数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 97-108

Combinatorics coming from hyperplane arrangements and the Orlik-Solomon algebra

東京都立大学・理学研究科　川原 行人 (Yukihito Kawahara)
Department of Mathematics,
Tokyo Metropolitan University

超平面配置の補集合上のコホモロジーの代数構造は純組合せ論的に決定される. ここでは反対に、コホモロジー代数によって超平面配置の組合せが決定されるか、という問題についてマトロイドとその Orlik-Solomon 代数という枠組みで考察する. 現在、一般的な取り扱いとしては Falk [Fa] や Yuzvinsky [Yu] のサーベイを参照されたい. ここでは [Ka] において導入した擬マトロイド (quasi-matroid) を用いて述べることにする. 擬マトロイドはアファイン超平面配置の組合せの直接的な抽象化であり、通常のマトロイドの一般化にもなっている. また、超平面配置については幾何学的考察も重要であり、興味深いのであるがそれはまたの機会にすることにする.

第 1,2 節は入門的な内容で、超平面配置の枠組みで考察し、出発点となる事柄を述べる ([OT] を参照). 第 3 節で擬マトロイドに関する定義と基本的性質について述べ、第 4 節でマトロイドの Orlik-Solomon 代数について述べる ([Ka] を参照). 第 5 節において [EF, Fa] などで述べられている予想を紹介する.

1 超平面配置 (Arrangement of hyperplanes)

線形空間や射影空間などにおいて、超平面の有限集合を**超平面配置**と呼ぶ. 本稿では、簡単のため複素線形空間 $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置 $\mathcal{A}$ を扱う. 超平面配置 $\mathcal{A}$ の組合せとして $L := \{\cap\mathcal{B} = \cap_{H\in\mathcal{B}} H : \mathcal{B} \subset \mathcal{A}, \cap\mathcal{B} \neq \emptyset\}$ を考えることが多い. L は 半順序 $Y \leqq X$ を $Y \supseteq X$ と定義することにより半順序集合となり、$\mathcal{A}$ の **Intersection poset** と呼ばれる. 本稿では L の情報をさらに 2 つに分けて考える:

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} : \cap\mathcal{B} \neq \emptyset\}$ は (抽象的) 単体的複体 (すなわち $T \subset S \in \mathcal{E} \Rightarrow T \in \mathcal{E}$ が成立する.) である.
- $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \in \mathcal{E} : \mathrm{r}(\mathcal{B}) = |\mathcal{B}|\}$ (ここで $\mathrm{r}(\mathcal{B}) = \mathrm{codim}(\cap\mathcal{B})$) は単体的複体であり $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}$ を満たす.

(注意) r は階数関数 (rank function) と呼ばれ、マトロイド理論によると単体的複体 $\mathcal{I}$ を与えることと 階数関数 r を与えることは同等である.

一般の超平面配置は平行であるものも許し、それを強調するときには **アファイン (affine)** 超平面配置という. 超平面配置 $\mathcal{A}$ が $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset \iff \mathcal{E} = 2^E$ を満たすとき**中心的 (central)** であるという.

超平面配置の基本操作として、アファイン超平面配置から中心的超平面配置を構成する coning と、逆に、中心的超平面配置からアファイン超平面配置を構成する deconing という操作がある. $\mathcal{A}$ を アファイン超平面配置として $\mathbb{C}^\ell$ の座標を $(x_1,\ldots,x_\ell)$ とする. 超平面 $H \in \mathcal{A}$ が $a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell = 0$ $(a_i \in \mathbb{C})$ で定義されているとすると $\mathbb{C}^{\ell+1}(x_0,x_1,\ldots,x_\ell)$ の内の原点を通る超平面 $cH : a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell = 0$ が考えられる. また、$\mathbb{C}^{\ell+1}$ 内の超平面 $B : x_0 = 0$ が取れる. そこで $\mathbb{C}^{\ell+1}$ 内の超平面配置 $c\mathcal{A} = \{cH : H \in \mathcal{A}\} \cup \{B\}$ を $\mathcal{A}$ の **cone** という. cone のすべての超平面は原点を通るので cone は中心的である. 逆に中心的超平面配置 $\mathcal{C}$ に対して1つの超平面 B を選択することによって、逆の操作によりアファイン超平面配置 $d\mathcal{C}$ が作られ$\mathcal{C}$ の **decone** という (図 1, 2). ちなみに、アファイン超平面配置 $\mathcal{A}$ を射影空間内の超平面配置として考えたとき、B は無限遠超平面とみなすことができる.

