数理解析研究所講究録 1393 巻 2004 年 88-95

単体的セル分割の単体の数

大阪市立大学・大学院理学研究科　枡田幹也 (Mikiya Masuda)

Guraduate School of Science,

Osaka City University

1. 序

トーリック多様体論は，一言でいえば，代数幾何と組合せ論を結ぶ架け橋である．この理論を通して，組合せ論の問題，結果を代数幾何の観点から見ることができる．また，その逆もしかりである．トーリック多様体論の組合せ論への応用の中で最も際立ったものは，Stanley[12] による McMullen の予想の解決であろう．McMullen の予想とは，単体的凸多面体の面の数の特徴付けを述べたものである．Stanley は，単体的凸多面体に付随する射影的トーリック軌道体に，Poincaré 双対定理，Hard Lefschetz Theorem, Macaulay の定理を用いることにより，単体的凸多面体の面の数による必要条件を得た．一方ほぼ同時期に，Billera-Lee[1] により，これらの必要条件をみたす単体的凸多面体が構成され，McMullen の予想が肯定的に解決された．この結果は，しばしば g-定理と呼ばれている ([3], [6] 参照).

実は，トーリック多様体論を，代数幾何ではなくトポロジーを用いてある程度展開できる ([5], [7])．つまり，トポロジーと組合せ論の架け橋を構築することができる．このとき，組合せ論には，トーリック多様体論に現れるものより広い対象のものが現れ，凸多面体など組合せ論で知られている結果を，これら広い対象に適当な修正を施して拡張することができる．本稿では，この観点から g-定理に対応する結果の一般化を考える．

2. 単体的凸多面体の面の数

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有限個の点の凸包を凸多面体 (convex polytope) という．これら有限個の点は，ある超平面に含まれていないとしても一般性は失わないので，以下そのように仮定する．これは，凸多面体の次元を n と思うことに他ならない．凸多面体 P の部分集合 F が P の面であるとは，$\mathbb{R}^n$ の超平面 H で，H の一方の半空間に P がすっぽり入り，$P\cap H=F$ をみたすものが存在することである．F の次元は，F を含む最小のアフィン空間の次元と定める．余次元 1 の面をファセット (facet) という．凸多面体 P の i 次元面 $(0\le i\le n-1)$ の

数を $f_i(P)$（または単に f_i）と表し，$(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ を P の f**-vector** という．

f-vector の各成分 f_i は自然数であるが，勝手な自然数をとる訳ではない．例えば，P の境界は $n-1$ 次元球面であるから，オイラー数を考えて

$$(2.1) \qquad f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}.$$

また，P は n 次元であるから，頂点の数 f_0 について

$$(2.2) \qquad f_0 \geq n+1.$$

このように，凸多面体の f-vector には，等式，不等式両方の制限があるが，4 次元以上の凸多面体の f-vector の特徴付けは未だなされていない ([15] 参照).

f-vector から，式

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} h_0 t^n &+ h_1 t^{n-1} + \cdots + h_n \\ &:= (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1} \end{aligned}$$

で定義される整数の組 $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ を h**-vector** という．定義から明らかに $h_0 = 1$, $h_1 = f_0 - n$ である．一般に，h_j を f_i たちで表すと，2 項係数が現れた複雑な式となる．h-vector は f-vector と同じ情報を含んでいるが，h-vector の方がしばしば扱いやすい．例えば，上記の (2.1), (2.2) は，h-vector の言葉では，それぞれ

$$(2.4) \qquad (1=) h_0 = h_n, \quad (1=) h_0 \leq h_1$$

とすっきり表される．

凸多面体 P を定める $\mathbb{R}^n$ の有限個の点が一般の位置にあるとき，P の各面は単体である故，このような P を**単体的凸多面体** (simplicial convex polytope) という．単体的凸多面体の f-vector に関しては，次のような特徴付けが得られている．

<u>g-定理</u> (Billera-Lee [1], Stanley [12]). 整数ベクトル $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ (ただし $h_0 = 1$) が，ある n 次元単体的凸多面体の h-vector となる必要十分条件は，次の 3 つの条件がすべて成立ことである．

(1) $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$. (Dehn-Sommerville equations)
(2) $(1=) h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_{[n/2]}$
(3) $h_{i+1} - h_i \leq (h_i - h_{i-1})^{\langle i \rangle}$ $\quad (1 \leq i \leq [n/2] - 1)$

