [Hr96, It02] を参照されたい．

証明終り

3.3 一般化されたChowの定理

ザリスキータイプによって定まる幾何，以後ザリスキー型幾何と呼ぶ，によって構成された体をFとする．ザリスキー型幾何で量記号なしで定義可能なF^nの部分集合は，代数幾何で言う構成可能集合であることを次に示す．証明は，ザリスキー幾何の場合の証明を真似る．ザリスキー型幾何の公理には量化記号消去を保障する公理が入っていないので，単に「定義可能」な部分集合の場合を考えるのではなく，量化記号なしで定義された部分集合についてのみ考える．

代数曲線の部分集合になっているような，ザリスキー幾何の位相で既約な閉集合である曲線が代数曲線であることを保障するのが補題5 (Hrushovski の定理) であった．ザリスキー型幾何におけるBézoutの定理を応用すると，ザリスキー型幾何としての$\mathbb{P}^2(F)$の閉集合がザリスキー位相の閉集合になっていること，すなわち代数的に定義されていることが証明される．その結果を用いて，数学的帰納法により$\mathbb{P}^2(F)$の閉集合が代数的集合であることを示す．

定理 7 (一般化されたChowの定理) Fを代数的閉体とする．$\mathbb{P}^n(F)$の閉集合はザリスキー位相でも閉集合である，すなわち代数的集合である．

証明：$n=2$のとき．すべての曲線が代数曲線であることを示す．Sを曲線とする．$q(d)=(d+1)(d+2)/2-1>d\cdot\deg(S)$となるような$d$を1つ選ぶ．パラメーター$e\in\mathbb{Q}^d$をうまく選ぶと，射影曲線$C=C_d(e)$と$S$との交点の個数が少なくとも$q(d)$以上になるようにできる．よってBézoutの定理から$C\cap S$は無限集合である．これは$C\subseteq S$を意味する．Sはザリスキー型幾何の位相に関して既約閉集合だから$C=S$でなければならない．

$n\geq 3$のとき．nに関する帰納法で示す．$C\subseteq\mathbb{P}^n$を閉集合とし，$\mathbb{P}^{n-1}$に関して定理の主張は正しいと仮定する．

$\mathbb{P}^{n-2}$と同型な$H\subset\mathbb{P}^n$と，$\mathbb{P}^1$と同型な$l\subset\mathbb{P}^n$を考える．$l\times H$を$\mathbb{P}^{1+(n-2)+1(n-2)}$の部分空間と考える．$l$上の点$p$と$H$で生成される空間を$S_p$とする．$S_p$は$\mathbb{P}^{n-1}$と同型で，かつ同型写像は双正則である．$C_p=C\cap S_p$とおく．$C_p\subset\mathbb{P}^{n-1}$だから$C_p$に対して帰納法の仮定を適用すると，$C_p$が代数的集合であることが分かる．よって$C_p$は有限個の斉次多項式$f_{p,1},\cdots,f_{p,k_p}$の零点集合になっている．$p$として$l$の一般点のみを考えるので，$k_p$の値と斉次多項式の次数は$p$に依存せず決まっているとしてよい．

多項式$f_{p,m}$のi番目の係数を$a(p,m,i)$とおく．lは$\mathbb{P}^1$と同型だから，$\mathbb{P}^1$の一般点pに対して写像

$$a(\cdot,m,i):\mathbb{P}^1\ni p\longmapsto a(p,m,i)\in\mathbb{P}^1$$

を考えることができる．この写像$a(\cdot,m,i)$を$a_{m,i}$と書く．$a_{m,i}$のグラフを$\mathbb{P}^2$の中の曲線と考えると，$n=2$の場合の結果から$a_{m,i}$は$\mathbb{P}^2$の中の代数曲線である．したがって多項式の零点集合になっている．よって多項式$g_1(u,\bar{v}),\cdots,g_m(u,\bar{v})$が存在して，$S_p$の一般点$\bar{x}$に対して，

$$f_{p,m}(\bar{x})=g_m(p,\bar{x})$$

が成り立つ．よってほとんどすべての$(p,\bar{x})\in\mathbb{P}$に対して

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m} g_i(p,\bar{x})=0\right)\Longrightarrow(p,\bar{x})\in C$$

である．つまりCの部分集合C^*で，C^*は代数的集合，$rk(C^*)=\mathrm{rk}(C)$かつ$\mathrm{rk}(C\backslash C^*)<\mathrm{rk}(C)$となるものが存在する．よって$C$自身代数的集合でなければならない．　**証明終り**

4 ザリスキー幾何の主定理

定理 8 (主定理) D を豊富なザリスキータイプから定まるザリスキー型幾何とする．このとき代数的閉体 K が構成されるが，K から $\mathbb{P}^1(K)$ へ，ザリスキー全射写像 $f : D \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ が存在する．f は D において量化記号なしで定義される集合を K の代数的構成可能集合へ写す．

証明：$K \subseteq D^{\mathrm{eq}}$ なので，ザリスキー幾何が弱い意味で仮想元を消去することから，a を K の一般点とすると，

$$a \in \mathrm{acl}(d_1, \cdots, d_k)$$

となる D の元 $d_1, \cdots, d_k$ が存在する．k の値を最小にするような集合 $\{d_1, \cdots, d_k\}$ を考える．$\{d_1, \cdots, d_{k-1}\}$ を固定して議論することにして，今後 $a \in K, d \in D$ をそれぞれ一般元で $\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(d)$ が成り立っているとする．

1. D から $\mathbb{P}^1(K)$ への，定数でない射が存在する．
2. D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上への射が存在する．
3. D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上への任意の射 h に対して，有限集合 $F \subset D$ が存在して $h : (D \backslash F) \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ はザリスキー閉写像である．