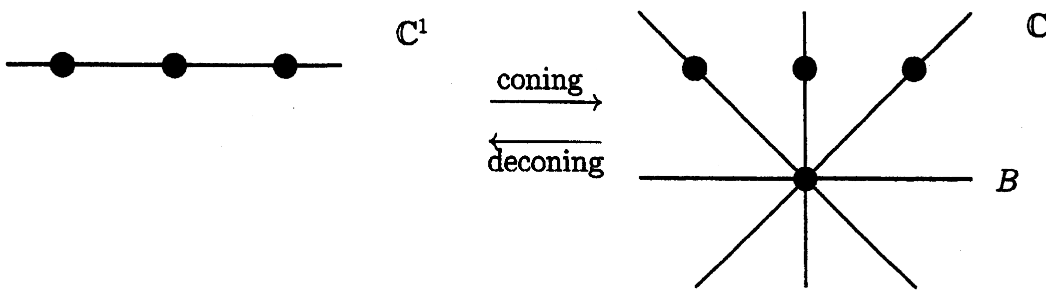


図 1: coning と deconing

例 アファイン超平面配置による単体的複体 $\mathcal{E}$ を図 2 で定義される アファイン超平面配置 $\mathcal{A} = \{1,2,3,4\}$ で考察する. $X := \{1,2\} \in \mathcal{E}$ であり $\mathrm{r}(X) = 2$ である. また、$Y := \{3,4\} \notin \mathcal{E}$ であるので、$\mathrm{r}(Y)$ は定義されていない. これを $\mathcal{A}$ の cone $c\mathcal{A} = \{c1, c2, c3, c4, B\}$ において考える. $cX = \{c1, c2\}$、$cY = \{c3, c4\}$ として $\mathrm{r}(cX) = 2$、$\mathrm{r}(cX \cup \{B\}) = 3$、$\mathrm{r}(cY) = 2$、$\mathrm{r}(cY \cup \{B\}) = 2$ である. したがって

$$X \in \mathcal{E} \iff \mathrm{r}(cX \cup \{B\}) = \mathrm{r}(cX) + 1, \quad Y \notin \mathcal{E} \iff \mathrm{r}(cY \cup \{B\}) = \mathrm{r}(cY)$$

という関係で $\mathcal{E}$ が特徴付けることができる.

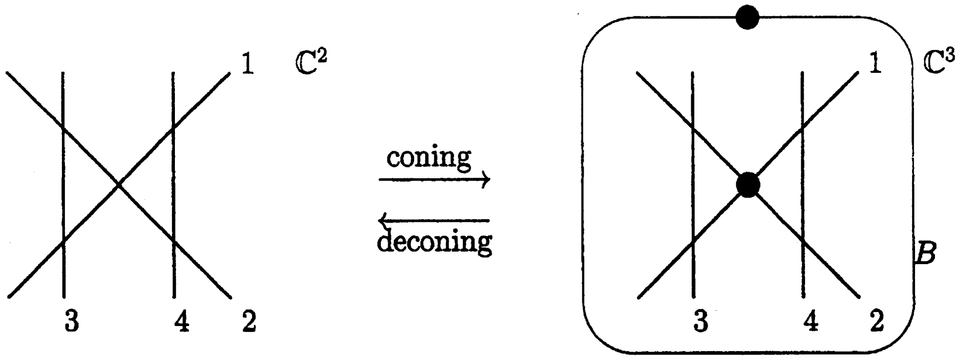
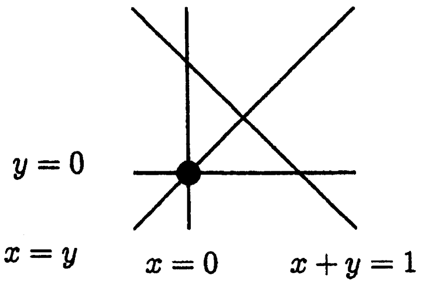


図 2: coning と deconing

2 コホモロジーと Orlik-Solomon 代数

超平面配置 $\mathcal{A}$ の補集合 $U = \mathbb{C}^\ell \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H$ 上のド・ラーム コホモロジー $H^{\cdot}_{\mathrm{DR}}(U)$ は各超平面に対する対数的微分形式で生成される [Br, Brieskorn(1973)]. たとえば、$\mathbb{C}^2(x,y)$ 内の $x=0, y=0, x=y, x+y=1$ で定義される超平面による配置について、$H^{\cdot}_{\mathrm{DR}}(U)$ は $\omega_1 = dx/x$, $\omega_2 = dy/y$, $\omega_3 = d(x-y)/x-y$, $\omega_4 = d(x+y-1)/x+y-1$ で生成される. ただし、簡単な計算で、関係式 $\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega_3 \wedge \omega_1 = 0$ があることがわかる. この関係式は3本の直線が1点で交わるという、超平面配置の組合せの情報により得ることができる.