ここで，(1),(2) は (2.4) の一般化と思える．(3) にある記号の意味は以下の通り．自然数 a, i に対して，

$$a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{a_j}{j}$$

$(a_i > a_{i-1} > \cdots > a_j \geq j \geq 1)$ と唯一通りに展開できる．これを用いて

$$a^{\langle i \rangle} := \binom{a_i+1}{i+1} + \binom{a_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{a_j+1}{j+1}$$

と定めたものが，(3) にある記号の意味である．例えば，$a=28, i=4$ ならば

$$28 = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2}$$

より

$$28^{\langle 4 \rangle} = \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{4}{3} = 40$$

<u>g-定理の証明の概略</u>. Billera-Lee[1] が十分性を示し，Stanley[12] がトーリック多様体論を用いて必要性を示した．Stanley の議論は以下の通り．P を n 次元単体的凸多面体とすると，複素 n 次元射影的トーリック多様体（一般に軌道体）X で，X の $2i$ 次ベッチ数が $h_i(P)$ と一致するものがある．したがって，(1) は Poincaré 双対定理より，(2) は Hard Lefschetz Theorem より従う．(3) は，X のコホモロジー環のある商環に Macaulay の定理を用いることにより得られる． □

参考． McMullen[11] が，トーリック多様体論を用いず組合せ論の範疇で条件 (1),(2),(3) の必要性を示したが，組合せ論の範疇での簡明な証明は発見されていないようである．

3. 単体的球面

n 次元単体的凸多面体の境界は，$n-1$ 次元球面の単体分割を与えている．単体分割をもった球面を単体的球面 (simplicial sphere) という．f_i を i 次元単体の数とすれば，単体的球面に対して（もっと一般に任意の単体複体に対して），f-vector, h-vector が同様に定義できる．したがって

問題． g-定理は $n-1$ 次元単体的球面に対しても成立するか．

という問題が自然に生じるが，これに関しては証明もされていないし，反例も見つかっていない．20 年あまり懸案の問題である．

上の問題を意味のあるものとするには，単体的凸多面体から得られない単体的球面が存在することを見る必要があるが，そのようなものが沢山あることが知られている．例えば，基本群が非自明なホモロジー 3 球面 X を単体分割し，それの 2 重懸垂 $\Sigma^2 X$ を考える．Double Suspension Theorem により，$\Sigma^2 X$ は 5 次元球面 S^5 と同相である．また，$\Sigma^2 X$ は，X から導かれる単体分割をもつ．しかし，2 重懸垂によって得られる S^1 のリンクは X 自身であり，これは 3 次元球面と同相ではないから，このようにして得られた単体的 5 次元球面は単体的凸多面体からは得られない．実は，単体的凸多面体から得られない単体的球面が非常に沢山あることが知られている．

4. 単体的セル球面

単体分割とセル分割の中間に位置するものとして，**単体的セル分割** (simplicial cell decomposition) というものがある．単体分割では，2つの単体は高々1個の部分単体で貼りあっているが，2つの単体が2個以上の部分単体で貼りあう事を許したものが，単体的セル分割である．単体的セル分割を考えた位相空間を**単体的セル複体** (simplicial cell complex) という．言うまでもなく，単体複体は単体的セル複体である．2つの2単体を境界で貼りあわせた2次元球面は，単体複体ではないが，単体的セル複体である．単体的セル複体に関しても，f-vector, h-vector が同様に定義される．

定理 4.1 ([8], [13]). 整数ベクトル $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ (ただし $h_0 = 1$) が，S^{n-1} の単体的セル分割の *h-vector* となる必要十分条件は，次の3つの条件がすべて成立ことである．

(1) $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$,
(2) $h_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$,
(3) n が偶数のとき，ある i に対して *(2)* の等号が成立すれば（つまり，ある i に対して $h_i = 0$ ならば），$h_{n/2}$ は偶数.

単体的凸多面体の場合（g-定理）と違って，上記の定理の証明はそれ程難しくない．実際，十分性の証明は容易である．一方，必要条件を示すには，単体複体に対して定義されている face ring（別名 Stanley-Reisner 環）を単体的セル複体に拡張した face ring を用いる．Stanley は，[13] において，この拡張した face ring を導入し，(1),(2) が必要条件であることを示している．(3) が必要条件であることは，[13] で予想され，[8] で証明された．その証明は全く代数的であるが，トポロジーのアイデアが使われている．単体的凸多面体がトーリック多様体（または軌道体）と結びついているように，単体的セル球面は，奇数次のコホモロジー消えているトーラス多様体（または軌道体）と密接に結びついている ([10], [9] 参照).