の順で証明する．

(1) の証明．$C(a) \subset K$ を d の a 上の軌跡とする．$C(a)$ は有限集合だから，

$$C(a) = \{m \in K : m \text{ は多項式 } f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \text{ の解 }\}$$

となる $f(x) \in K[x]$ が存在する．$C(a)$ は，任意の自己同型 $\alpha \in \mathrm{Aut}(K/a)$ によって動かない．したがって多項式 $f(x)$ の各係数 b_i に対して $\alpha(b_i) = b_i$ である．よって $b_i \in \mathrm{dcl}(a)$．ゆえに $\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(b_0, \cdots, b_n)$．したがって $d \in \mathrm{acl}(b_0, \cdots, b_n)$ である．ゆえに $b_0, \cdots, b_n$ のすべてが $\mathrm{acl}(\emptyset)$ に属している訳ではない．これらのうちで $\mathrm{acl}(\emptyset)$ に入っていないものを b' とおく．

$H \subseteq D \times \mathbb{P}^1(K)$ を (a, b') の $\mathrm{acl}(\emptyset)$ 上の軌跡とする．H は，次元 1 の既約閉集合である．$H(a)$ は一点集合である．a は D の一般点なので，

主張：任意の $a' \in D$ に対して，$|H(a')| \leq |H(a)| = 1$ となるか，または $|H(a')|$ が無限集合となるような $a' \in D$ が存在する．

後者の場合，$|H(a')|$ が無限集合となるような a' に対して $\{a'\} \times K$ が H の既約成分となってしまい H の既約性に反する．したがって，任意の $a' \in D$ に対して $|H(a')| \leq 1$ である．つまり H は D から $\mathbb{P}^1(K)$ への部分写像である．ここで射影空間の弱完備性を用いると，任意の $a' \in D$ に対して $|H(a')| = 1$ でなければならないことがわかる．よって H は D 全体から $\mathbb{P}^1(K)$ への写像であり，したがって射である．

(2) の証明．$h : D \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ を定数でない射とする．適当な Möbius 変換 $\mathbb{P}^1(K) \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ と組み合わせることによって $0, \infty \in h(D)$ と考える．$n > |\mathbb{P}^1(K) \backslash h(D)|$ となる n をひとつ固定する．代数的閉体 K の標数 p が正の場合，n と p は互いに素であるようにとる．$\mathbb{P}^1(K) \backslash \{0, \infty\}$ のすべての元は，n 個の n 乗根を持つから，任意の $a \in \mathbb{P}^1(K)$ に対して a の n 乗根の中に $h(D)$ に入っているものが存在する．h と写像 $x \longmapsto x^n$ を組み合わせることによって D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上への射を定義することが出来る．

(3) の証明. $b \in \mathbb{P}^1(K)$ を一般点とし, $h^{-1}(b) = \{a_1, \cdots, a_m\}$ とする. F^* を $\mathrm{acl}(\emptyset)$ 上の $(b, (a_1, \cdots, a_m))$ の軌跡とする. $[D]^m = D^m/\mathrm{Sym}(m)$ とおく. D^m から $[D]^m$ への商写像を q とおく. $F = q(F^*)$ とおけば, F は $\mathbb{P}^1(K) \times [D]^m$ の既約閉集合である. さて $(b, (a'_1, \cdots, a'_m)) \in F^*$ ならば $\{a'_1, \cdots, a'_m\} = h^{-1}(b)$ なので, $q(a'_1, \cdots, a'_m) = q(a_1, \cdots, a_m)$ である. よって一般点 b に対して $|F(b)| = 1$ である. $\dim(F) = 1$ だから, (1) の証明と同様, F は部分写像 f のグラフになっている. $Y = \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{P}^1(K)$ とする. $Z = h^{-1}(Y)$ とおくと, $D \backslash Z$ は有限集合である. つまり Z は D の補-有限部分集合である. h は Z 上のザリスキー閉写像であることが次のようにして分かる.

$C \subseteq Z^k$ をザリスキー閉集合とする. $h(C)$ が閉集合であることを示す.

$$\tilde{C} = \Big\{((a_1^1, \cdots, a_m^1), \cdots, (a_1^k, \cdots, a_m^k)) \in (D^m)^k : \\ \exists \nu : \{1, \cdots, k\} \longrightarrow \{1, \cdots, m\}, (a_{\nu 1}^1, \cdots, a_{\nu k}^k) \in C\Big\}$$

とおくと, $\tilde{C}$ は閉集合である. 写像 q は閉写像だから $q(\tilde{C})$ も閉集合である.

$$S = \{s \in [D]^m : \ h \text{ は } s \text{ 上一定}\}$$

とおくと, S は $[D]^m$ の閉集合である. 一般点 b に対して $f(b) \in S$ だから, すべての点 b に対して $f(b) \in S$ である. したがって $h(C) = f^{-1}(q(\tilde{C}))$ より $h(C)$ は閉集合である. **証明終り**

参考文献

[Bo98] E. Bouscaren, *Proof of the Mordell-Lang conjecture for the function fields,* LNM 1696, Springer, 1998

[De98] F. Delon, *Separably closed fields,* LNM 1696, Springer, 1998

[Hr96] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for the function fields,* J of AMS, 1996

[HZ] E. Hrushovski, B. Zil'ber, *Zariski Geometries,* J of AMS, 1996

[It02] 板井　昌典,『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002

[It03] 板井　昌典, ザリスキータイプの幾何：豊富な幾何上での代数的閉体の構成, 京都大学数理解析研究所　講究録 1344, 1 − 6, 2003 年 10 月

[Wa97] F. W. Wagner, **Stable Groups**, Cambridge University Press, 1997