組合せによりコホモロジーと同形な Orlik-Solomon 代数を構成する. $E(=\mathcal{A})$ を有限集合とし、K を 1 をもつ可換環 $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z})$ とする. E を生成元とする K 上の外積代数を $\bigwedge(E)$ とする ($\bigwedge^0(E) = K$, $\bigwedge^1(E) = \bigoplus_{e \in E} Ke$).

定義 2.1. $\bigwedge(E)$ 上の K 線形微分作用素 $\partial = \partial_E : \bigwedge^p(E) \to \bigwedge^{p-1}(E)$ を次に定義する：

- $\partial_E 1 = 0, \qquad \partial_E e = 1 \qquad (e \in E)$
- $\partial_E(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_k} \wedge \cdots \wedge e_p \qquad (p \geq 2,\ e_j \in E)$

$S=(e_1,\ldots,e_p)$; $e_j\in E$ に対して $e_S:=e_1\wedge\cdots\wedge e_p$ とかくことにする.

補題 2.2. ∂_E は次の性質をもつ:

1. $\partial_E^2=0$,

2. $a\in\bigwedge^p(E)$ と $b\in\bigwedge(E)$ に対して $\partial_E(a\wedge b)=(\partial_E a)\wedge b+(-1)^p a\wedge(\partial_E b)$

定義 2.3. 超平面配置 $\mathcal{A}(=E)$ に対して、$\{e_S:S\notin\mathcal{E}\}\cup\{\partial e_S:S\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{I}\}$ で生成される $\bigwedge(E)$ のイデアルを $I(\mathcal{A})$ とし、商 $A(\mathcal{A}):=\bigwedge(E)/I(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の **Orlik-Solomon 代数** という. 特に、$\mathcal{A}$ が 中心的であるときは $I(\mathcal{A})$ は $\{\partial e_S:S\notin\mathcal{I}\}$ だけで生成されるイデアルである.

当然、Orlik-Solomon 代数は次数つきの非可換な代数である.

定理 2.4 ([OS, Orlik-Solomon(1980)]). $H^p(U,\mathbb{C})\simeq H^p_{\mathrm{DR}}(U)\simeq A^p(\mathcal{A})$

これは、超平面配置の組合せだけによってコホモロジーが定まることを意味する. 逆に、代数 $A(\mathcal{A})$ から $\mathcal{A}$ の組合せ $(\mathcal{E},\mathcal{I})$ (もしくは L) が決まるか? という問題が本稿の主題である. しかし、次の例が知られている.

Rose-Terao の例 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ を図 3 で定義される $\mathbb{C}^3$ 内の 中心的超平面配置とする.

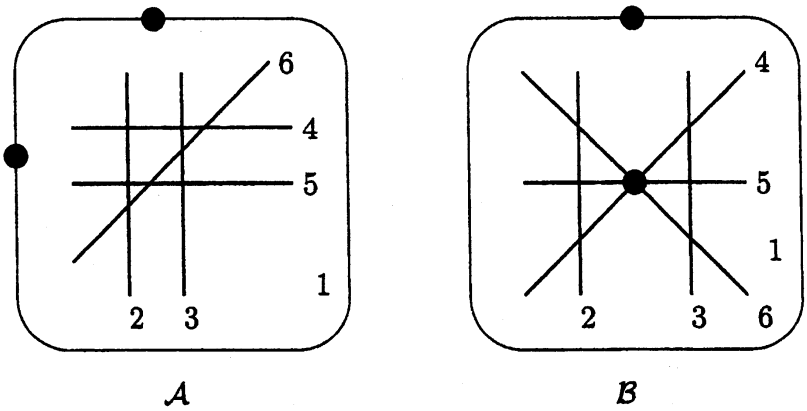


図 3: Rose-Terao の例

超平面 1 の上には、3 重点が $\mathcal{A}$ では 2 つ、$\mathcal{B}$ には 1 つある. つまり、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の組合せが異なっている (正確には L が同形でない). しかし、Orlik-Solomon 代数は同形となることを見よう. 区別するために $E(\mathcal{A})=\{e_1,\ldots,e_6\}$, $E(\mathcal{B})=\{f_1,\ldots,f_6\}$ とする. $I(\mathcal{A})=\langle\partial e_{123},\partial e_{145}\rangle$, $I(\mathcal{B})=\langle\partial f_{123},\partial f_{456}\rangle$ である. 今、線形写像 $\phi:\bigwedge(E(\mathcal{A}))\to$

