数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 27-45

『算学啓蒙諺解大成』について

国際基督教大学・教養学部・理学科
森本　光生 (Mitsuo Morimoto)
Division of Natural Sciences
College of Liberal Arts
International Christian University

1　建部賢弘

建部賢弘(たけべかたひろ)は，1664 年に生まれ，1676 年 (13 歳) に関孝和(せきたかかず)の門に入った．関孝和が 1674 年に刊行した『発微算法』が，当時の最新の数学書で，建部賢弘はこの書物を目標に数学を学んだことであろう．

彼は，1683 年 (20 歳) に『研幾算法』を，1685 年 (22 歳) に『発微算法演段諺解』4 巻を，1690 年 (27 歳) に『算学啓蒙諺解大成』7 巻を著した．

『研幾算法』は,『発微算法』と同様に，最終的な代数方程式 (開方の式) が漢文で述べてあるだけで，どのようにその方程式が立てられるのかについては何も述べていない.『発微算法演段諺解』では，建部賢弘は『発微算法』の演段を傍書法によって説明しているが,『算学啓蒙諺解大成』では，傍書法の基礎となった天元術を詳しく解説している．

これらの著作を通して建部賢弘は関孝和の始めた天元術と傍書法を「算盤代数」として定式化して応用してみせたのである．建部賢弘の「算盤代数」を理解するには，書かれた順序とは逆に,『算学啓蒙諺解大成』から読まなければならない．この注釈書のもとになった『算学啓蒙』とはどのような書物だったのか．

2　『算学啓蒙』の成立と伝来

朱世傑(しゅせいけつ)は，元朝の数学者で，1299 年に『算学啓蒙』を，1303 年に『四元玉鑑』を著した．ちなみに,『算学啓蒙』に述べてある天元術では，未知数一つの代数方程式を扱うことができたが,『四元玉鑑』に述べてある四元術では，不完全ながら 4 つの未知数を扱うことができた．このことより中国では,『算学啓蒙』は,『四元玉鑑』と比べて程度の低い入門書と見られている．両書とも明代に亡失してしまった．

しかし,『算学啓蒙』は, 加減乗除より系統立てて当時の数学がすべて述べられており, 朝鮮の李朝によって, 算官を選抜するときの参考書籍とされ, 数回にわたって覆刻された. 最初の覆刻は李朝の初期, 世宗(1419 − 1450)の頃で, 朝鮮活字本9行, 毎行17字の大判である. この覆刻本が, 1592年ー98年の文禄慶長の役の頃, 朝鮮より日本にもたらされたのである.『中国歴代算学集成』[1]1314–1385ページに印影が再現されている.

日本では, 1658年（万治1）に, 久田玄哲(ひさだげんてつ), 土師道雲(はじどううん)が『算学啓蒙』（訓点）を刊行した. また, 1672年（寛文12）に, 星野実宣(ほしのさねのぶ)が『新編算学啓蒙註解』を刊行した. これには簡単な注がついていた.

3 『算学啓蒙諺解大成』

『算学啓蒙』は, 総括, 巻上, 巻中, 巻下の4巻構成で, 137丁からなるが, 建部賢弘はこれに詳細な注を付けて『算学啓蒙諺解大成』(以下,『諺解大成』という.) とした.『諺解大成』は, 総括, 上本, 上末, 中本, 中末, 下本, 下末と7巻構成で, 219丁からなる. 注の部分は, 割注といって, 原文の1行を2行に割って小さな活字で書いているので, 丁数ではほぼ1.8倍であるが, 文字数で云えば原文の倍以上が建部の注であろう.

	算学啓蒙	算学啓蒙諺解大成
序	2丁	2丁
目次	1丁	1丁
総括	7丁	13丁
巻上	35丁	54丁
巻中	44丁	62丁
巻下	48丁	87丁
合計	137丁	219丁

諺解とは, 口語訳という意味であり, 漢文で書かれたテキストを訓読するだけでなく, こなれた和文で読み解いている. 一読すると建部賢弘の謦咳に接する感がある.『諺解大成』は漢字交じりの片仮名表記であるので, 平仮名で書かれている『塵劫記』のように寺子屋では用いられず, 読者層は藩校で教育を受けた武士階級が中心だったと思われる.

『諺解大成』は, 今まで和算研究家の注目を集めていなかったようで, 私は寡聞にして,『明治前日本数学史』（第2巻）[11]のpp 281–284に紹介されているものしか知らない.

『諺解大成』の下末の『開方釈鎖門』は34問からの問題からなる. はじめの7問は開平術を扱い, その後は天元術を詳説している. これらの術を建部がどのように解釈していたのかを述べる前に, 当時の計算の道具であった算木と算盤について説明しよう.

4 算木による数の表し方

中国伝統数学（以下、中算という）やその流れを汲む和算において, 数は, 基本的に有限桁の自然数であり, 算木を算盤の上に並べることにより表した. 並べ方には2種類あり,

奇数位は縦に，偶数位は横に並べた．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
一，百，万の位	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
十，千，十万の位	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

算木には赤と黒の２種類があり，赤が正の数を，黒が負の数を表すことになっていた．紙に書く場合，朱色が使えなければ，負数には斜線を付けて表した．

1　2　3　4　5　6　7　8　9

負数 

算盤上の空位は，紙の上では○印で表した．例えば，

𝍫𝍠○𝍡𝍮𝍧

は，310268 を表した．

『九章算術』以来、中算や和算では正負の数の概念は確立していたが，算盤やそろばんといった器具のイメージが数に密着していたため，その取り扱いは煩雑で熟練を要した．

『九章算術』の「方程」で「正負術」が述べられているが,『算学啓蒙』では「総括」の「明正負術」で再述されている．例えば，整数の加法は,「同加異減」と呼ばれている．これは，同じ色の算木に対しては加え，異なる色の算木に対しては大きなものから小さなものを引けば良いとの意味である．そろばん上の演算のように，算盤上の算木に対しても自然数の加減が基本演算であり，整数の加法という概念は２次的なものに過ぎなかった．

