数理解析研究所講究録 1390 巻 2004 年 34-39

Near-Domain について

岡山大学理学部数学教室　　田中　克己 (Katsumi Tanaka)
Dept.of Mathematics, Faculty of Science, Okayama Univ.

1　はじめに

置換群の研究で，sharply 2-transitive group と near-domain はお互いに自分自身の中に解釈可能であることが知られている [K]. モデル理論では，Nesin らが Morley rank 有限の sharply 2-transitive group の分類をしようとした [BDN],[BN],[DN],[N1],[N2],[DN]. このとき，彼らは [BN] などで near-domain についても研究している．このノートでは，near-domain に焦点をあて，代数的およびモデル論的考察を試みる．

定義 1 (G,X) が *sharply* 2-*transitive group* とは，群 G が集合 X に作用して

$$\forall x,y,c,d\in X\exists!g\in G, gx=c \text{ かつ } gy=d.$$

が成り立つこととする．

$x\in X$ を固定する。$G_x=\{g\in G|gx=x\}$ と定める。以降，簡単のため $G_x=H$ とおく．
involution $i\in H$ を一つ選び、もう一つ別の involution $w\in H$ を選ぶ。0 を新しい定数記号で $(wi)^0=1$, $0^{-1}=0$ をみたすものとする。$\hat{H}=H\cup\{0\}$ と定義する．$h_1,h_2,h\in\hat{H}$ にたいして，

$$h_1+h_2=h \Longleftrightarrow (wi)^{h_1^{-1}}(wi)^{h_2^{-1}}\in(wi)^{h^{-1}}H$$

と加法を定義する．特に，$h\in H$ にたいして，

$$0\cdot h=h\cdot 0=0\cdot 0=0$$

と定める．

構造 $\langle\hat{H},+,\cdot,0,1\rangle$ が near-domain となる．ここで，一般に構造 $\langle D,+,\cdot,0,1\rangle$ が near-domain とは次の公理をみたすこととする．

Axiom.

ND1. $\langle D,+,\cdot,0,1\rangle$ は loop.

L1. $\forall x, 0+x=x+0$

L2. $\forall a,b\exists!x, a+x=b$

L3. $\forall a,b\exists!x, x+a=b$

ND2. $\forall a, b \;\; a+b=0 \Longrightarrow b+a=0$

ND3. $\langle D^*, \cdot, 1\rangle$ は群．ここで，$D^* = D - \{0\}$.

ND4. $\forall a \;\; 0a = a0 = 0$

ND5. $\forall a, b, c \;\; a(b+c) = ab + ac$

ND6. $\forall a, b \exists d_{a,b} \in D^* \;\; \forall x a + (b+x) = (a+b) + d_{a,b}x$

D を near-domain とする．

$$G(D) = \{(a, m) | a, m \in D, m \neq 0\}$$

とおく．$(a, m)(x) = a + mx$ という作用を考えると，$G(D)$ は $Sym(D)$ の部分群となり，$G(D)$ は D に sharply 2-transitive に作用する．実際，

- $(0, 1)$ が $G(D)$ の単位元.
- $(b, n)(a, m) = (b + na, d_{b,na}nm)$
- $(a, m)^{-1} = (-(m^{-1}a), m^{-1})$

near-domain D の標数をもって，sharply 2-transitive group $G(D)$ の標数とする．

2 Near-domain と Near-field

次に構造 $\langle K, +, \cdot, 0, 1\rangle$ が near-field とは以下の公理をみたすものとする．

Axiom

NF1. $K^+ = \langle K, +, 0\rangle$ は群

NF2. $K^* = \langle K - \{0\}, \cdot, 1\rangle$ は群

NF3. $\forall x, y, z \;\; x(y+z) = xy + xz$

NF4. $\forall x \;\; x0 = 0x = 0$

ここで注意として，

- 各 near-field は dear-domain.
- D を near-domain としたとき，

$$\begin{aligned} D \text{ は near-field} &\iff \langle D, +\rangle \text{ は群} \\ &\iff d_{a,b} = 1, \forall a, b \in D \end{aligned}$$

ところが，現状はというと，

Fact 2 *near-field* でない *near-domain* は知られていない.

そうなのです. こんなこともまだ分かっていないのです.

例 3 (Dickson near-field)
$\langle F, +, *\rangle$ を斜体とする. $\alpha : F^* \longrightarrow Aut(F^*, +, *)$ なる α にたいし, $x \cdot y = x * \alpha(x)(y)$ としたとき, $\langle F, +, \cdot, 0, 1\rangle$ は *near-field* になる.

Fact 4 [Hrushovski]
strongly minimal な near-domain は near-field である.

定義 5 *near-domain* D の核 *(kernel)* $\ker(D)$ を

$$\ker(D) = \{d \in D | (a+b)d = ad + bd \quad \forall a, b \in D\}$$

と定義する.

Fact 6 [Cherlin et al]
F を Morley rank 有限な near-field, $\ker(D)$ は無限とすると, F は代数閉体となる.

次の定理を示す前にいくつかテクニカルな補題を用意しておく. 証明の計算はそれほど難しくはない.

補題 7 *D を near-domain. 任意の $a, b, c \in D$ にたいして次が成り立つ.*

(i) $a \cdot 0 = 0$

(ii) $d_{a,0} = d_{0,a} = 1$

(iii) $a + b = d_{a,b}(b + a)$

(iv) $d_{a,a} = 1$

(v) $cd_{a,b}c^{-1} = d_{ca,cb}$

(vi) $d_{a,b}^{-1} = d_{b,a}$

(vii) $d_{a+b,b} = d_{a,b}$

(viii) $x + a = b \Rightarrow x = -a + d_{a,b}b$

定理 8 $\langle D, +, \cdot\rangle$ を *near-domain* とし, ker をその核とする. このとき,

$$\exists k \in K, \quad 1 + k \in K \Longrightarrow \langle D, +, \cdot\rangle \text{ は } nearrm\!-\!field.$$

Proof. $k, 1+k \in K$ とする.

Claim 1. $d_{k,1} = 1$

$$\begin{aligned}
1+(k+(1+k)) &= (1+k)+d_{1,k}(1+k) \\
&= (1+d_{1,k})(1+k) \\
&= (1+d_{1,k})+(1+d_{1,k})k \\
&= 1+d_{1,k}d_{d_{1,k},1}(1+d_{1,k})k \\
&= 1+d_{1,k}+(d_{1,k}+1)k \\
&= 1+(d_{1,k}+(d_{1,k}k+k)) \\
&= 1+((d_{1,k}+d_{1,k}k)+d_{d_{1,k},d_{1,k}k}k) \\
&= 1+(d_{1,k}(1+k)+d_{d_{1,k},d_{1,k}k}k) \\
&= 1+(d_{1,k}(1+k)+1\cdot d_{1,k}\cdot 1^{-1}k \\
&= 1+d_{1,k}((1+k)+k)
\end{aligned}$$

したがって,

$$k+(1+k) = d_{1,k}((1+k)+1) \tag{1}$$

また,

$$\begin{aligned}
k+(1+k) &= (k+1)+d_{k,1}+k \\
&= d_{k,1}(1+k)+d_{k,1}k \\
&= d_{k,1}((1+k)+k)
\end{aligned} \tag{2}$$

(1),(2) より,

$$(1+k)+k=0 \tag{3}$$

または,

$$d_{k,1} = d_{1,k} \tag{4}$$

(3) からは,

$$d_{k,1} = d_{-2^{-1},1} = 2\cdot d_{-1,2}\cdot 2^{-1} = 2\cdot d_{1,2}\cdot 2^{-1}$$

ここで,

$$d_{1,2} = (d_{2,1})^{-1} = (d_{1,1})^{-1} = 1^{-1} = 1$$

したがって, $d_{k,1} = 1$.
また, (4) からも $d_{k,1} = 1$ が得られる.
Claim 2. $\forall a, b \quad a+b = b+a$.

$$\forall x \in F^*, \quad 1 = xd_{k,1}x^{-1} = d_{xk,x} = xd_{1,k}x^{-1} = d_{x,xk}$$

いま，$a, b \in F^*$ で $a' = ak^{-1}$, $b' = b(1+k)^{-1}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}(a'+b')(1+k) &= a'(1+k)+b'(1+k) \\ &= a'+a'k+b \\ &= a'+a+b \\ &= a'+(a+d_{a',a}b) \\ &= a'+(a+d_{a',a'k}b) \\ &= a'+(a+b) \end{aligned} \tag{5}$$

また，

$$\begin{aligned}(a'+b')(1+k) &= (a'+b)+(a'+b')k \\ &= a'+(b'+d_{b',a}(a'+b')k) \\ &= a'+(b'+(b'+a')k) \\ &= a'+(b'+(b'+(b'k+a'k)) \\ &= a'+(b'+(b'k+a)) \\ &= a'+((b'+b'k)+d_{b',b'k}a) \\ &= a'+(b'(1+k)+a) \\ &= a'+(b+a) \end{aligned} \tag{6}$$

(5) と (6) より，

$$a+b=b+a$$

したがって，$d_{a,b}=1$ □

系 9 $\langle F,+,\cdot\rangle$ を *near-domain* とする．F の標数が 3 ならば，これは *near-field.*

Proof. $k=1$ とおく．$1+1=-1 \in K$ □

References

[BDN] A.Borovik, M.DeBonis and A.Nesin *On a class of doubly transitive ω-stable groups*, Jounal of Algebra Vol.165 No.2(1994)345-257.

[BN] A.Borovik and A.Nesin *Groups of finite Morley rank*, Oxford 1994.

[DN] F.Delahan and Ali Nesin *Sharply 2-transitive groups revisited*, Doga,The Turkish J. Math. 17(1993)70-83.

[H] Wilfrid Hodges *Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[K] William Kerby *On infinite sharply multyply transitive groups*. Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1974

[N1] Ali Nesin *On sharply n-transitive superstable groups*, J.Pure and Applied Algebra 69(1990)73-88.

[N2] Ali Nesin *Notes on sharply 2-transitive permutation groups*, Doga,The Turkish J. Math. 16(1992)39-54.

[S] S.Shelah *Stable theories*, Israel J. of Math 7(1969)187-202.

[W] F.Wagner *Stable Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 240, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.