$\bigwedge(E(\mathcal{B}))$ を $\phi(e_i) = f_i$; $i = 1,2,3,6$, $\phi(e_4) = f_5 - f_4 + f_1$, $\phi(e_5) = f_6 - f_5 + f_1$ で定義する．すると

$$\begin{aligned}
&\phi(\partial e_{123}) = \phi(e_{23} - e_{13} + e_{12}) = f_{23} - f_{13} + f_{12} = \partial f_{123} \\
&\phi(\partial e_{145}) = \phi(e_{45} - e_{15} + e_{14}) \\
&\quad = (f_5 - f_4 + f_1) \wedge (f_6 - f_5 + f_1) - f_1 \wedge (f_6 - f_5 + f_1) + f_1 \wedge (f_5 - f_4 + f_1) \\
&\quad = (f_5 - f_4) \wedge (f_6 - f_5) = f_5 \wedge f_6 - f_4 \wedge f_6 + f_4 \wedge f_5 = \partial f_{456}
\end{aligned}$$

となり、$I(\mathcal{A}) \simeq I(\mathcal{B})$ であるから $A(\mathcal{A}) \simeq A(\mathcal{B})$ となる．これは Orlik-Solomon 代数は同形であり組合せが異なる例を与えている．

3 擬マトロイド (qusai-matroid)

超平面配置 $\mathcal{A}$ に対する $\mathcal{I} = \{S \in \mathcal{E} : \mathrm{r}(S) = |S|\}$ を組合せ的に抽象化したものとしてマトロイドというものがある．通常、有限集合を大文字 $A, B, \ldots$, その要素を小文字 $a, b, \ldots$ でかき、 $S \cup e = S \cup \{e\}$ などの記号法を用いる．一般のマトロイド理論については [Ox, We, Wh] を参照されたい．

E を有限集合 (超平面配置において $\mathcal{A}$ にあたる) とする．

定義 3.1. $\mathcal{I}(\neq \emptyset)$ は単体的複体 (すなわち $S' \subset S \in \mathcal{I} \Rightarrow S' \in \mathcal{I}$ が成立する) であり、

(I) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ かつ $|I_1| < |I_2|$ に対して、$e \in I_2 \setminus I_1$ で $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

を満たすとき、ペア $M = (E, \mathcal{I})$ を **マトロイド (matroid)** という．$\mathcal{I} = \mathcal{I}(M)$ は **マトロイド複体**, **独立集合族** などと呼ばれる．

したがって、中心的超平面配置の組合せはマトロイドで表現されるといえる．アファイン超平面配置 $\mathcal{A} = E$ の組合せは cone $c\mathcal{A}$ のマトロイド $M = (E \cup b, \mathcal{I})$ と付加した超平面 b によって記述される．マトロイド M と基点 b との組 (M, b) は**点つきマトロイド (pointed matroid)** と呼ばれる．

定義 3.2. $\mathcal{I}$ を マトロイド複体とし、$\mathcal{I}$ を含む単体的複体 $\mathcal{E}$ $(\mathcal{I} \subset \mathcal{E})$ が

(Q) $X \in \mathcal{E}$ と X に含まれる $\mathcal{I}$ の極大元 I に対して、$I \cup e \in \mathcal{E} \Rightarrow X \cup e \in \mathcal{E}$.

を満たすとき、複体のペア $Q = (\mathcal{E}, \mathcal{I})$ を **擬マトロイド** と呼ぶことにする．

もし、$\mathcal{E} = 2^E$ であるとき Q はマトロイドと考えることができ、擬マトロイドはマトロイドの拡張 (一般化) となる．マトロイド同様、以下の言葉が定義できる．

- $\mathcal{I}$ のメンバーを **独立集合 (independent set)** という．

- $\mathcal{E}\setminus\mathcal{I}$ のメンバーを**従属集合** (**dependent set**) という.
- 極大な独立集合を**基底** (**base**) という.
- マトロイドの性質から基底のサイズ (要素数) はすべて同じになる. これを Q の**階数** (**rank**) といい、$\mathrm{r}(Q)$ とかく.
- 極小の従属集合 を **サーキット** (**circuit**) という.

さらに $X \in \mathcal{E}$ に対して

- X に含まれる極大の独立集合を X の **基底** (**base**) という.
- X の基底のサイズを X の **階数** (**rank**) といい、$\mathrm{r}(X)$ とかく.
- 階数を変えず X を含む最大の $\mathcal{E}$ のメンバーを X の **閉包** (**closure**) という:

$$\mathrm{cl}(X) = \cup\{Y \in \mathcal{E} : Y \supset X, \mathrm{r}(Y) = \mathrm{r}(X)\}.$$

  (注意: 条件 **(Q)** によって 閉包の定義が well-define となる)

- $\mathrm{cl}(X) = X$ となる $X \in \mathcal{E}$ を **閉集合** (**flat**) という.
- 閉集合全体の集合 $L(Q)$ は poset (半順序集合) になる.

例 1　超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して、第 1 節で定義した $(\mathcal{E},\mathcal{I})$ は擬マトロイドになる: 実際、$I = \mathcal{B}_1 \in \mathcal{I}$ を $X = \mathcal{B}_2 \in \mathcal{E}$ に含まれる極大な部分集合 (基底) とすると、$\cap\mathcal{B}_1 = \cap\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ であり $\mathrm{codim}(\cap\mathcal{B}_1) = |\mathcal{B}_1|$ であるから

$$I \cup \{H\} \in \mathcal{E} \Rightarrow (\cap\mathcal{B}_1) \cap H \neq \emptyset \Rightarrow (\cap\mathcal{B}_2) \cap H \neq \emptyset \Rightarrow X \cup \{H\} \in \mathcal{E}$$

となり $Q(\mathcal{A}) = (\mathcal{E},\mathcal{I})$ は擬マトロイドである.

例 2　点つきマトロイド (M,b) $(M = (E \cup b, \mathcal{I}))$ に対して

$$\mathcal{E} := \{X \subseteq E \mid b \notin \mathrm{cl}(X)\} = \{X \subseteq E \mid \mathrm{r}(X \cup b) = \mathrm{r}(X) + 1\}$$

$\mathcal{I}'' = \mathcal{E} \cap \mathcal{I} = \{I \mid I \cup b \in \mathcal{I}\}$ と定義すると $(\mathcal{E},\mathcal{I}'')$ が擬マトロイドになる. これは、超平面配置でいう deconing に対応している.

逆に、$(\mathcal{E},\mathcal{I}'')$ から (M,b) を構成することができる (すなわち、超平面配置の coning は純組合せ的にすることができる):

定理 3.3 ([Ka]). 擬マトロイド $Q = (\mathcal{E},\mathcal{I}'')$ に対して、点つきマトロイド (M,b) が一意に構成できる. $(M = Q * b$ とかくことにする$)$.

証明の概要.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}} &:= \{I \cup e \mid I \in \mathcal{I}'', e \in E, I \cup e \notin \mathcal{E}\}\\ \mathcal{I}'' * b &:= \{I \cup b \mid I \in \mathcal{I}''\}\\ \mathcal{I} &:= \mathcal{I}'' \cup \tilde{\mathcal{I}} \cup \mathcal{I}'' * b\\ \mathcal{I}' &:= \mathcal{I}'' \cup \tilde{\mathcal{I}}\end{aligned}$$

とすると $\mathcal{I}', \mathcal{I}$ が **(I)** を満たすことをチェックする. すると $M = (E \cup b, \mathcal{I})$ がマトロイドとなり、点つきマトロイド (M, b) に対する擬マトロイドが Q になる. □

したがって、擬マトロイドと点つきマトロイドは同等なものである. そこで乱暴であるが $Q = (M, b)$ とかくことを許すことにする. また、マトロイド M の poset $L(M)$ は 幾何的束 (geometric lattice) であるが、$L(Q)$ は幾何的半束 (geometric semi-lattice [WW]) となる.

定義 3.4. 2つの擬マトロイド $Q_1 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{I}_1)$, $Q_2 = (\mathcal{E}_2, \mathcal{I}_2)$ に対して、

$$\mathcal{E} = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{E}_1, X_2 \in \mathcal{E}_2\}, \quad \mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 \mid I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

とすると $(\mathcal{E}, \mathcal{I})$ は擬マトロイドとなり、Q_1 と Q_2 の**直和**と呼び、$Q_1 \oplus Q_2$ とかくことにする.

一方、点つきマトロイドの圏は [Bry, T. Brylawski (1971)] によって構成されている. その中では、点つきマトロイドの直和を parallel connection という構成法で定義される: 点つきマトロイド (M_1, b_1), (M_2, b_2) に対して b_1 と b_2 を同一視して得られるマトロイドを (M_1, b_1) と (M_2, b_2) の **parallel connection** といい、$P(M_1, M_2; b_1 = b_2)$ とかく.

補題 3.5. $(Q_1 \oplus Q_2) * b = P(Q_1 * b_1, Q_2 * b_2; b_1 = b_2)$

Rose-Terao の例は組合せ的には parallel connection によって得られるのである.

4 Orlik-Solomon 代数

有限集合 E 上で考える. 擬マトロイド $Q = (\mathcal{E}, \mathcal{I}'')$ に対して Orlik-Solomon 代数 $A(Q)$ は超平面配置と同様に定義できる: $I(Q)$ を $\{e_S : S \notin \mathcal{E}\} \cup \{\partial e_S : S \in \mathcal{E}, S \notin \mathcal{I}''\}$ で生成されるイデアルとして、$A(Q) = \bigwedge(E)/I(Q)$ を Q の **Orlik-Solomon 代数**という. 特に、マトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ に対する Orlik-Solomon 代数 $A(M)$ は、$I(M)$ を $\{\partial e_S : S \notin \mathcal{I}\}$ で生成されるイデアルとして $A(M) = \bigwedge(E)/I(M)$ で定義される. $A(M)$ はよい性質をもつ.

補題 4.1. $\partial_E I(M) \subseteq I(M)$

証明. $e_T \partial e_s \in I(M)$ として

$$\partial(e_T \partial e_s) = (\partial e_T)(\partial e_S) \pm e_T(\partial^2 e_S) = (\partial e_T)(\partial e_S) \in I(M).$$

□

したがって ∂_E は

$$\partial_M : A^p(M) \to A^{p-1}(M)$$

を誘導し、次の性質をもつ:

1. $\partial_M^2 = 0$,
2. $a \in A^p$ と $b \in A$ に対して $\partial_M(a \wedge b) = (\partial_M a) \wedge b + (-1)^p a \wedge (\partial_M b)$
3. $(A(M), \partial_M)$ は acyclic である:

$$\partial_M(A^{p+1}(M)) := \mathrm{Im}(\partial_M : A^{p+1}(M) \to A^p(M)) = \mathrm{Ker}(\partial_M : A^p(M) \to A^{p-1}(M))$$

これはマトロイドの場合だけ考えられことである. 一般の擬マトロイド Q では補題 4.1 は成立せず、∂_Q は存在しない.

定理 4.2. Q を擬マトロイド、$M = Q * b$ $(Q = (M, b))$ とするとき、同型

$$A(Q) = \partial_M(A(M))$$

が存在する.

証明の概要. $(A(M), \partial_M)$ が acyclic であることから、短完全系列

$$0 \to \partial(A) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\partial} \partial(A) \to 0$$

が存在する. また、$\partial(\omega) = 1$ となる $\omega \in A^1$ に対して、線形写像

$$t_\omega : \partial(A) \to A : \quad t_\omega(d) = \omega \wedge d$$

が定義でき、t_ω は ∂ の切断 $(\partial t_\omega = 1)$ となる. よって短完全系列は分裂する:

$$0 \to \partial(A) \xrightarrow{t_\omega} A \xrightarrow{s_\omega} \partial(A) \to 0.$$

ここで、s_ω は

$$s_\omega : A \to \partial(A) : \qquad s_\omega(a) = \partial(\omega \wedge a).$$

で与えられる.

一方、マトロイド M は $E=\{e_0,e_1,\dots,e_n\}$ 上にあり、擬マトロイド Q を点つきマトロイド (M,e_0) によるものだとして、Q が $E_0=\{e_1,\dots,e_n\}$ 上にあるとする。ここで、射 $\psi_0:\bigwedge(E_0)\to\bigwedge(E)$ を $\psi_0(e_i)=e_i-e_0$ で定義する. ここで、ψ_0 は短完全系列

$$0\to A^{\cdot}(Q)\xrightarrow{\tilde{\psi_0}}A^{\cdot}(M)\xrightarrow{\partial}\partial(A^{\cdot}(M))\to 0$$