5. 対称性をもつ単体的セル複体と軌道空間

$\widetilde{\mathcal{P}}$ を $n-1$ 次元単体的セル複体とし，G を $\widetilde{\mathcal{P}}$ の同相写像からなる有限群で $\widetilde{\mathcal{P}}$ の単体を単体に移すものとする．G は $\widetilde{\mathcal{P}}$ の単体の集合上の作用を導くが，この作用が自由であるとき，$\widetilde{\mathcal{P}}$ 上の G 作用は **very free** という．$\widetilde{\mathcal{P}}$ 上の G 作用が very free ならば，軌道空間 $\mathcal{P} := \widetilde{\mathcal{P}}/G$ は再び $n-1$ 次元単体的セル複体となる．単体的セル複体の利点の一つがここにある．$\mathcal{P}$ と $\widetilde{\mathcal{P}}$ の h-vector の関係は次の通り．

補題 5.1. $|G|h_i(\mathcal{P}) = h_i(\widetilde{\mathcal{P}}) + (-1)^i(|G|-1)\binom{n}{i}$

Proof. $f_i(\widetilde{\mathcal{P}}) = |G|f_i(\mathcal{P})$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} h_i(\widetilde{\mathcal{P}})t^{n-i} &= (t-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\widetilde{\mathcal{P}})(t-1)^{n-i-1} \\ &= (1-|G|)(t-1)^n + |G|\Big((t-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\mathcal{P})(t-1)^{n-i-1}\Big) \\ &= (1-|G|)(t-1)^n + |G|\sum_{i=0}^{n} h_i(\mathcal{P})t^{n-i}.\end{aligned}$$

ここで，両辺の t^{n-i} の係数を比較すれば補題の式を得る． □

6. 対称性もつ単体的セル球面

凸多面体が対称性をもつとき，面の数には制限がつく．対称性として最も簡単で興味あるのは，中心対称（中心に関する点対称）である．これに関しては次の結果が知られている．

定理 6.1 ([14] 参照). n 次元単体的凸多面体が中心対称であるとき，その *h-vector* は

$$h_i - h_{i-1} \geq \binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}, \qquad 1 \leq i \leq [n/2]$$

をみたし，$h_i - \binom{n}{i}$ はすべての i に対して 2 で割れる．

注意. n 次元立方体の極（または双対）凸多面体は中心対称な n 次元単体的凸多面体で，$h_i = \binom{n}{i}$ である．したがって，上の定理において，すべての i に対して等号が成立する．

中心対称な単体的凸多面体は，上記の条件以外にも，Dehn-Sommerville equations も当然みたしているが，中心対称な単体的凸多面体の h-vector の完全な特徴付けは未だ得られていない．中心対称は free involution であるが，Stanley の本 [14] には，中心対称に限らない有限位数の free action に関する結果がある．しかし，中心対称の場合と同様，必要十分という形の決定的な結果はない．

定理 6.2. $\widetilde{\mathcal{P}}$ を $n-1$ 次元単体的セル球面，G を（単位群でない）有限群とする．もし，G が $\widetilde{\mathcal{P}}$ に *very free* に作用するならば，$\widetilde{\mathcal{P}}$ の *h-vector* $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ は次を条件をみたす．

(1) $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$,

(2) $h_i \geq \begin{cases} \binom{n}{i} & (i：偶数) \\ (|G|-1)\binom{n}{i} & (i：奇数) \end{cases}$

さらに，不等式の左辺と右辺の差は $|G|$ の倍数．

(3) n が偶数のとき，「奇数の」ある i に対して *(2)* の等号が成立すれば，$h_{n/2}$ は偶数．

注意． (1) 定理 6.2 の条件 (3) における「奇数の」というところは不要と思われる．$|G| = 2$ の場合，これが示せれば，定理 6.2 の 3 つの条件は必要十分となる．

(2) 定理 6.2 の条件 (2) において，$|G| = 2$ の場合は，n 次元立方体の極凸多面体の境界複体が，等号が成立する $n-1$ 次元単体的セル球面の例であるが，$|G| \geq 3$ の場合，等号が成立する $n-1$ 次元単体的セル球面の存在は不明．

7. 単体的セル多様体

定理 4.1 の一般化として，次の問題を考える．

問題． 位相多様体 X を固定し，X の単体的セル分割がとる h-vector を特徴付けよ．

まず，Dehn-Sommerville equations は次のように一般化される．

定理 7.1 ([2] の Theorem 7.44 参照)**．** X を $n-1$ 次元閉多様体，$\mathcal{P}$ を X の単体的セル分割とすると，$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して

$$h_{n-i}(\mathcal{P}) - h_i(\mathcal{P}) = (-1)^i\bigl(\chi(X) - \chi(S^{n-1})\bigr)\binom{n}{i}$$