同様に，整数の減法は,「同減異加」と呼ばれている．

朱世傑の「明正負術」は,『九章算術』伝来の次の口訣で，はじめの２行は「同減異加」を，あとの２行は「同加異減」を述べている．以下に引用しよう．

正負（せいふ）を明かす術[1]

其の同名相減（あいげん）ずるときは，	**即ち異名は相加う．**
正に人無（な）ければ，之を負（ふ）にす．	**負に人無ければ，之を正とす．**
其の異名相減ずるは，	**即ち同名は相加う．**
正に人無ければ，之を正にす．	**負に人無ければ，之を負にす．**

朱世傑は，この口訣に対して次のような注をつけている．

《按（あん）ずるに，九章（(きゅう) しょう）の註（ちゅう）に云う，両（りょう）算得失（とくしつ）相返（はん）す[2]．正負をして以って之を名（な）づけ正算は赤（あか）く負算は黒（くろ）くせしめんことを要（よう）す．不則（しからざれば）邪正を以って異なりと為す．其の人無きは，対する無しと為すなり．得る所無くして減ずるは，消奪（だつ）の者をして位に居（お）か使むなり．人を入に作るは非なり．》

---

[1]これは，建部の訓読である．(『九章算術』の)「正負術」を明かすと読むのが正当であろう．

[2]ハンは，返の漢音

「同減異加」を『算学啓蒙』では,「其同名相減，則異名相加」といっている．以下は，これに対する建部の説明である．正負零の数の減法が明確に記述されている．また，減算は符号を変えて加えれば良いことも述べている．

「其の同名相減ずるときは」——— 同名とは，正算と正算，負算と負算なり．異名とは，正算と負算，負算と正算なり．人無しとは数のなきことなり．同名を減ずるときは，異名は加え，正算を以って減ずるに，減ぜらるる方に数無くば，正算を反して負算とし，負算を以って減ずるに，減せらるる方に数なくば，負算を反して正算とするなり．委しく書き取りがたきゆえ，左の図にしるす．同減異加とはこれなり．

たとえば

𝍠 正一を以って𝍢 正三を減ずれば，𝍡 正二となる 𝍦 正七を以って𝍡 正二を減ずれば，𝍤̸ 負五となる
𝍡̸ 負二を以って𝍧̸ 負八を減ずれば，𝍥̸ 負六となる 𝍥̸ 負六を以って𝍣̸ 負四を減ずれば，𝍡 正二となる
𝍣 正四を以って𝍦̸ 負七を減ずれば，一𝍠̸ 負十一となる 一𝍡̸ 負十二を以って𝍠 正一を減ずれば，一𝍢 正十三となる
𝍨 正九を以って〇 数無きを減ずれば，𝍨̸ 負九となる 𝍢̸ 負三を以って〇 数無きを減ずれば，𝍢 正三となる
〇 数無きにて𝍤 正五を減ずれば，𝍤 其の侭にて正五なり 〇 数無きにて𝍠̸ 負一を減ずれば，𝍠̸ 其の侭にて負一なり

右，正負弁え難くば，其の減ずる者の正負を相反して後に相加うべし．たとえば，右の如きは，𝍠 正一を反して𝍠̸ 負一として，𝍢 正三に相加え，𝍡 正二となる．又，𝍦 正七を反して𝍦̸ 負七として，𝍡 正二に相加え，𝍤̸ 負五となる．又，𝍡̸ 負二を反して𝍡 正二として，𝍧̸ 負八に相加え，𝍥̸ 負六となるなり．末これに同じ．是は異術なれども，初学(がく)者の入り易(やす)き為に可なり．

「同加異減」を『算学啓蒙』では,「其異名相減，則同名相加」といっている．以下は，これに対する建部の説明である．正負零の数の加法が明確に記述されている．加法の可換性についても言及していることは要注意．

「其の異名相減ずるときは」——— 異名を相減ずるときは，同名は相加う．正算を加ゆるに一方に数なくば其の侭正とし，負算を加ゆるに一方に数なくば其の侭負とするなり．異減同加とはこれなり．

たとえば

𝍡 正二を以って𝍤 負五に加ゆれば，𝍢 負三となる 𝍧 正八を以って𝍢 負三に加ゆれば，𝍤 正五となる
𝍣 負四を以って𝍦 正七に加ゆれば，𝍢 正三となる 𝍥 負六を以って𝍡 正二に加ゆれば，𝍣 負4となる
𝍨 正九を以って𝍦 正七に加ゆれば，一𝍥 正十六となる 𝍠 負一を以って一𝍡 負十二に加ゆれば，一𝍢 負十三となる
𝍧 正八を以って〇 数無きに加ゆれば，𝍧 正八となる ＝𝍠 負二十一を以って〇 数無きに加ゆれば，一𝍠 負二十一となる

右，異減同加は，両の数を以って何方より加えても同じ．

以下に，朱世傑の「本注」に対する建部の注が書かれている．

本注　「按ずれば九章の註に云う」——— 得は正算なり．失は負算なり．正と負とを見分くべきために，正算をば赤く，負算をば黒くするとなり．

「邪正を以って」——— とは，左(さ)なければ，正算は，𝍠，𝍡，𝍢 かくのごとく，負算は，𝍠，𝍡，𝍢 かくのごとく置くとなり．

「其の人無きは」——— 人(ひと)無しとは，対(たい)する数のなきことぞとなり．

「得る所無くして減ずる」——— 得る所無(な)くして減ずるとは数を以って数の無を減ずるときは其の数を位(くらい)に置くとなり．消奪とは以て減ずるの数なり．

5　開平の道具としての算盤

算盤は次のような形をしていた．

千	百	十	一	分	厘	毛	
							商
							実
							方
							廉
							隅

算盤は数を扱う色々の場合に利用されたが，開平算に限って説明しよう．

例えば，3 次代数方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x + a_3x^3 = 0 \tag{1}$$

は，中算や和算では，算盤の上に表示された．すなわち，算盤の上の実級に a_0 が，方級に a_1 が，廉級に a_2 が，隅級に a_3 が置かれた．すなわち，(1) を算盤上の配置

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

で表示したのである.

