数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 181-185

和算における開平術について

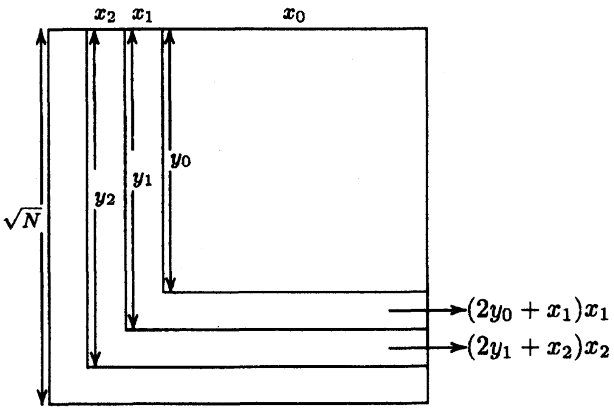
東大寺学園　小寺　裕 (Hiroshi Kotera/Todaijigakuen Highschool)

Abstract

昨年度，土倉 [1] で和算の開平における零約術と Pell 方程式の関係を現代数学的に論じられた．本稿では和算家による開平法の考え方を帯縦開平から零約術まで紹介し，会田安明「算法零約術」における会田自身の術を考察することを目的とする．

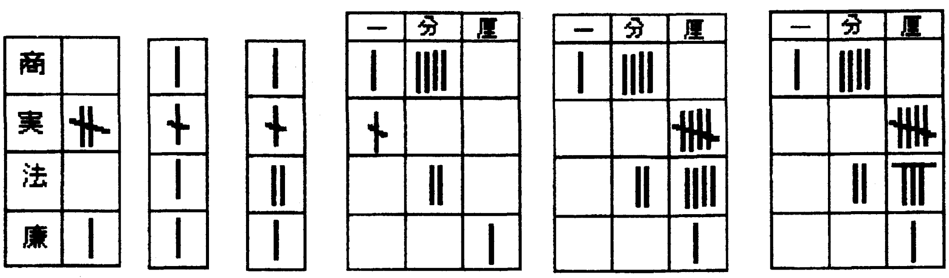
1　帯縦開平法

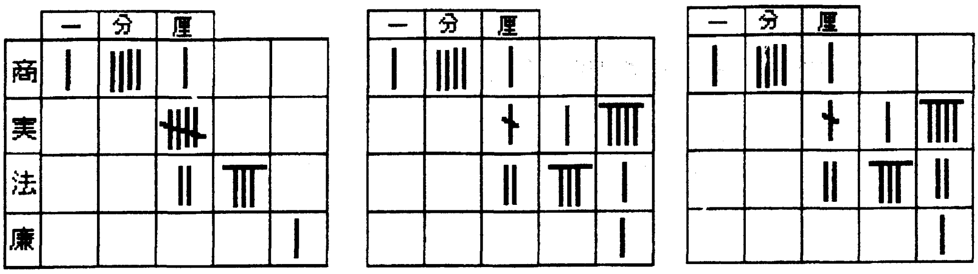
和算における開平法で最も基本的な術は，和算初期の頃から行われていた帯縦開平である．$\sqrt{N}$ を帯縦開平で求めるには，面積が N の正方形の一辺の長さを一桁ずつ求めていくのである．初商 x_0，次商 x_1，三商 x_2 とし，$y_0 = x_0$，$y_1 = y_0 + x_1$，$y_2 = y_1 + x_2$，$\cdots\cdots$ とする．



2　天元術

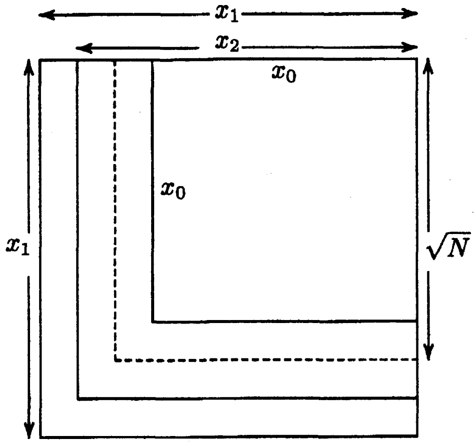
$\sqrt{2}$ を天元術で求める方法を以下に示しておく．理屈は $x^2 - 2 = 0$ を組み立て除法で解くのであるが，和算家は帯縦開平と同じように考えていたと思われる．詳しくは小寺 [2] で論じた．





3　和算における Newton 近似

川井久徳「開式新法」(1805) や小野以正「啓廸算法指南大成」(1855) では Newton 近似と同じ algorithm による開平法が示されているが，それは下図を使って帯縦開平の応用として求めたのである．



$$x_1 = \frac{N - {x_0}^2}{2x_0} + x_0 = \frac{{x_0}^2 + N}{2x_0}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{{x_1}^2 - N}{2x_1} = \frac{{x_1}^2 + N}{2x_1}$$

このようにして作った漸化式

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + N}{2x_{n-1}} \cdots ①$$

によって得られる x_n が $\sqrt{N}$ に収束すると考えた．

「開式新法」の付録には$\sqrt{2}$ を求める以下のような術文ものっている．

> 術曰置二個為甲法加一個為甲実．甲実法相乗倍之為乙法置甲実自之倍之内減一個除為乙実．
> 於是以乙実法換甲実法求丙実法他倣之，其実如其法而一得数乗方面得斜合問．

解法は示してないが，次のように考えたと推測する．まず $\sqrt{2}$ を ① で近似していくと

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{17}{12},\ x_3 = \frac{577}{408},\ x_4 = \frac{665857}{470832} \cdots$$

で $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ とおくとき

$$a_n^2 = 2b_n^2 + 1 \cdots ②$$

の関係を見抜いた．このとき

$$x_{n+1}=\frac{{x_n}^2+2}{2x_n}=\frac{\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2+2}{2\cdot\dfrac{a_n}{b_n}}=\frac{2{a_n}^2-1}{2a_nb_n}$$

よって

$$③\begin{cases}a_{n+1}=2{a_n}^2-1\\ b_{n+1}=2a_nb_n\end{cases}$$

これが「開式新法」の術文である．従って，${a_1}^2-2{b_1}^2=1$ をみたす $\frac{a_1}{b_1}$ を一つ見つけておけば ③ の漸化式で出来る $\frac{a_n}{b_n}$ について $\frac{a_n}{b_n}\to\sqrt{2}$ がいえる．そこで，会田安明は「算法零約術坤之巻」で ${a_1}^2-N{b_1}^2=1\cdots④$ をみたす整数を $N\leqq 29$ に対して求めたのである．

4 会田安明の零約術

まず

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\quad のとき\quad \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

を利用して $\sqrt{2}$ の分数表示をし，真の値より小さいものを少率，大きいものを多率とよぶ．

少率	$\frac{1}{1}$	1
多率	$\frac{3}{2}$	1.5
少率	$\frac{4}{3}$	1.33
少率	$\frac{7}{5}$	1.4
多率	$\frac{10}{7}$	1.42
多率	$\frac{17}{12}$	1.416
少率	$\frac{24}{17}$	1.411
少率	$\frac{41}{29}$	1.413
多率	$\frac{58}{41}$	1.4146
多率	$\frac{99}{70}$	1.41428

多率に注目すると

$$\frac{3}{2}\quad\frac{10}{7}\quad\frac{17}{12}\quad\frac{58}{41}\quad\frac{99}{70}\quad\frac{338}{239}\quad\frac{577}{408}\quad\frac{1970}{1393}\quad\frac{3363}{2378}\quad\cdots\quad\frac{a_n}{b_n}$$

ここで次の規則を発見した．

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{4a_1-2}{4b_1-1}\quad\frac{a_3}{b_3}=\frac{2a_2-a_1}{2b_2-b_1}\quad\frac{a_4}{b_4}=\frac{4a_3-a_2}{4b_3-b_2}\quad\frac{a_5}{b_5}=\frac{2a_4-a_3}{2b_4-b_3}\quad\cdots$$

奇数項に着目すると

$$\frac{3}{2}\quad\frac{17}{12}\quad\frac{99}{70}\quad\frac{577}{408}\quad\frac{3363}{2378}\quad\cdots\quad\frac{a_n}{b_n}$$

ここで次の規則を発見した．

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{6a_2-a_1}{6b_2-b_1}\quad\frac{a_4}{b_4}=\frac{6a_3-a_2}{6b_3-b_2}\quad\frac{a_5}{b_5}=\frac{6a_4-a_3}{6b_4-b_3}\quad\cdots$$

さらに 1，3，7，15，$\cdots$，2^k-1 項目に着目して

$$\frac{3}{2}\quad\frac{17}{12}\quad\frac{577}{408}\quad\frac{665857}{470832}\quad\cdots\quad\frac{a_n}{b_n}$$

より上記 ③ にあたる次の規則を発見した.

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{2{a_1}^2-1}{2a_1b_1}\qquad \frac{a_3}{b_3}=\frac{2{a_2}^2-1}{2a_2b_2}\qquad \frac{a_4}{b_4}=\frac{2{a_3}^2-1}{2a_3b_3}\qquad \cdots$$

会田はこの後坤之巻で $\sqrt{N}$ $(N \leqq 97)$ の連分数展開をしている.

5 連分数展開

- $\sqrt{2}$ の連分数展開

$$\frac{3}{2}\ \frac{7}{5}\ \frac{17}{12}\ \frac{41}{29}\ \frac{99}{70}\ \frac{238}{169}\ \frac{577}{408}\ \frac{1393}{985}\ \frac{3363}{2378}\ \frac{8118}{5741}\ \frac{19601}{13860}\ \frac{47321}{33461}\ \frac{114243}{80782}\ \frac{275807}{195025}\ \frac{665857}{470832}$$

会田は，この数列の第 1，3，7，15，$\cdots$ をとれば ③④ が成り立つことを確認し，このことは $N=$ 2，3，5，11 まで成り立つことを示した．しかし，$N=7$ では成り立たない.

- $\sqrt{7}$ の連分数展開

$$\frac{3}{1}\ \frac{5}{2}\ \frac{8}{3}\ \frac{34}{14}\ \frac{45}{17}\ \frac{82}{31}\ \frac{127}{48}\ \frac{590}{223}\ \frac{717}{271}\ \frac{1307}{494}\ \frac{2024}{765}\ \frac{9403}{3554}\ \frac{11427}{4319}\ \frac{20830}{7873}\ \frac{32257}{12192}\ \frac{149858}{56641}$$

$a_1=3$, $b_1=1$ は ${a_1}^2-7{b_1}^2=1$ をみたさない．しかし，$\frac{8}{3}$ を初項，$\frac{127}{48}$ を第 2 項，$\frac{32257}{12192}$ を第 3 項とすれば③④が成り立つと述べている．この後は $N=17$ のとき $N=2$ と同じ術が使える.

- $\sqrt{13}$ の連分数展開

$$\frac{4}{1}\ \frac{7}{2}\ \frac{11}{3}\ \frac{18}{5}\ \frac{119}{33}\ \frac{137}{38}\ \frac{256}{71}\ \frac{393}{109}\ \frac{649}{180}\ \frac{4287}{1189}\ \frac{4936}{1369}\ \frac{9223}{2558}\ \frac{14159}{3927}\ \frac{23382}{6485}\ \frac{154451}{42837}\ \frac{177833}{49322}\ \frac{332284}{92159}$$

$$\frac{510117}{141481}\ \frac{842401}{233640}\ \frac{5564523}{1543321}$$

$a_1=4$, $b_1=1$ は ${a_1}^2-13{b_1}^2=1$ をみたさない．しかし，$\frac{649}{180}$ を初項，$\frac{842401}{233640}$ を第 2 項とすれば③④が成り立つと述べている.

会田はこのようにして $N=19$, 23, 29 まで③④の確認をしている．ただし，連分数展開は $N=97$ までやっている.

6 まとめ

関孝和の零約術によると $\sqrt{2}$ は

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{5},\ \frac{9}{6},\ \frac{10}{7},\ \cdots$$

すなわち，分母には 1 を加え，分子には多率のときは 1 を加え，少率のときは 2 を加える．関より会田の方が収束も速い．会田は関の零約術を知ってはいたが，それとは別に関流への対抗意識から独自の術を開発し，目的は $\sqrt{N}$ を求める統一的な algorithm を作ることであった．その副産物として Pell 方程式の解も見つかっていったのである.

会田に限らず和算家は数値を眺めて規則を発見していったのであり，このような力量は注目に値する.

参考文献

[1] 土倉　保：自然数の開平とペル方程式，京大数理解析研究所講究録 1317 (2003)

[2] 小寺　裕：天元術の algorithm 生成過程についての考察，数学史研究 163 号，日本数学史学会 (1999)

[3] 会田安明：『算法零約術』　日本学士院蔵