数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 197-208

関孝和の冪乗和について

東京理科大学大学院理学研究科　小出　浩貴 (Hirotaka Koide)
Tokyo Univercity of Science　Graduate School of Science

関孝和が残した偉大な業績のひとつに、冪乗和の公式を発見したことがある。冪乗和は、

$$\sum_{x=1}^{k} x^p = 1^p + 2^p + \cdots + k^p \tag{1}$$

という級数の和で表され、一般的な公式として、

$$(p+1)\sum_{x=1}^{k} x^p = b_0\binom{p+1}{0}k^{p+1} + b_1\binom{p+1}{1}k^p + \cdots + b_p\binom{p+1}{p}k \tag{2}$$

という形で書き表されている。ここで b_i は今日 Bernoulli 数と呼ばれている定数である。

この理論については、彼の書「括要算法・元巻」([4]) や「大成算經・巻之五」([1]) に述べられている。「大成算經」においてこの理論は次のように展開されている。

1. まず、二項係数を用いて $(k+1)^{p+1}-1$ を計算する。

2. 次に、

$$p+1 = b_0\binom{p+1}{0} + b_1\binom{p+1}{1} + \cdots + b_p\binom{p+1}{p}$$

という式によって、$p=1$ から順に係数 b_i を求める。この係数を取数と呼んでいる。これは b_1 の符号を除いて Bernoulli 数と一致する。

3. この b_i を用いて、

$$(p+1)\sum_{x=1}^{k} x^p = b_0\binom{p+1}{0}k^{p+1} + b_1\binom{p+1}{1}k^p + \cdots + b_p\binom{p+1}{p}k$$

と求めることができる。

しかし、どうしてこの式を使えば冪乗和を計算することができるのか、ということについては全く触れられていない。そこで今回は、それについての一考察を与える事とする。

まずは、先行研究について触れてみたい。この理論については多くの人によって研究されているが、その中で四つ研究について紹介したい。

1. 竹之内脩氏の研究より

竹之内氏は以下のような手法を用いて冪乗和を求めたという研究 ([3]) を発表している。

(a) 衰垜より方垜（冪乗和）の p が 1 から 6 まで構成できる。
ここにある衰垜とは、大成算經中には以下の説明が与えられている。
「層毎次逐并数者、日衰垜」（毎次逐って并数を層ぬるは曰く衰垜）
これはつまり、次のような階乗関数の和を考えている。

$$\sum_{x=1}^{k} 1 = k$$

$$\sum_{u=1}^{k}(\sum_{x=1}^{k} 1) = \frac{1}{2}k(k+1)$$

$$\sum_{v=1}^{k}(\sum_{u=1}^{v}(\sum_{x=1}^{u} 1)) = \frac{1}{3!}k(k+1)(k+2)$$

(b) これと二項係数表を用いて、初めのほうの乗数（いわゆる Bernoulli 数）を決定する。

(c) この乗数を、二項係数表を使って関係を明らかにし、関係式を特定して残りの乗数（Bernoulli 数）を決定する。

(d) 項数（底子）を 3 として検算する。（これが最初に与えられた問題に当たる）

2. Jacob Bernoulli の「Ars Conjectandi」より
これは先行研究ではないのだが、関と同時代にこの冪乗和の一般式を独自に発見した。

(a) 二項係数表を使って三角数，ピラミッド数等を求める（これは関が言うところの衰垜にあたる）

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

この表の左から 3 列目に現れる数列を三角数、4 列目に現れる数列をピラミッド数という。

(b) ここで、三角数について、

- 第3項までについて

$$\frac{0+0+1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

- 第4項までについて

$$\frac{0+0+1+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{3}$$

- 第5項までについて

$$\frac{0+0+1+3+6}{6+6+6+6+6}=\frac{1}{3}$$

と考えていく。ピラミッド数についても

- 第4項までについて

$$\frac{0+0+0+1}{1+1+1+1}=\frac{1}{4}$$

- 第5項までについて

$$\frac{0+0+0+1+4}{4+4+4+4+4}=\frac{1}{4}$$

他の列についても同じようにして考えていくと、ある一定の比が出てくる。これを利用して三角数・ピラミッド数の級数和を求める。それより冪乗和を計算する。

3. 平山諦氏他　「関孝和全集」より

p 次の方垜式を $p+1$ 次の多項式として、その係数を補間法（大成算經では畳乗法と呼んでおり、方程と累裁という方法が紹介されている）によって求めるとある。

つまり、例えば $\displaystyle\sum_{x=1}^{k} x^4$ を計算するときには、

$$\sum_{x=1}^{k} x^4 = a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 + a_5k^5$$

という5次の多項式であるとして、これが左辺を直接計算で求めた結果、

(1,1),(2,17),(3,98),(4,354),(5,979)

という‘点’を通るということより、補間法によって定数係数を決定しているとしている。

しかし、大成算經の垜積法の解説には次のような文章がある。

「據畳乗法而起術繁多故別立一般之捷法而解之而已」(畳乗法據り術を起こすは繁多故に、別に一般の捷法を立てて之を解くのみ)

ここから推測するに、この方法は検算程度では使用した可能性があるが、この論で冪乗和を発見・証明したとは思い難い。

4. 加藤平左エ門氏の研究 ([5],[6]) より

$$
\begin{aligned}
(k+1)^{p+1}-k^{p+1} &= \binom{p+1}{1}k^p+\binom{p+1}{2}k^{p-1}+\cdots+\binom{p+1}{p+1}1,\\
k^{p+1}-(k-1)^{p+1} &= \binom{p+1}{1}(k-1)^p+\binom{p+1}{2}(k-1)^{p-1}+\cdots+\binom{p+1}{p+1}1,\\
&\vdots\\
2^{p+1}-1^{p+1} &= \binom{p+1}{1}1^p+\binom{p+1}{2}1^{p-1}+\cdots+\binom{p+1}{p+1}1,
\end{aligned}
$$

これらの両辺を足し合わせると、

$$(k+1)^{p+1}-1^{p+1}=\binom{p+1}{1}\sum_{x=1}^{k}x^p+\binom{p+1}{2}\sum_{x=1}^{k}x^{p-1}+\cdots+\binom{p+1}{p+1}\sum_{x=1}^{k}1$$

となることより、

$$(p+1)\sum_{x=1}^{k}x^p=(k+1)^{p+1}-1^{p+1}-\binom{p+1}{2}\sum_{x=1}^{k}x^{p-1}-\cdots-\binom{p+1}{p+1}\sum_{x=1}^{k}1, \quad (3)$$

これより、$p-1$ 次までの結果が分かれば p 次の冪乗和を計算することができる。

この方法が一番自然な求め方のように思えるが、$p-1$ 次までの冪乗和を代入するに当たって、分数式を用いなければならないために、式が繁多となる。又小さい乗数を計算するにはこの方法で問題がないのだが、一般の場合、二項係数と階乗の関係が知られていなかったことを考えると、当時いかに天才といわれた関であってもここまで完全に計算をやり遂げたと考えにくい。

以上の先行研究をもとに、どのようにして関が冪乗和を発見したかについて推測してみたい。

最初に述べたように、関の計算は

$$(k+1)^{p+1}-1^{p+1}=\binom{p+1}{0}k^{p+1}+\binom{p+1}{1}k^p+\cdots+\binom{p+1}{p}k \quad (4)$$

から始まっているので、これらを書き下していくと、

$$
\begin{aligned}
(k+1)^{p+1}-1^{p+1} &= \binom{p+1}{0}k^{p+1}+\binom{p+1}{1}k^{p}+\cdots+\binom{p+1}{p}k \\
(k+1)^{p}-1^{p} &= \binom{p}{0}k^{p}+\binom{p}{1}k^{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}k \\
&\vdots \\
(k+1)^{2}-1^{2} &= \binom{2}{0}k^{2}+\binom{2}{1}k
\end{aligned}
$$

となる。これらの式を、(3) 式

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{k}1 &= \underline{(k+1)-1} \\
2\sum_{x=1}^{k}x &= \underline{(k+1)^2-1}-\binom{2}{2}\sum_{x=1}^{k}1 \\
&\vdots \\
p\sum_{x=1}^{k}x^{p-1} &= \underline{(k+1)^p-1}-\binom{p}{2}\sum_{x=1}^{k}x^{p-2}-\cdots-\binom{p}{p}\sum_{x=1}^{k}1 \\
(p+1)\sum_{x=1}^{k}x^{p} &= \underline{(k+1)^{p+1}-1}-\binom{p+1}{2}\sum_{x=1}^{k}x^{p-2}-\cdots-\binom{p+1}{p+1}\sum_{x=1}^{k}1
\end{aligned}
$$

の下線部に代入して、帰納的に考察した結果、関は最後の式は (4) 式の右辺の各項にある定数をかけた、

$$
(p+1)\sum_{x=1}^{k}x^{p}=b_0\binom{p+1}{0}k^{p+1}+b_1\binom{p+1}{1}k^{p}+\cdots+b_p\binom{p+1}{p}k
$$

という形に書き表せる事に気付いたのではないかと私は推測する。

そこで、以下この式がすべての p 並びに k について正しいことを、当時の知識だけから立証できることを示して、私の推測の根拠にしたい。
まず、$b_0=1$ として $p=0$ の場合は、

$$
\sum_{x=1}^{k}1=(k+1)-1=k=b_0\binom{1}{0}k
$$

と考えることにする。次に $p=1$ の場合について

$$2\sum_{x=1}^{k} x = (k+1)^2 - 1 - \binom{2}{2}\sum_{x=1}^{k} 1$$

$$= \binom{2}{0}k^2 + \binom{2}{1}k - \binom{2}{2}b_0\binom{1}{0}k$$

$$= k^2 + \left\{2 - \binom{2}{0}b_0\right\}k$$

とここまで計算することができる。そこで、先ほどの推測式に $k=1$ を代入した多項式、つまり

$$p+1 = b_0\binom{p+1}{0} + b_1\binom{p+1}{1} + \cdots + b_p\binom{p+1}{p}$$

の $p=1$ の場合を上の式の中括弧の中にあてはめると

$$2\sum_{x=1}^{k} x = k^2 + 2b_1 k$$
$$= b_0\binom{2}{0}k^2 + b_1\binom{2}{1}k$$

となり、すべての k について公式が成り立つことが分かる

ここで $p=2,3.\cdots$ の場合も、先程でてきた $k=1$ の式、

$$p+1 = b_0\binom{p+1}{0} + b_1\binom{p+1}{1} + \cdots + b_p\binom{p+1}{p} \tag{5}$$

を用いて b_p を求めており、竹之内氏もこの式を定義式として位置づけている。また、Bernoulli も同様である。これを b_p の定義式と考えていきたい。

関の時代に数学的帰納法があったわけではない。また、bernoulli の帰納法は完全ではないが、ここでは、k の場合に成り立ったとして $k+1$ の場合を考察する。
まずは、$p=1$ の場合、

$$2\sum_{x=1}^{k} x = b_0\binom{2}{0}k^2 + b_1\binom{2}{1}k$$

が成り立つとして

$$2\sum_{x=1}^{k+1} x = b_0\binom{2}{0}k^2 + b_1\binom{2}{1}k + \underline{2(k+1)}$$

を考えるとき、この下線部分について次のように考えるとする。

$$\begin{aligned} 2(k+1) &= 2k+2 \\ &= \underline{1}\times 2k + \underline{2}\times 1 \end{aligned}$$

ここで、先程の定義式（5）を用いて

$$\begin{aligned} 1 &= \binom{1}{0}b_0 \\ 2 &= \binom{2}{0}b_0 + \binom{2}{1}b_1 \end{aligned}$$

を下線部に代入し元の式を考えてみる。すると、

$$\begin{aligned} 2\sum_{x=1}^{k+1} x &= b_0\binom{2}{0}k^2 + b_1\binom{2}{1}k + \underline{\left\{b_0\binom{1}{0}\right\}\times 2k + \left\{b_0\binom{2}{0} + b_1\binom{2}{1}\right\}\times 1} \\ &= b_0\binom{2}{0}(k+1)^2 + b_1\binom{2}{1}(k+1) \end{aligned}$$

とまとめることができ、$p=1$ の場合については成立する。

$p=2$ の場合も同じように考えることができ、

$$3\sum_{x=1}^{k+1} x^2 = b_0\binom{3}{0}k^3 + b_1\binom{3}{1}k^2 + b_2\binom{3}{2}k + \underline{3(k+1)^2}$$

を考え、下線部について、

$$\begin{aligned} 3(k+1)^2 &= 3k^2 + 6k + 3 \\ &= \underline{1}\times 3k^2 + \underline{2}\times 3k + \underline{3}\times 1 \end{aligned}$$

と変形して、先ほどの定義式

$$
\begin{aligned}
1 &= \binom{1}{0}b_0 \\
2 &= \binom{2}{0}b_0 + \binom{2}{1}b_1 \\
3 &= \binom{3}{0}b_0 + \binom{3}{1}b_1 + \binom{3}{2}b_2
\end{aligned}
$$

を代入し b_i についてまとめると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
3\sum_{x=1}^{k+1} &= b_0\binom{3}{0}k^3 + b_1\binom{3}{1}k^2 + b_2\binom{3}{2}k + \\
&\left\{b_0\binom{1}{0}\right\} \times 3k^2 + \left\{b_0\binom{2}{0} + b_1\binom{2}{1}\right\} \times 3k + \left\{b_0\binom{3}{0} + b_1\binom{3}{1} + b_2\binom{3}{2}\right\} \times 1 \\
&= b_0\binom{3}{0}(k+1)^3 + b_1\binom{3}{1}(k+1)^2 + b_2\binom{3}{2}(k+1)
\end{aligned}
$$

となる。

この考えを用いて、関は一般の p の場合においても同様の考察を与えたのではないかと考える。つまり、

$$
(p+1)\sum_{x=1}^{k+1} x^p = b_0\binom{p+1}{0}k^{p+1} + b_1\binom{p+1}{1}k^p + \cdots + b_p\binom{p+1}{p}k + (p+1)(k+1)^p
$$

とした上で、

$$
\begin{aligned}
(p+1)(k+1)^p &= (p+1)\binom{p}{0}k^p + (p+1)\binom{p}{1}k^{p-1} + \cdots + (p+1)\binom{p}{p}1 \\
&= \underline{1} \times \binom{p+1}{1}k^p + \underline{2} \times \binom{p+1}{2} + \cdots + \underline{(p+1)} \times \binom{p+1}{p+1}1
\end{aligned}
$$

と変形することができる。ここで、現代の数学では組み合わせの理論では

$$
(p+1)\binom{p}{k} = (p+1)\frac{p!}{k!(p-k)!} = (k+1)\frac{(p+1)!}{(k+1)!(p-k)!} = (k+1)\binom{p+1}{k+1}
$$

とこの数式の変形を説明することができるのだが、関の時代には上記のような表現をすることができない。しかし、この代わりに二項係数表を使って同様の説明をすることができる。関はその方法を使ってこの数式の変形に気づいたのではないかと考えた。その方法とは以下の通りである。

1. まず、各項についてその次の原法を掛ける

1								8
7	1							7
21	6	1						6
35	15	5	1					5
35	20	10	4	1				4
21	15	10	6	3	1			3
7	6	5	4	3	2	1		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	6	5	4	3	2	1		

2. 各項を下から順に、第一級、第二級、・・・、としたときに各級数で割る。

1								8
7	1							7
21	6	6						6
35	15	30	1					5
35	20	60	4	1				4
21	15	60	6	3	1			3
7	6	30	4	3	2	1		2
1	1	6	1	1	1	1	1	1
7	6	5	4	3	2	1		

3. すると、各項の値が左斜め上の値と同値になる。

1								8
7	1							7
21	6	1						6
35	15	6	1					5
35	20	15	4	1				4
21	15	20	6	3	1			3
7	6	15	4	3	2	1		2
1	1	6	1	1	1	1	1	1
7	6	5	4	3	2	1		

こうすることによって、二項係数表を用いてこの式の変形をすることができる。
そこで変形した式に定義式を代入すると、現代数学の表記では、

$$\left(b_0\binom{i}{0}+b_1\binom{i}{1}+\cdots+b_{i-1}\binom{i}{i-1}\right)\binom{p+1}{i}k^{p+1-i} \qquad (i=1,2,\cdots,p+1)$$

となり、これを定数 $b_l(l=1,2,\cdots,p)$ についてまとめると各 b_l について

$$\binom{p+1}{l}\binom{p+1}{p+1}1+\binom{p}{l}\binom{p+1}{p}k+\cdots+\binom{l}{l}\binom{p+1}{l}k^{p+1-l}$$

となる。この各項の係数について、更に計算を施すと以下のようにまとめることができる。

$$\binom{p+1}{l}\left\{\binom{p+1-l}{0}1+\binom{p+1-l}{1}k+\cdots+\binom{p+1-l}{p+1-l}k^{p+1-l}\right\}$$

しかしこの計算についても現代数学の恩恵をうけて表現できたものである。そこで先ほどと同じように二項係数表を用いてこの式の変形に気づいたのではないかと考える。

例えば、$p=4, l=1$として二項係数表を用いて考えたい。まず第一項$\binom{p+1}{l}\binom{p+1}{p+1}$は次頁の図の次の所を掛け合わせていることになっている。

1								8
7	1							7
21	6	1						6
35	15	5	1					5
35	20	10	4	1				4
21	15	10	6	3	1			3
7	6	5	4	3	2	1		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	6	5	4	3	2	1		

次の項、$\binom{p}{l}\binom{p+1}{p}$では、

1								8
7	1							7
21	6	1						6
35	15	5	1					5
35	20	10	4	1				4
21	15	10	6	3	1			3
7	6	5	4	3	2	1		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	6	5	4	3	2	1		

を掛け合わせる。以上のことを繰り返すと、末項については

1								8
7	1							7
21	6	1						6
35	15	5	1					5
35	20	10	4	1				4
21	15	10	6	3	1			3
7	6	5	4	3	2	1		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	6	5	4	3	2	1		

を掛け合わせることになり、それらの計算結果はある列の定数倍という形になっている。

1								8
7	1							7
21	6	5						6
35	15	20	1					5
35	20	30	4	1				4
21	15	20	6	3	1			3
7	6	5	4	3	2	1		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	6	5	4	3	2	1		

以上により

$$\binom{p+1}{l}\left\{\binom{p+1-l}{0}1+\binom{p+1-l}{1}k+\cdots+\binom{p+1-l}{p+1-l}k^{p+1-l}\right\}$$

$$=\binom{p+1}{l}(1+k)^{p+1-l}$$

とまとめることができるので、元の式は

$$(p+1)\sum_{x=1}^{k+1}x^p=b_0\binom{p+1}{0}(k+1)^{p+1}+b_1\binom{p+1}{1}(k+1)^p+\cdots+b_p\binom{p+1}{p}(k+1)$$

となり、項数 k についても同様に示すことができる。

このように考えることによって、関孝和は冪乗和について

$$(p+1)\sum_{x=1}^{k}x^p=b_0\binom{p+1}{0}k^{p+1}+b_1\binom{p+1}{1}k^p+\cdots+b_p\binom{p+1}{p}k$$

という式を導出し、整合性を保証したのではないかと考えている。

謝辞

指導教官である小松彦三郎先生には、今研究集会の直前まで時間を割いていただき、いろいろ指導・助言を賜りました。この場を借りて御礼を申し上げます。

また今回の研究に当たっては、高校時代に（3）式を使って$p=10$までの冪乗和をを実際に計算していた、東京理科大学理学部4年 友部和也　氏の考えが非常に参考になりました。あわせて御礼申し上げます。

参考文献

1. 「大成算經」
   東北大学狩野文庫　所蔵，宮城県図書館　伊達文庫　所蔵，東京大学　所蔵
   東京理科大学　所蔵，京都大学　所蔵（2種類），大阪府立図書館　所蔵
2. 日本学士院編　「明治前日本数学史・第二巻」　岩波書店　1954
3. 竹之内脩著　「関孝和の括要算法における自然数の累乗和について」（「数学史の研究」数理解析研究所講究録 1019）　1997
4. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編　「關孝和全集」　大阪教育図書　1974
5. 加藤平左エ門著　「算聖関孝和の業績：解説」　槙書店　1972
6. 加藤平左エ門著　「和算の研究　[第3]　雑論第1」　日本学術振興会　1954
7. 武隈良一著　「数学史の周辺」　森北出版　1974
8. 小堀憲著「数学の歴史V　18世紀の数学」　共立出版　1979
9. 李迪著　大竹茂雄，陸人瑞訳　「中国の数学通史」　森北出版　2002
10. 高木貞治著 「解析概論　改訂第三版　軽装版」　岩波書店　1983
11. 山口周著「整数論～美しき円分体論・ベルヌーイ数への旅路」　産業図書　1994
12. 丸山哲郎著「自然科学・工学のための差分方程式序説」　現代数学社　1981
13. "Jacques Bernoulli,On the Bernoulli Numbers"D.E. Smith 編　「A Source Book in Mathematics」Dover　1959　pp.85-90