『算学啓蒙』の「開方釈鎖門」の第1問は次のようなものである.

《一　今，平方冪四千九十六歩有り．方面と為して幾何(いくばく)ぞと問う．答えて曰く，六十四歩.》

方面というのは，正方形の一辺のことであるので，現代語で言えば,「面積が4096の正方形の一辺はいくつか」という問いである.

この開方の式

$$4096 - x^2 = 0 \tag{3}$$

は，算盤の上では算木を用いて次のように表示された.

	千	百	十	一	分	厘	毛	
								商
赤棒	𝍬		𝍱	𝍥				実
								方
黒棒				𝍠				廉
								隅

開方の式は何次式であっても，開平術によって数値解を求めることができた．3次式に限って説明しよう.

実級 A_0, 方級 A_1, 廉級 A_2, 隅級 A_3 をコンピュータのメモリーと見なし，(1)の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を，それぞれ，A_0, A_1, A_2, A_3 の値と考える．立てる商 q を商級のメモリー Q に代入すると，算盤上での開平の操作は，BASICの言語流に次のように記述できる.

$$A_2 \;= A_2 + A_3 \times Q,\quad A_1 \;= A_1 + A_2 \times Q,\quad A_0 \;= A_0 + A_1 \times Q$$

$$A_2 \;= A_2 + A_3 \times Q,\quad A_1 \;= A_1 + A_2 \times Q$$

$$A_2 \;= A_2 + A_3 \times Q$$

この操作の結果，A_0, A_1, A_2, A_3 に入る新しい値を a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 とすると

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a'_0 + a'_1(x-q) + a'_2(x-q)^2 + a'_3(x-q)^3$$

なる関係がある.

さらに，もしも q' を商級 Q の値 q に足しこめば,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a''_0 + a''_1(x-q-q') + a''_2(x-q-q')^2 + a''_3(x-q-q')^3.$$

における値 a''_0, a''_1, a''_2, a''_3 は，a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 より全く同一のプログラムで計算できる.

$$\begin{bmatrix} (0) \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} (q) \\ a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} (q+q') \\ a''_0 \\ a''_1 \\ a''_2 \\ a''_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots\cdots$$

もし，実級を空にできれば，そのときのQの値$q+q'+\cdots$が(1)の解である．このようにして，上位の桁より一桁ずつ方程式の根を求めることができた．これが「開平術」の原理である．

この「開平術」も，中算では約2千年前に成立した『九章算術』より知られていたことであり,『算学啓蒙』「総括」では

明開平法　積を置き実と為し，方廉隅に及んで同加異減して之を開く．

と1行で述べられている．

しかしながら，朱世傑は「開方积鎖門」第1問の術文で開平を，第2問の術文で開立を述べており，建部は『諺解大成』の注において，更に詳細に説明している．「開平」とは，平方根を求めることが原義であるが,『算学啓蒙』では，代数方程式を上述の方法で解くことを意味していることを注意して置く．

6　算盤代数としての天元術

天元術とは，今日の言葉で割り切っていってしまえば，多項式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \tag{4}$$

を，算盤上の配置 $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ で表示しようということである．代数方程式を表すべき算盤上の配置が，多項式をも表すということで，頭を切り替えることは難しく，承服しかねる考え方であったろう．例えば，実級を空にして，廉級に一算を立てて

$$\begin{bmatrix} \bigcirc \\ | \end{bmatrix} \tag{5}$$

を作る．(5)は，開平術では方程式$x=0$を表すが，天元術では仮の数xを表すのである．算盤上の配置(5)を作ることを，天元の一を立てるといった．

天元術の議論を実例で見よう．「開方积鎖門」第8問は次のようなものである．

《八　今，直田八畝五分五厘有り．只云う，長平和して九十二歩なり．長平各々幾何（いくばく）ぞと問う．答えて曰く，平三十八歩，長五十四歩.》

直田は長方形の田で，長は長辺，平は短辺である．1畝は240(平方)歩であるので，一畝五分五厘は，$8.55\times240=2052$(平方)歩である．したがって，問題は,「面積が2052の長方形があり，長辺と短辺の和は92である．このとき，長辺と短辺を求めよ.」ということになる．

朱世傑の書いた術文は次のようになっている．

術に曰く，天元の一を立て平と為す $\begin{bmatrix}\text{〇}\\ \text{𝍠}\end{bmatrix}$．以いて云える数を減じて余りを長と為す．平を用いて乗起して積と為す $\begin{bmatrix}\text{〇}\\ \text{𝍱𝍡}\\ \text{𝍠̸}\end{bmatrix}$．左に寄せ畝を列し歩に通じて左に寄せたると相消して開方の式を得る $\begin{bmatrix}\text{𝍪〇𝍭𝍡̸}\\ \text{𝍱𝍡}\\ \text{𝍠̸}\end{bmatrix}$．平方に之を開き平を得る．以いて和歩を減じて即ち長なり．問に合す．

今の言葉で言えば，平を x とすると，長は $92-x$ であり，面積は $x(92-x)=92x-x^2$ である．これが与えられた面積2052と等しいから，方程式

$$x(92-x)-2052=0$$

を得る．これを解けば，平が求まるということである．

『諺解大成』の建部の考えを敷衍して言えば，天元の一を立て，算盤上の配置 $\begin{bmatrix}\text{〇}\\ \text{𝍠}\end{bmatrix}$ を仮の平とする．長平の和92からこの算盤上の配置を引くと，算盤上の配置 $\begin{bmatrix}\text{𝍱𝍡}\\ \text{𝍠̸}\end{bmatrix}$ になるので，これを仮の長とするのである．ここで，建部は配置の加法演算の説明を挿入する．現代の言葉で言うと，配置の加法演算はベクトルとしての加法演算であることを明確に述べている．