が成立する．

X が実射影空間 $\mathbb{R}P^{n-1}$ のとき，$\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}P^{n-1}$ の単体的セル分割とすると，2 重被覆 $S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ のより，$\mathcal{P}$ は S^{n-1} の単体的セル分割 $\widetilde{\mathcal{P}}$ で very free な位数 2 の群の作用をもつものを定める．したがって，補題 5.1，定理 6.2 と定理 7.1 より次を得る．

定理 7.2． 整数ベクトル $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ (ただし $h_0 = 1$) が，$\mathbb{R}P^{n-1}$ の単体的セル分割の *h-vector* となるならば，次の 3 つの条件をみたす．

(1) $h_i = h_{n-i} + (-1)^i\frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})\binom{n}{i} \quad ({}^\forall i)$

(2) $h_i \geq r(n,i)$ かつ $h_i \equiv r(n,i) \mod 2$．ここで

$$r(n,i) = \begin{cases} 0 & (i\text{: 奇数}) \\ \binom{n}{i} & (i\text{: 偶数}) \end{cases}$$

(3) n が偶数のとき，「奇数の」ある i に対して *(2)* の等号が成立すれば，$h_{n/2}$ は偶数．

注意． 定理 6.2 の後の注意と同様に，条件 (3) における「奇数の」というところは不要と思われる．また，これが示せれば，定理 7.2 の 3 つの条件は必要十分となる．

実射影空間の次に面白く攻略できそうな閉多様体は，レンズ空間，ポアンカレホモロジー 3 球面，もっと一般に球面を普遍被覆空間に持つ多様体 (topological spherical space form)，複素射影空間などであろう．また，円板の単体的セル分割の h-vector の特徴付けも基本的な面白い問題である．球面の単体的セル分割はトーラス多様体と関係しており，

トーラス多様体は定義よりコンパクトであるが，非コンパクトなトーラス多様体も自然に考えられ，円板の単体的セル分割は非コンパクトなトーラス多様体と関係している ([4]).

8. 結び

組合せ論では，単体的凸多面体（もう少し一般に単体的球面）の面数を主に取り扱っており，トーリック多様体論や（単体複体に対する）Stanley-Reisner 環の理論が中心的な役割を果たしている．しかし，トポロジーの観点からすると，単体的セル複体が自然に現れ，この対象に関して，これまでと類似の理論の展開が期待できる．しかし，類似といっても全く同じではなく，本稿で見たように代数幾何とトポロジーの違いがそこに現れる．

単体的セル複体は単体複体を含む概念であるが，その h-vector の決定は，[13], [8] に見られるように単体複体の h-vector より易しいと推察される．にも関わらず，単体的凸多面体や単体複体に比べ，単体的セル複体の研究は少ない．その理由の一つは，幾何との関連が認識されていなかったためと思われる．しかし，単体的凸多面体が（トーリック多様体論を通して）代数幾何と結びついているように，単体的セル複体はトポロジーと結びついており，[8], [10] にあるように，単体的セル複体の研究にトポロジーの結果，アイデアを使うことが期待できる．単体的凸多面体，単体複体をより深く理解するため，また，代数幾何とトポロジーの違いの認識を深めるためにも，単体的セル分割の研究を進める必要があると感じる．

References

[1] L. J. Billera and C. W. Lee, *Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), 181–185.

[2] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[3] W. Fulton, *An Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 113, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[4] M. Franz and M. Masuda, 準備中.

[5] A. Hattori and M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. 40 (2003), 1–68.

[6] 日比孝之, 可換代数と組合せ論, シュプリンガー現代数学シリーズ, シュプリンガー・フェアラーク東京 1995.

[7] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, Tohoku Math. J. 51:2 (1999), 237–265.

[8] M. Masuda, *h-vector of Gorenstein* simplicial posets*, Adv. in Math. to appear.

[9] M. Masuda, *Theory of toric varieties from the topological viewpoint*, 数理解析研究所講究録 1343 (2003), 105-119.

[10] M. Masuda and T. Panov, *On the cohomology of torus manifolds*, preprint

[11] P. McMullen, *On simple polytopes*, Invent. Math. 113 (1993), 419–444.

[12] R. P. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Adv. in Math. 35 (1980), 236–238.

[13] R. P. Stanley, *f-vectors and h-vectors of simplicial posets*, J. Pure Appl. Algebra 71 (1991), 319–331.

[14] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition, Progress in Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.

[15] G. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, GTM, vol. 152, Springer, 1995.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan

E-mail address: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp