数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 174-180

精要算法下巻　第２０問

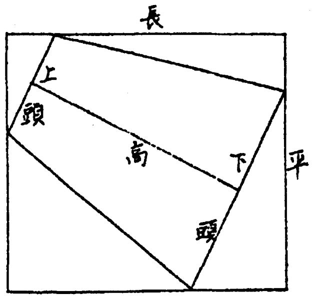
藤井康生 (Yasuo Fujii)

和算第７３号（1993年）に「精要算法下巻　第２０問」を述べた時は，解義中に載せられている,「演段品彙巻之十直中梯之適等」について，不明であった．近世歴史資料集成　第Ⅳ期　第Ⅲ巻　日本科學技術古典籍資料/數學篇[3]（科学書院）に収められている「算法演段品彙」によって考える事ができた．

第２０問　今有如圖直内容梯只云上頭下頭和一十寸高二十寸長一十九寸問平幾何
　答曰 平一十六寸
　術日置和半之得數自之以減高冪餘名天以減高冪二段餘名地置高乗長及和名人置地乗長冪内減天冪餘乗地得數以減人冪餘平方開之加人以地除之得平合問

問題　今図のように長方形（直）内に等脚台形（梯）を容れたものがある．上下底（頭）の和が１０寸，高さが２０寸，長が１９寸のとき，平はいくらか．

答え　　平＝16



術文

$$\text{高}^2-\left(\frac{\text{和}}{2}\right)^2=\text{天},\quad 2\,\text{高}^2-\text{天}=\text{地},$$
$$\text{高}\times(\text{長}\times\text{和})=\text{人}\quad \text{とし}$$
$$\text{平}=\frac{\left\{\sqrt{\text{人}^2-\{(\text{地}\times\text{長}^2-\text{天}^2)\,\text{地}\}}+\text{人}\right\}}{\text{地}}$$

解義　まず、精要算法巻之下解義（学士院蔵、藤田定資自筆本）に従っていく．「演段品彙巻之十直中梯之適等による」とあり

$$(\text{長}-\text{平})(\text{長}+\text{平})=\text{長}^2-\text{平}^2=\text{東}$$
$$\text{高}^2+\frac{(\text{下}-\text{上})^2}{4}=\text{背}^2$$
$$2\,\text{高}^2+\frac{(\text{下}-\text{上})^2}{2}-\text{上}^2-\text{下}^2=2\,\text{高}^2-\frac{(\text{上}+\text{下})^2}{2}=\frac{\text{甲}}{2}=\text{冬}$$
$$\text{長}^2-\text{上}\times\text{下}-\text{高}^2-\frac{(\text{下}-\text{上})^2}{4}+\text{平}^2=\text{長}^2-\text{高}^2-\frac{(\text{上}+\text{下})^2}{4}+\text{平}^2=\text{長}^2-\frac{\text{乙}}{4}+\text{平}^2=\text{江}$$
$$2\,\text{東}+\text{冬}=2\,\text{長}^2+\frac{\text{甲}}{2}-2\,\text{平}^2=\text{支}\quad \text{とし}$$

$\{(上+下)^2支+2冬\times江\}^2=8(上+下)^2平^2\times冬\times支 \quad \cdots\cdots(\mathrm{I})$

（I）式が直中梯之適等である．ここから後は（I）式に代入して計算している．

$(上+下)^2支+2冬\times江$

$=2(上+下)^2長^2+\dfrac{(上+下)^2}{2}甲-2(上+下)^2平^2+甲\times長^2-\dfrac{甲\times乙}{4}+甲\times平^2$

$=2(上+下)^2長^2+\dfrac{(上+下)^2甲}{2}+甲\times長^2-\dfrac{甲\times乙}{4}+\{-2(上+下)^2+甲\}平^2$

$=\{2(上+下)^2+甲\}長^2+\{\dfrac{(上+下)^2}{2}-\dfrac{乙}{4}\}甲+\{-2(上+下)^2+甲\}平^2$

$=乙\times長^2-\dfrac{甲^2}{4}+\{乙-4(上+下)^2\}平^2$

$\{(上+下)^2支+2冬\times江\}^2$

$=長^4\times乙^2-\dfrac{長^2\times乙\times甲^2}{4}+\dfrac{甲^4}{16}$

$\quad+\{2長^2\times乙^2-\dfrac{乙\times甲^2}{2}-8(上+下)^2乙\times長^2+2(上+下)^2甲^2\}平^2$

$\quad\quad+\{乙^2-8乙(上+下)^2+16(上+下)^4\}平^4=寄左$

$8(上+下)^2平^2\times冬\times支$

$=2(上+下)^2平^2\times甲(4長^2+甲-4平^2)$

$=\{8(上+下)^2甲\times長^2+2(上+下)^2甲^2\}平^2+\{-8(上+下)^2甲\}平^4$

$=\{8(上+下)^2甲\times長^2+2(上+下)^2甲^2\}平^2+\{-8(上+下)^2乙+16(上+下)^4\}平^4$

以上の計算によって未知数を平とする方程式を得る．

$長^4\times乙^2-\dfrac{長^2\times乙\times甲^2}{2}+\dfrac{甲^4}{16}$

$\quad+\{2長^2\times乙^2-\dfrac{乙\times甲^2}{2}-8(上+下)^2乙\times長^2-8(上+下)^2甲\times長^2\}平^2$

$\quad\quad+乙^2\times平^4=0 \quad \cdots\cdots(\mathrm{II})$

次に上方程式（II）を解くために，次のように左右に分けている．

$長^4\times乙^2-\dfrac{長^2\times乙\times甲^2}{2}+\dfrac{甲^2}{16}+\{2長^2\times乙^2-\dfrac{乙\times甲^2}{2}-64(上+下)^2長^2\times高^2\}平^2$

$\quad+乙^2\times平^4=0$

$右=長^4\times乙-\dfrac{長^2\times乙\times甲^2}{2}+\dfrac{甲^4}{16}+\{2乙^2\times長^2-\dfrac{乙\times甲^2}{2}\}平^2+乙^2\times平^4$

$左=-64(上+下)^2長^2\times高^2\times平^2$ （$=-左$ の事 右$=$左 と考える.）

$右=(長^2\times乙-\dfrac{甲^2}{4})^2+2(乙\times長^2-\dfrac{甲^2}{4})乙\times平^2+(乙\times平^2)^2$

$=\{(長^2\times乙-\dfrac{甲^2}{4})+乙\times平^2\}^2$

$\sqrt{右}=長^2\times乙-\dfrac{甲^2}{4}+乙\times平^2$

$\sqrt{左}=8(上+下)長\times高\times平 \quad (\sqrt{右}-\sqrt{左}=0)$

ここで，平の二次方程式（III）を得る．

$$長^2 \times 乙 - \frac{甲^2}{4} - 8(上+下)長 \times 高 \times 平 + 乙 \times 平^2 = 0 \quad \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

$$高^2 - \frac{(上+下)^2}{4} = 角 \quad 4角 = 甲$$

$$高^2 + \frac{(上+下)^2}{4} = 亢 \quad 4亢 = 乙 \quad とし$$

$$4長^2 \times 亢 - 4角^2 - 8(上+下)長 \times 高 \times 平 + 4亢 \times 平^2 = 0$$

$$\frac{長^2 \times 亢}{2} - \frac{角^2}{2} - (上+下)長 \times 高 \times 平 + \frac{亢 \times 平^2}{2} = 0 \quad としている.$$

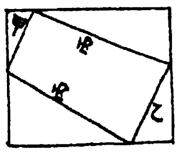
術文では角を天，亢を地，方級を人としている．

算法演段品彙　近世歴史資料集成　第Ⅳ期　第Ⅲ巻　日本科學技術古典籍資料/數學篇[3]（科学書院）に収められている「算法演段品彙」（p254〜p255）に次の問題が載せられている．

今有直内斜容梯甲若干乙若干丙各若干長平差若干問平

術日立天元一為平加差為長加平以差乘名日東　丙冪二段内併減甲冪乙冪餘名日冬　列併長冪平冪内併減甲因乙與丙冪餘名江　倍東加冬名日支　列併甲乙和冪因支與冬因江二段共得数自乘之寄左　列甲乙和冪因平冪因支八段與寄左相消得三乘方也

問題　今長方形（直）内に等脚台形（梯）を斜めに内接するように容れたものがある．甲，乙，丙，長－平（長平差）が与えられたとき，平を求めよ．



術文

平を未知数とする．(天元の一を平とする.)

$$平 + 差 = 長 \ , \ (長 + 平)差 = 東$$

$$2丙^2 - (甲^2 + 乙^2) = 冬 \ , \ 長^2 + 平^2 - (甲 \times 乙 + 丙^2) = 江 \ , \ 2東 + 冬 = 支とし$$

$$\{(甲+乙)^2支 + 2冬 \times 江\}^2 = 8(甲+乙)^2平^2 \times 冬 \times 支$$

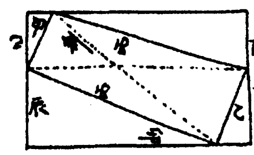
演段　本文に従って述べる．

$$子 : 乙 = 巳 : 甲 \quad より \quad 子 \times 甲 = 乙 \times 巳 \quad となる.$$

次に

$$平 \times 乙 - 甲 \times 子 = 平 \times 乙 - 乙 \times 巳 = 乙(平 - 巳) = 乙 \times 辰 \quad より$$

$$乙 \times 子 - (平 \times 乙 - 甲 \times 子) = 乙(子 - 辰)$$



$$\{-平 \times 乙 + (甲+乙)子\}^2 = 乙^2(子 - 辰)^2 = 寄左$$

$$= 平^2乙^2 - 2(甲+乙)平 \times 乙 \times 子 + (甲+乙)^2子^2$$

$$次に,\ 甲 \times 乙 + 丙^2 = 斜^2$$

$$斜^2 - 長^2 = (子 - 辰)^2 \quad より$$

$$乙^2(斜^2 - 長^2) = (丙^2 + 甲 \times 乙 - 長^2)乙^2$$

$= 丙^2 \times 乙^2 + 甲 \times 乙^3 - 長^2 \times 乙^2 =$ 寄左

子，平を未知数とする二次方程式（前式）を得る．

$(平^2 \times 乙^2 + 長^2 \times 乙^2 - 丙^2 \times 乙^2 - 甲 \times 乙^3)$

$\quad -2(甲 + 乙)平 \times 乙 \times 子 + (甲 + 乙)^2 子^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(前式)$

$乙^2 - 子^2 = 寅^2$

$斜^2 - 平^2 = (未 - 寅)^2 = 丙^2 + 甲 \times 乙 - 平^2$

$平 - 子 = 丑$ ， $丙^2 - 丑^2 = 未^2$ より

$丙^2 - (平 - 子)^2 = 丙^2 - 平^2 + 2子 \times 平 - 子^2 = 未^2$

$未^2 - 寅^2 - (未 - 寅)^2 = 2寅(未 - 寅)$

$= \{(丙^2 - 平^2) + 2平 \times 子 - 子^2\} - (乙^2 - 子^2) - (丙^2 + 甲 \times 乙 - 平^2)$

$= 2平 \times 子 - 乙^2 - 甲 \times 乙 = (-乙^2 - 甲 \times 乙) + 2平 \times 子$

$\{2寅(未 - 寅)\}^2 = 4寅^2(未 - 寅)^2 = \{(-乙^2 - 甲 \times 乙) + 2平 \times 子\}^2$

$= 乙^2(甲 + 乙)^2 - 4平 \times 乙(甲 + 乙)子 + 4平^2 \times 子^2 =$ 寄左

次に

$4寅^2(未 - 寅)^2 = 4(乙^2 - 子^2)(丙^2 + 甲 \times 乙 - 平^2)$

$= -4乙^2 \times 平^2 + 4丙^2 \times 乙^2 + 4甲 \times 乙^3 + (4平^2 - 4丙^2 - 4甲 \times 乙)子^2 =$ 寄左

子，平を未知数とする二次方程式（後式）を得る．

$(甲 + 乙)^2乙^2 - 4乙^2 \times 丙^2 + 4乙^2 \times 平^2 - 4甲 \times 乙^3 - 4平 \times 乙(甲 + 乙)子$

$\qquad + (4丙^2 + 4甲 \times 乙)子^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(後式)$

次に（前式）（後式）から子を消去することによって，平を未知数とする方程式を得る．

(後式) − 2(前式)

$-2長^2 \times 乙^2 + 2平^2 \times 乙^2 - 2乙^2 \times 丙^2 - 2甲 \times 乙^3 + (甲 + 乙)^2乙^2$

$\quad + \{4丙^2 + 4甲 \times 乙 - 2(甲 + 乙)^2\}子^2 = 0$

$2(甲 + 乙)^2 - 4甲 \times 乙 = 2甲^2 + 2乙^2 \qquad 冬 = 2丙^2 - (甲^2 + 乙^2)$

$長^2 - 平^2 = (差 + 平)^2 - 平^2 = 差^2 + 2平 \times 差 = 東$

$-2東 \times 乙^2 - 冬 \times 乙^2 + 2冬 \times 子^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(変後式)$

$直斜^2 = 長^2 + 平^2 \qquad 直斜^2 - 斜^2 = 江 = 長^2 + 平^2 - 丙^2 - 甲 \times 乙$

$江 \times 乙^2 - 2(甲 + 乙)平 \times 乙 \times 子 + (甲 + 乙)^2子^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(前式)$

$(甲 + 乙)^2 \times (変後式) - 2冬 \times (前式)$

$-2東(甲 + 乙)^2乙^2 - 冬(甲 + 乙)^2乙^2 - 2江 \times 冬 \times 乙^2 + 4冬 \times 平(甲 + 乙)乙 \times 子 = 0$

$-2東(甲 + 乙)^2 - 冬(甲 + 乙)^2 - 2江 \times 冬 + 4冬 \times 平(甲 + 乙)\left(\frac{子}{乙}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots(一式)$

$\{-2(甲 + 乙)乙 \times 平\} \times (変後式) \div 乙^3 + \left(\frac{子}{乙}\right) \times (一式)$

$$4東\times平(甲+乙)+2冬\times平(甲+乙)-2東(甲+乙)^2\left(\frac{子}{乙}\right)$$
$$-冬(甲+乙)^2\left(\frac{子}{乙}\right)-2江\times冬\left(\frac{子}{乙}\right)=0$$
$$\{4東\times平(甲+乙)+2冬\times平(甲+乙)\}$$
$$+\{-2東(甲+乙)^2-冬(甲+乙)^2-2江\times冬\}\left(\frac{子}{乙}\right)=0 \quad \cdots\cdots(二式)$$

(一式), (二式) によって,

$$\{2東(甲+乙)^2+冬(甲+乙)^2+2江\times冬\}^2=8冬\times平^2(甲+乙)^2(2東+冬)$$

を得る.

注（解伏題における換式について）

上記 (変後式), (前式) より子を消去する方法は，解伏題における換式を用いる方法である.

以下に概説する. 2次式の時,

$ax^2+bx+c=0$ …①

$a'x^2+b'x+c'=0$ …②

より，換式を求める.

①$\times a'-$②$\times a$

$(a'b-ab')x+(a'c-ac')=0$ …③

①$\times b'-$②$\times b+$③$\times x$

$(a'c-ac')x+(b'c-bc')=0$ …④

上記③，④式が換式である. この2式より，維（斜）乗によってxを消去している.

$(a'b-ab')(b'c-bc')-(a'c-ac')^2=0$ …⑤

本問では（前式）,（後式）から⑤式を導かずに（変後式）を導いてから⑤式を導いている所に特徴がある.

次に3次式の時,

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ …①

$a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$ …②

より，換式を求める.

①$\times a'-$②$\times a$

$(a'b-ab')x^2+(a'c-ac')x+(a'd-ad')=0$ …③

①$\times b'-$②$\times b+$③$\times x$

$(a'c-ac')x^2+(a'd-ad'b'c-bc')x+(b'd-bd')=0\ \cdots$④

①$\times c'-$②$\times c+$④$\times x$

$(a'd-ad')x^2+(b'd-bd')x+(c'd-cd')=0\ \cdots$⑤

上記③，④，⑤式が換式である．①，②式の x^3, x^2, x の項を順に消去していくことによって，換式を導いている．

①，②式の終結式を変形する．

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}$$

(第１行) $\times a'-$ (第４行) $\times a$, とする．

$$\begin{vmatrix} 0 & a'b-ab' & a'c-ac' & a'd-ad' & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}$$

(第１行) $+$ (第２行) $\times c'-$ (第５行) $\times c$, とする．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'c-ac' & a'd-ad'b'c-bc' & b'd-bd' & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}$$

(第１行) $+$ (第３行) $\times c'-$ (第６行) $\times c$, とする．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a'd-ad' & b'd-bd' & c'd-cd' \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}$$

次に同様の計算を（第２行）と（第５行），（第３行）と（第６行）について行う．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a'd-ad' & b'd-bd' & c'd-cd' \\ 0 & 0 & 0 & a'c-ac' & a'd-ad'b'c-bc' & b'd-bd' \\ 0 & 0 & 0 & a'b-ab' & a'c-ac' & a'd-ad' \\ a' & b' & c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}$$

ここで，

$$\begin{vmatrix} a'd-ad' & b'd-bd' & c'd-cd' \\ a'c-ac' & a'd-ad'b'c-bc' & b'd-bd' \\ a'b-ab' & a'c-ac' & a'd-ad' \end{vmatrix}$$

は，関の換式の係数からなる行列式である．

まとめ　上記演段によって，精要算法の解義中に述べられている冬，江，支は計算上，置いたものにすぎない事，及び解義中にＩ式を用いた事がわかる．

本問を直接解く事や，後世の和算家がどのようにして解いたかについては，和算第７３号（1993年）に述べたので，省略する．

『林鶴一博士和算研究集録上巻』「24 長谷川派ノ變形術ニ就テ」p778～780

『幕末の偉大なる数学者・その生涯と業績』多賀出版 p283～288

など，演段品彙巻之十直中梯之適等に触れていない事は注意すべき事である．

本問では，上底と下底の和が与えられている所が特徴であり，上底，下底は本問からは定まらない．このことを利用して，上底＝0　下底＝上底＋下底 の三角形に変形したものが変形術で扱われている．