上に得た二つの配置，仮の平と仮の長，を掛け合わせると，算盤上の配置 $\begin{bmatrix}\text{〇}\\ \text{𝍱𝍡}\\ \text{𝍠̸}\end{bmatrix}$ になるので，これを仮の積とする．この仮の積と実の積2052を相消すと「開方の式」$\begin{bmatrix}\text{𝍪〇𝍭𝍡̸}\\ \text{𝍱𝍡}\\ \text{𝍠̸}\end{bmatrix}$ が求まるので，これを開平術によって解けばよい．

建部は，算盤上の配置を仮の数と認識し，それらの加減乗除を定式化している．加法は，上述のようにベクトル和であるが，乗法に関しては，次のように述べている．原文を少し引用しよう．

自乗相乗の法

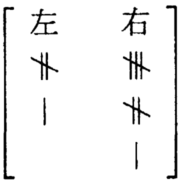
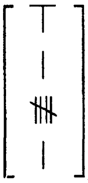
自乗は若し $\begin{bmatrix}\text{𝍠} & \text{実}\\ \text{𝍠} & \text{方}\end{bmatrix}$ かくのごとく二段あらば，実自乗して実級に置き，実と方と相乗じて倍して次の級に置き，方自乗して三級に置くなり．仮如，$\begin{bmatrix}\text{𝍦}\\ \text{𝍡}\end{bmatrix}$ を自乗すれば，$\begin{bmatrix}\text{𝍬𝍨}\\ \text{𝍪𝍧}\\ \text{𝍣}\end{bmatrix}$ となる．又，$\begin{bmatrix}\text{𝍠} & \text{実}\\ \text{𝍠} & \text{方}\\ \text{𝍠} & \text{廉}\end{bmatrix}$ かくのごとく三段有らば，

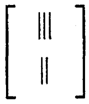
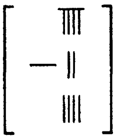
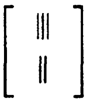
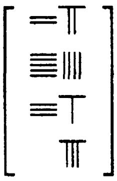
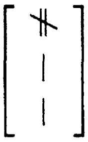
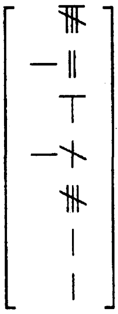
実自乗して実の級に置き，実と方と相乗じ倍して次の級に置き，実と廉と相乗を倍して方自乗を加えて三級に置き，方と廉と相乗じ倍して四級に置き，廉自乗して五級に置くなり．たとえば，$\begin{bmatrix} \text{𝍡̸} \\ \text{𝍢} \\ \text{𝍠} \end{bmatrix}$ を自乗すれば，$\begin{bmatrix} \text{𝍣} \\ \text{𝍩𝍡̸} \\ \text{𝍤} \\ \text{𝍥} \\ \text{𝍠} \end{bmatrix}$ となるぞ．

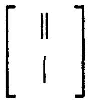
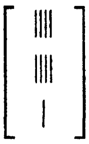
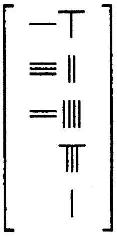
相乗するもこれに同じ．若し $\begin{bmatrix} \text{左} & & \text{右} \\ \text{𝍠} & \text{実} & \text{𝍠} \\ \text{𝍠} & \text{方} & \text{𝍠} \end{bmatrix}$ 此の如く左右ともに二段あらば，左の実と右の実と相乗じて実の級に置き，右の実と左の方と相乗じ，左の実と右の方と相乗じて，二数併せて次の級に置き，左の方と右の方と相乗じて三級に置くなり．仮如，$\begin{bmatrix} \text{左} & \text{右} \\ \text{𝍦̸} & \text{𝍢} \\ \text{𝍡} & \text{𝍠} \end{bmatrix}$ 相乗じては $\begin{bmatrix} \text{𝍪𝍠̸} \\ \text{𝍠̸} \\ \text{𝍡} \end{bmatrix}$ となる．

又，$\begin{bmatrix} \text{左} & & \text{右} \\ \text{𝍠} & \text{実} & \text{𝍠} \\ \text{𝍠} & \text{方} & \text{𝍠} \\ \text{𝍠} & \text{廉} & \text{𝍠} \end{bmatrix}$ かくのごとく左右ともに三段あらば，右の実と左の実と相乗じて実の級に置き，右の実と左の方と相乗じ，左の実と右の方と相乗じ，二数相あわせて次の級に置き，右の実と左の廉と相乗じ，左の実と右の廉と相乗じ，右の方と左の方と相乗じ，三数相併せて三級に置き，右の方と左の廉と相乗じ，左の方と右の廉と相乗じ，二数相併せて四級に置き，右の廉と左の廉と相乗じて五級に置くなり．たとえば，$\begin{bmatrix} \text{左} & \text{右} \\ \text{𝍠} & \text{𝍡} \\ \text{𝍥̸} & \text{𝍢̸} \\ \text{𝍡} & \text{𝍠} \end{bmatrix}$ 相乗すれば $\begin{bmatrix} \text{𝍡} \\ \text{𝍩𝍤̸} \\ \text{𝍪𝍢} \\ \text{𝍩𝍡̸} \\ \text{𝍡} \end{bmatrix}$ となる．

又，$\begin{bmatrix} \text{左} & & \text{右} \\ \text{𝍠} & \text{実} & \text{𝍠} \\ \text{𝍠} & \text{方} & \text{𝍠} \\ & \text{廉} & \text{𝍠} \end{bmatrix}$ かくのごとく三段と二段とあらば，右の実と左の実と相乗じて，実の級に置き，右の実と左の方と相乗じ，左の実と右の方と相乗じ，二数相併せて次の級に置き，左の実と右の廉と相乗じ，右の方と左の廉と相乗じ，二数相併せて三級に置き，左の方と右の廉と相乗じて，四級に置くなり．

仮如，相乗すればとなる．

再自乗は其の式を自乗して又，其の式を相乗するなり．たとえばを再自乗するに，先ず自乗してとなる．又，是とと相乗じてとなるなり．又，を再自乗すれば，となる．

三たび自乗は其の式を自乗して又，自乗するなり．たとえば，ならば自乗して，是を又，自乗してとなる．四自乗は又一度乗ずるなり．以上これに同じ．

空級と空級と相乗ずれば空となる．又，数と空級と相乗ずるも空となる．正と正と相乗ずるも負と負と相乗ずるも皆正となる．正と負と相乗じては負となる．併する時は同加異減するなり．右，自乗相乗の仕よう見やすきに任せて略術をしるすなり．

凡そ此の術は術の中にて，平方立方などに開き，或いは式にて除くこと曾てなきことなり．数にて約むることは時宜により之有りといえども，之を約めざるがよきなり．

今日の記法を用いれば，自乗の法とは

$$(7+2x)^2 = 49 + 28x + 4x^2$$
$$(-2+3x+x^2)^2 = 4 - 12x + 5x^2 + 6x^3 + x^4$$

のような計算である．さらに，相乗の法とは

$$(-7+2x)(3+x) = -21 - x + 2x^2$$
$$(1-6x+2x^2)(2-3x+x^2) = 2 - 15x + 23x^2 - 12x^3 + 2x^4$$

のような計算である．退化した場合は別記している．

$$(-2+x)(-3-2x+x^2)=6+x-4x^2+x^3$$

また，再乗は

$$(3+2x)^2=(9+12x+4x^2)(3+2x)=27+54x+36x^2+8x^3$$
$$(-2+x+x^2)^3=-8+12x+6x^2-11x^3-3x^4+3x^5+x^6$$

のような計算である．また，三再乗は

$$(2-x)^4=((2-x)^2)^2=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$$

のような計算である．このような代数演算も算盤の配置を用いて，建部は説明している．

建部は，算盤上の配置を「仮の数」と見なして加減乗とスカラー積ができること，すなわち，多項式代数を知っていたのである．この意味で，天元術を「算盤代数」と私は呼びたいのである．

「仮の数」に対する演算について，平方や立方に開くこと，「仮の数」を「仮の数」で除することは「曽てなきこと」と述べて深入りしないことも，多項式代数としての建部の認識を支持するものである．

7　仮の数と真の数

建部賢弘が1722年に著わした『綴術算経』がある．(別に『不休綴術』という似た内容の書物もあるが，本論ではどちらでも同じであるので，『綴術算経』を引用する．)『綴術算経』の第2章は立元の術という．

先ず扱う問題は数値が異なるものの我々の第8問と同一である．

> **仮如(たとえば)直積一百八十歩有りて長平和(あわせ)て二十七歩．長平各々幾何と問う．○　答えて曰く，平一十二歩．○　長一十五歩．**

建部はまず，開平術の復習を始める．

> たとえば積有(あ)りて平方に開(ひら)く者(もの)は積を実級(じつきゅう)に置(お)き，方級(ほうきゅう)空にして隅級に一を置き，三級にして平方に開(ひら)く．
>
> 積有りて立方に開く者は積を実級に置き，方廉(れん)の二級皆(みな)空にして隅級に一を置き，四級にして立方に開く．
>
> 積有りて三乗方に開く者は積を実級に置き，方廉廉の三級皆空にして隅級に一を置き，五級にして三乗方に開く．此の如く其(そ)の乗数(じょうすう)の多(おお)きに従(したが)いて階級降(かいきゅうくだ)り増(ま)すを拠(よりどころ)とす．

なぜ天元の一を方級に置くのか，建部は開平術の算盤上の配置から説明を試みる．例えば，$\sqrt{2}$ を求めようとすれば，$-2+x^2=0$ を解くので，$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．以下の建部の説明でも，実級は負，隅級は正でなくてはならない．しかし，上の文では数の正負については無頓着である．

> 凡(およ)そ開方の実級の数を開(ひら)き尽(つ)くす者(もの)は同名(めい)を減ずるに非(あら)ず．皆(みな)同加異減の理なることを会す．

開方の術には色々なヴァリエーションがあるが，この箇所より，建部は（我々が述べたように）方程式 (1) を配置 (2) で表していたことがわかる．整数の加法の概念が 2 次的で，「同加異減」であるとわざわざ断っているのは，実際の計算は自然数の加法と減法を繰り返しており，当時一般にその本質が理解されていないのを正そうとしたのだろう．

> 然(しか)れば実級の数負(ふ)なる時(とき)は隅級は必(かなら)ず正(せい)なり．正負交(まじわ)り備(そなわ)るゆえ，自然に開き尽きるなり．

なぜかと説明しようとすると，「陰陽」を持ち出すのは江戸時代の文化である．

> 亦，得る所(ところ)の方面を自乗しては平方の積に還(かえ)り，再自乗しては立方の積に還(かえ)り，三たび自乗しては三乗方の積に還るは技(わざ)の常(つね)なり．
>
> 本(もと)より真数(しんすう)は皆常(みなつね)に実級に置(お)くべきことを意(おも)うて実級を空(むな)しうして方級に一算を置(お)きて求(もと)むべき方面に名(な)を仮(かり)て，其(そ)の仮方面(かほうめん)を以って自乗するときは，実方の二級空にして一の数隅級に降(くだ)りて総(すべ)て三級と成(な)る．是(これ)，平方の仮(かり)の積なり．
>
> 又，仮方面を再自乗するときは，実方廉の三級空にして一の数隅級に降(くだ)りて総(すべ)て四級となる．是，立方の仮の積なり．
>
> 又，仮方面を三たび自乗する時(とき)は，実方廉廉の四級空にして一の数隅級に降りて総て五級となる．是，三乗方の仮の積なり．
>
> 即(すなわ)ち是に依(よ)りて，立(た)つる所(ところ)の方級の一算，乗(じょう)を累(かさ)ぬるに従(したが)いて，下(くだ)り降(くだ)りて隅級を成(な)すことを会す．
>
> 此(ここ)に於(お)いて真(まこと)の積数を以って仮(かり)の積と相激消(げきしょう)するときは，理(り)に於いて当(まさ)に空と成(な)るべしといえども，真仮(しんか)の異(ことなる)を以ってするゆえ，数(かず)に於(お)いて空と成(な)ること能(あたわ)ずして，実級に積数の負なるを止(とど)め，他級皆(みな)空にして隅級に一の数の正なるを止(とど)む．(或いは実の数正とするときは，隅は負なり.)
>
> 是(これ)，自然(しぜん)に方に開くべき全(まった)き式を成(な)す者(もの)なり．

> 是より商(しょう)を立(た)て隅級より乗じ昇(のぼ)りて実級に到(いた)りて同加異減して開(ひら)き尽(つ)くす．其(そ)の得る所(ところ)の商は便(すなわ)ち所求(しょきゅう)の方面なり．

以下，天元術の威力の説明が続き，はじめの問題の術文があり，この章がおわる．

8 算盤代数の完成としての傍書法

関および建部は，上のような問題で，積と和に具体的な数が与えられなくても算盤の代数の言葉で方程式の立て方を述べることができた．最も簡単な上の問題を『研幾算法』の流儀で述べれば，次のようになる．

> 今，直田有り．只云う，長平和して若干．又云う，積若干．長平各々幾何ぞと問う．

若干といって数値を与えないのである．このときには，仮の平を天元に一を立て $\begin{bmatrix} \bigcirc \\ | \end{bmatrix}$ とし，仮の長を $\begin{bmatrix} |\text{只} \\ \not{|} \end{bmatrix}$ とし，仮の積を $\begin{bmatrix} \bigcirc \\ |\text{只} \\ \not{|} \end{bmatrix}$ とする．そして，開平の式を $\begin{bmatrix} \not{|}\text{又} \\ |\text{只} \\ \not{|} \end{bmatrix}$ と表すのである．

『研幾算法』では，開方の式が高次になるような多くの問題がこのようにして解かれている．そして,『発微算法演段諺解』では，この傍書法が更に複雑に利用されており,「算盤代数」が多項式係数の多項式代数として確立するのである．

9 三乗の法

『算学啓蒙諺解大成』の中には傍書法を用いた記述はない．しかし，傍書法を用いて計算をしなければ求まらないであろう計算結果が述べられている．

$$X + Y + Z = 0 \tag{6}$$

であれば,

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = 0 \tag{7}$$

が成り立つことは，今日では因数分解

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = (X + Y + Z)(X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX)$$

より明らかである．(6) より (7) を導く式変形を，三乗化という．これは,『発微算法演段諺解』で用いられている技法である．(小川 [12] を見よ.)

開方釈鎖門の第 31 問は次のとおりである．

三十一　今，円錐有り．積(せき)三千七十二尺．只云う，高さを実(じつ)と為し立(りゅう)方に之を開(ひら)き得る数は下の周(めぐり)に及(およ)ばざること六十一尺．下の周及(およ)び高さ，各々幾何ぞと問う．$\boxed{\text{答曰}}$　下の周六十四尺．　○　高さ二十七尺．

問題は，円錐があって，高さを h，底面の半径を r とする．与えられているのは体積 $V = \pi r^2 h/3 = 3072$ と $D = 2\pi r - \sqrt[3]{h} = 61$ である．これより h と底円の周の長さ $2\pi r$ を求めよというのが問題である．

朱世傑の術文は次のようになっている．

術に曰く，天元の一を立て開立方(かいりゅうほう)の数と為す．$\begin{bmatrix} \bigcirc \\ | \end{bmatrix}$ 再(ふたた)び自乗して高(たか)さと為すなり．$\begin{bmatrix} \bigcirc \\ \bigcirc \\ \bigcirc \\ | \end{bmatrix}$ 再(ふたた)び開立方の数を列し及(およ)ばざるを加(くわ)え下の周と為すなり．$\begin{bmatrix} \text{⊥|} \\ \text{|} \end{bmatrix}$ 之を自して，又高(たか)さを之に乗じて三十六段の積と為す．$\begin{bmatrix} \bigcirc \\ \bigcirc \\ \bigcirc \\ \text{≡╥=|} \\ \text{|=‖} \\ \text{|} \end{bmatrix}$ 左に寄す．積を列し三十六を之に乗じて，左に寄せたると相消して，開方の数式を得る．$\begin{bmatrix} \text{|—○○|||||≣╫} \\ \bigcirc \\ \bigcirc \\ \text{≡╥=|} \\ \text{|=‖} \\ \text{|} \end{bmatrix}$ 四乗の方に之を開き三尺を得る．開立方の数と為す．及ばざるを加え下の周六十四尺を得る．又，三尺を列(れつ)し再(さい)自乗して，高さ二十七尺を得る．問に合す．

朱世傑の術文を，今日の言葉に直訳してみよう．

$x = \sqrt[3]{h}$ とする．x^3 が高さになり，$D + x$ が底円の周の長さになる．したがって，円錐の体積は，$12\pi V = (2\pi r)^2 h = (D + x)^2 x^3$ なので，開方の式として

$$-12\pi V + D^2 x^3 + 2Dx^4 + x^5 = 0$$

なる 5 次方程式が得られる．$\pi = 3$ として計算すれば，術文にある開方の式が出る．

開方の式が出れば，それを開くことは原理的に可能であり，周知の演算であるので，朱世傑は開平の方法については述べない．建部賢弘は先ず，開平術に関して次のように親切に注している．

「四乗の方に之を開き」——— 先ず，商に三尺を置き，以て隅一に乗じて三となる．三廉の一百二十二に加え一百二十五となる．是に又，商三を乗じて三百七十五を次廉三千七百二十一に加え四千〇九十六となる．是に又，商を乗じて一万二千二百八十八を初廉に置き，是に又，商を乗じて三万六千八百六十四を方に置く．是に又，商を乗じて実を除き尽くすなり．

算盤の級は上より，実，方，初廉，次廉，三廉，隅と呼んでいる．注目すべきことは，隅級から一度掛け上れば実級が空になってしまうので，そこで計算を止めてあることであろう．

このあと，建部は次のような新しい術文を書いている．

$\boxed{\text{今按}}$ 直ちに高を求む術に曰く，天元の一を立て高さと為す

[〇
𝍠]

．只云数冪を以って相乗じて，一十二段の積に加入して共に得る

[𝍢𝍮𝍦𝍮𝍣
𝍫𝍦𝍪𝍠]

．之を自して又，積を以って相乗じて，亦(また)三百二十四を以って之に乗じて得る

[𝍩𝍢𝍬𝍡𝍮〇𝍬𝍣𝍮〇𝍬𝍧𝍫𝍥𝍰𝍦
𝍡𝍯𝍢〇𝍥〇𝍠𝍮𝍡𝍮𝍧𝍰𝍡𝍮𝍣
𝍩𝍢𝍯𝍧𝍩𝍠𝍬𝍡𝍪𝍡〇𝍦𝍬𝍧]

．左に寄す．

積・只云数と相乗じて一百八段，只云数再乗冪・高さ相乗一段，高さ自乗一段，三位相併せて共に得る

[𝍪〇𝍪𝍢𝍯𝍢𝍫𝍥
𝍪𝍡𝍮𝍧𝍯𝍠
1]

．之を自して，亦，高さを以って相乗じて得る

[〇
𝍣〇𝍧𝍬𝍧〇𝍡𝍫𝍣〇𝍢𝍰𝍦𝍰𝍥
𝍧𝍩𝍦𝍯𝍢𝍪𝍣𝍫𝍦𝍮𝍡𝍫𝍡
𝍣𝍩𝍣𝍮〇𝍯𝍣𝍩〇𝍫𝍢
𝍫𝍣𝍪𝍧𝍮𝍡
𝍠̸]

．左に寄せたると相消して開方の式を得る

[𝍩𝍢𝍬𝍡𝍮〇𝍬𝍣𝍮〇𝍬𝍧𝍫𝍥𝍰𝍦
𝍠𝍪𝍥𝍬𝍡〇〇𝍰𝍠𝍪𝍢𝍰𝍥𝍪𝍡̸
𝍢𝍬𝍧𝍪𝍦𝍩𝍦𝍯𝍢𝍡𝍮𝍩𝍥
𝍣𝍩𝍣𝍮〇𝍯𝍣𝍩〇𝍫𝍢̸
𝍫𝍣𝍪𝍧𝍮𝍡̸
𝍠̸]

．四乗の方に之を開き高さを得るなり．末，之を略す．

建部の今按を記号を用いて逐語訳してみよう．建部はhに関する開方の式を直接に求めることにしている．$324V(Dh+12V)^2$ を左に置き，$(108DV+D^2h+h^2)^2h$ と左に寄せた

ものを相消して開方の式として

$$-324V(Dh+12V)^2+(108DV+D^2h+h^2)^2h=0 \tag{8}$$

なる5次方程式を得るというのである．

この式がどのようにして求められたのかは，これだけでは良くわからない．多分次のようにして求めたのであろう．

$$12\pi V=(D+h^{1/3})^2h=(D^2+2Dh^{1/3}+h^{2/3})h$$

であるので整理すれば，

$$h^{5/3}+2Dh^{4/3}+(D^2h-12\pi V)=0$$

となる．ここで三乗化をすれば

$$h^5+8D^3h^4+(D^2h-12\pi V)^3-3\cdot 2Dh^3(D^2h-12\pi V)=0$$

となる．h について整理して，

$$h^5+2D^3h^4+(D^6+72\pi DV)h^3-36\pi D^4Vh^2+3\cdot 12^2\pi^2D^2V^2h-12^3V^3=0$$

である．ここで，h の3次以上の項を平方完成すると

$$h(h^2+D^3h+36\pi DV)^2-12\pi V(9D^4h^2+6\cdot 12\pi D^2Vh+12^2\pi^2V^2)=0$$

となる．低位の項も良く視ると平方が完成できるので，最終的に

$$h(h^2+D^3h+36\pi DV)^2-12\pi V(3D^2h+12\pi V)^2=0$$

となる．$\pi=3$ としてみれば，(8) と同じ方程式である．

『算学啓蒙』の解説に関して親切な注をつけていた建部が，ここでは何の説明も与えていない．これは，「師伝の秘訣」（『発微算法演段諺解』の序文）であり，本書では述べないことにしたのであろう．

10　「算盤代数」と多項式代数

関孝和の『三部抄』は，『解見題之法』，『解隠題之法』，『解伏題之法』より成っているが，『算学啓蒙諺解大成』刊行以前の1685年頃には成立している．『解見題之法』では，傍書法の萌芽が見られ，『解隠題之法』では，「算盤代数」が「立元術」として定式化されている．さらに，『解伏題之法』では，『解見題之法』で導入された傍書法が「立元術」と融合して，確立した．そして，この拡張された「傍書法」によって，連立多元代数方程式から1元の代数方程式を構成する方法（終結式とまとめられる）が述べられ，関連して行列式が定義されているのである．

『三部抄』は稿本で，関流の「師伝の秘訣」とされていたのだが，建部賢弘はその内容を著作として刊行している．このことより，建部自身も『三部抄』の成立に深くかかわっていたからだと見るべきであろう．『三部抄』と『算学啓蒙演段諺解』の関連については，別の機会に更に考察を加えたい．

A.Horiuchi の　論文 "rupture" [4] は，主に『三部抄』を扱っているのであるが，参照すべきである．

佐藤賢一 [14] は，天元術を扱い，その結論で次のように述べている（原文は英語）．

> 「天元術は日本で大いに変遷を遂げたものの，この術が『代数』の対応物になったのかどうかという疑問が起こる．答えは否定的である．日本における変遷も，[天元術が] 開方式の構成の基礎の上に立つという歴史的なパラダイムを破ることはできなかった．また日本においては，天元術による解法の枠組みはこの限界を全く超えなかっし，開方式を構成するという神聖な使命を捨て去ることはなかった．この企画を保っている間は，その演算も公式も代数的なアイデアの産物ではない．
>
> では，そもそも天元術とは何なのか．これを単なる算術とよぶには我々には心理的な抵抗感がある．しかし，本論文での議論で，これは代数のシステムでないことを明らかにした．我々は数学史の樹木図の中に天元術のために新しい枝を付け加えなければならない．天元術は西洋数学のものとは異なる範疇に属していると認識すべきである．」

佐藤賢一は，「天元術は，代数のシステムでない」と結論しているが，その主張は次のように解釈すべである．すなわち，「算盤代数」と「多項式代数」は，同一 (identical) ではないが，標準的に同型 (canonically isomorphic) である．数学では，標準的に同型なものは，同一視する (identify) のが常である．したがって，数学的にいえば，両者は同じと見なすのである．しかし，数学の概念の発生状況を歴史的に考察するのであれば，両者の差異を佐藤賢一のように論ずる必要があろう．

佐藤賢一と A.Horiuchi の結論は相反するが，著者の考えは，本稿のもととなった数セミの記事 [10] とタイでの講演 [9] で発表したように，関孝和と建部賢弘は，「算盤代数」を発見して定式化し応用したのである．

11　文献解説

中国数学史を英語で述べたものとして，中国数学史 [7] がある．また，[17] は『九章算術』の英訳であるが，注釈が詳しく，書名や述語が英訳されているので，英語で東アジア数学を述べるときに参考になる．

我々がここで扱った建部の初期刊本については，もちろん『明治前日本数学史』[11] の第 3 章建部賢弘 (pp266–449) に記述がある．

『研幾算法』は，『数学乗除往来』[20] の遺題に答えたものである．『研幾算法』についての現在進行中の研究としては，藤井康生 [2] や竹之内脩 [18] がある．先行研究としては，『明治前』[11] 第 2 巻の pp.279–289 の紹介，佐藤賢一 [15] の研究がある．

『発微算法演段諺解』は，関全集[3]に収められている関係か,『明治前』[11]においても，第2巻第2章関孝和に短く紹介されているだけで，第3章建部賢弘では項が立てられていない．小川の注釈書[12]は詳しく，影印も載せられている．また，竹之内脩[19]は『古今算法記』の遺題を載せた書物の一つとして,『発微算法演段諺解』を考察している．

『算学啓蒙諺解大成』については，上述のように『明治前』[11]の第2巻pp281–284に一部分が解説されている．また，佐藤賢一[14]は，天元術の受容に関して,『算学啓蒙諺解大成』を扱っている．

『算学啓蒙』それ自体に関しては，中国で多くの書物が出版されている．例えば，李迪[6]，孔国平[5]がある．

『綴術算経』および『不休綴術』には，小川東による多くの研究がある．著者も，[8]で建部賢弘の弧背冪の三つの公式についてのべた．

本稿をまとめるにあたって,『和算史年表』[16]および『日本史年表』[13]を，便利に用いた．

参考文献

[1] 中国歴代算学集成（上巻）．山東人民出版社, 1994.

[2] 藤井康生．研幾算法・術文の注．（原稿）, 2003.

[3] 平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄（編）．関孝和全集．大阪教育図書, 大阪, 1974.

[4] Annick Horiuchi. Sur un point de rupture entre les traditions chinoise et japonaise des mathématiques. *Rev. Hist. Sci.*, Vol. XLII/4, pp. 375–390, 1989.

[5] 孔国平．李冶朱世傑与金元数学．中国数学史大系，王渝生，劉鈍主編の1冊．河北科学技術出版社, 石家庄, 2000.

[6] 李迪．中国数学通史 — 宋元巻．江蘇教育出版社, 1999.

[7] H.-C. Martzloff. *A History of Chinese Mathematics.* Springer, 1997. The French original edition: *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris 1987.

[8] Mitsuo Morimoto. Japanese mathematics in the 18th century, 2001. (Science Research Reports, International Christian University, http://science.icu.ac.jp/srr 2003)

[9] Mitsuo Morimoto. A Chinese root of Japanese traditional mathematics, Wasan, 2003. The 11th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and its Applications, Chiang Mai, Thailand, July 27–31, 2003.

[10] 森本光生．建部賢弘の算盤代数．数学セミナー, pp. 70–73, 8月 2003.

[11] 日本学士院日本科学史刊行会．明治前日本数学史全5巻．岩波書店, 第5刷(第1刷は1954年刊), 1983.

[12] 小川東. 関孝和「発微算法」—現代語訳と解説—. 四日市大学教育研究叢書, No. 5. 大空社, 1994.

[13] 歴史学研究会（編）. 日本史年表. 岩波書店, 第4版, 2001.

[14] Ken'ichi Sato. Reevaluation of *tengenjutsu* or *tianyuanshu*; in the context of comparison between China and Japan. *Historia Scientiarum*, Vol. 5, pp. 57–67, 1995.

[15] 佐藤賢一. 建部賢弘著『研幾算法』の研究. 科学史・科学哲学, 第13号, pp. 26–40, 9月 1996.

[16] 佐藤健一, 大竹茂雄, 小寺裕, 牧野正博. 和算史年表. 東洋書店, 6月 2002.

[17] Kanshen Shen, John N. Crossley, and Athoney W.-C. Lun. *The Nine Chapters on the Mathemtatical Art, Companion and Commentary.* Oxford University Press and Science Press, Beijing, 1999.

[18] 竹之内脩. 研幾算法 — 現代語訳と現代的解釈. 近畿和算ゼミナール報告集, No. 7. 自家出版, 2003.

[19] 竹之内脩. 古今算法記の遺題について. 数理解析研究所講究録, Vol. 1317, pp. 220–226, 5月 2003.

[20] 安富有恒. 数学乗除往来（池田昌意著, 1674). 江戸初期和算選書, No. 6-1. 研成社, 2001.