を誘導することをチェックすることができる. したがって、可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^{\cdot}(Q) \arrow[r, "\tilde{\psi_0}"] \arrow[d, "\pi_0"'] & A^{\cdot}(M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & \partial(A^{\cdot}(M)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \partial(A^{\cdot}(M)) \arrow[r, "i"] & A^{\cdot}(M) \arrow[r, "\partial"] & \partial(A^{\cdot}(M)) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

ができる. ここで、 $\pi_0=s_{e_0}\tilde{\psi_0}$ である. したがって、π_0 は同型となる. π_0 を具体的に与えておくと

$$\pi_0(e_i)=\partial(e_0\wedge(e_i-e_0))=e_i-e_0$$

で定義される. □

この定理から、点つきマトロイドの Orlik-Solomon 代数はその基点の取り方によらないことがわかる. また、超平面配置では無限遠超平面を特別視しないで補集合上のコホモロジーを記述していることになる.

今、Q_1, Q_2 を擬マトロイドとし $M_1=Q_1*b_1$, $M_2=Q_2*b_2$ としよう. つまり、$Q_1=(M_1,b_1)$, $Q_2=(M_2,b_2)$ となっている. まず、次がすぐに示せる:

命題 4.3.

$$A(Q_1\oplus Q_2)=A(Q_1)\otimes A(Q_2).$$

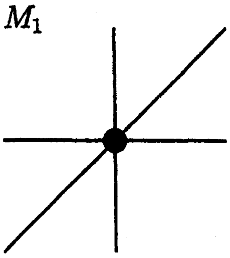
証明. 一般に擬マトロイド $Q=(\mathcal{E},\mathcal{I})$ に対して $I(Q)$ は

$$\{e_S: S\text{ は }\mathcal{E}\text{ に属さない極小の部分集合}\}$$
$$\cup\{\partial e_S: S\in\mathcal{E}\text{ かつ }S\text{ は }\mathcal{I}\text{ に属さない極小の部分集合 (サーキット)}\}$$

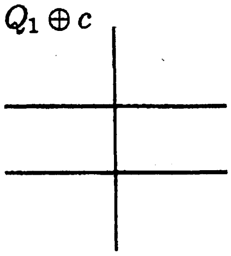
で生成されることがわかる. この生成系を用いると $I(Q_1\oplus Q_2)$ の生成系は $I(Q_1)$ と $I(Q_2)$ の生成系の和になることが確認できる. □

次に、マトロイド M_1 を擬マトロイドとしてみると $M_1*c=M_1\oplus c$ である. すなわち、点つきマトロイド $(M_1\oplus c,c)$ の擬マトロイドが M_1 と考えられる: $M_1=(M_1\oplus c,c)$. 一方、基点を変えて $(M_1\oplus c,b_1)$ の擬マトロイドは $Q_1\oplus c$ となる.

M_1



$Q_1\oplus c$



よって Orlik-Solomon 代数は基点の取り方によらないので

$$A(M_1) = A(Q_1 \oplus c)$$

となる.

さらに $M_1 \oplus Q_2$ を考える:

$$(M_1 \oplus Q_2) * b = M_1 \oplus (Q_2 * b) = M_1 \oplus M_2$$

となっている. つまり、$(M_1 \oplus M_2, b_2) = M_1 \oplus Q_2$ ということである. これらを用いて次の同型がある:

$$\begin{aligned}
\partial A(M_1 \oplus M_2) &= A(M_1 \oplus Q_2) && (b_2 \text{ を基点とした}) \\
&= A(M_1) \otimes A(Q_2) && (\text{命題 } 4.3) \\
&= A(Q_1 \oplus c) \otimes A(Q_2) && (\text{上述の基点の取り替え}) \\
&= A(Q_1 \oplus c \oplus Q_2) && (\text{命題 } 4.3) \\
&= A([Q_1 \oplus Q_2] \oplus c) && (\text{並び替え}) \\
&= \partial A(P(M_1, M_2) \oplus c) && (\text{補題 } 3.5 \text{ と定理 } 4.2) \\
&= A(P(M_1, M_2)) && (c \text{ を基点とした})
\end{aligned}$$

結果をまとめると

定理 4.4. マトロイド M_1, M_2 の parallel connection $P(M_1, M_2)$ に対して、次の同型が存在する:

$$\partial A(M_1 \oplus M_2) \simeq A(P(M_1, M_2)), \qquad A(M_1 \oplus M_2) \simeq A(P(M_1, M_2) \oplus c)$$

したがって、マトロイドが同型でなく Orlik-Solomon 代数が同型である例を parallel connection によって構成することができる.

5 問題と予想

定理 4.4 によると Orlik-Solomon 代数が同型であるが、マトロイドが同型でないものが parallel connection で構成できる. そこで次の問題と予想が考えられる:

問題 parallel connection とならないマトロイドでマトロイドが同型でなく、Orlik-Solomon 代数が同型となるものを見つけよ.

予想 parallel connection とならないマトロイドでは、

Orlik-Solomon 代数が同型 $\Longleftrightarrow$ マトロイドが同型

直和に分解されない擬マトロイドを既約と呼べば、擬マトロイドの言葉で言い直すと

予想　既約な擬マトロイドにおいて、

Orlik-Solomon 代数が同型 $\Longleftrightarrow$ 基点の変換で移り合う

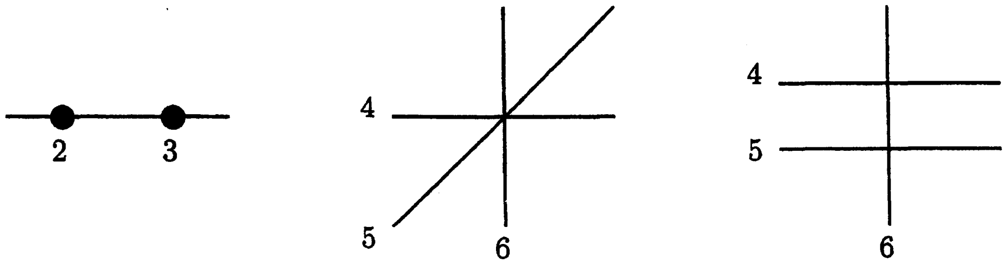
という予想が立てられる．しかし、実はマトロイドにおける truncation という操作においても、Orlik-Solomon 代数の同型が保たれる: マトロイド M_1, M_2 について、$A(M_1) \simeq A(M_2)$ ならば $A(T(M_1)) \simeq A(T(M_2))$ となる．ここで $T(M)$ は マトロイド M の truncation である．そして parallel connection の truncation は parallel connection とはなっていないので、最終的には次の予想になる:

> **予想**　parallel connection、truncation とならないマトロイドにおいて、
>
> Orlik-Solomon 代数が同型 $\Longleftrightarrow$ マトロイドが同型

ただし、parallel connection による構成が本質的であると思われるので、ここでは truncation については [Ox], [Fa] を参照されたい．また、マトロイド N がマトロイド M の truncation となっているとき ($N = T(M)$)、M は N の erection と呼ばれている．parallel connection、truncation とならない (erection を持たない) マトロイドは超平面配置でいうと幾何的には考えやすいものになっているのであるが、詳しくはまたの機会に紹介することにし、Rose-Terao の例の構成法によって紹介する．

Rose-Terao の例　次の 3 つの超平面配置を用意する．

$\mathcal{A}_1/\mathbb{C}^1$　　$\mathcal{A}_2/\mathbb{C}^2$　　$\mathcal{A}_3/\mathbb{C}^2$



ここで超平面配置の積 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ は $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^3$ の超平面配置である ([OT] を参照のこと)．$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ を generic な $\mathbb{C}^2$ で切った $\mathbb{C}^2$ の超平面配置が $d\mathcal{B}$ である．同様に、$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_3$ を generic な $\mathbb{C}^2$ で切ったものが $d\mathcal{A}$ である．当然、$\mathcal{A}_2$ と $\mathcal{A}_3$ の補集合は一致 (または同相) し、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の補集合は同相となる．したがって、そのコホモロジーは同型である．そして、超平面配置の積が擬マトロイドの直積 (マトロイドの parallel connection) に対応していて、generic な空間で切ることが truncation に対応している．

最後に、

問題　parallel connection、truncation とならないマトロイドをもつ超平面配置において、補集合が同相であるなら、マトロイドは同型であるだろうか．

などが考えられて、トポロジーと組合せに関しても興味深いものがある．

参考文献

[Br] E. Brieskorn, *Sur les groupes de tresses*, Séminarire Bourbaki Lecture Notes in Math. **317** Springer, (1973), 21–44.

[Bry] T. Brylawski, *A combinatorial model for series-parallel networks*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 1–22.

[EF] C. Eschenbrenner and M. Falk, *Orlik-Solomon algebras and Tutte polynomials*, J. Algebraic Combinatorics **10** (1999) 189–199.

[Fa] M. Falk, *Combinatorial and algebraic structure in Orlik-Solomon algebras*, European J. of Combin. **22** (2001) 687–698.

[Ka] Y. Kawahara, *On matroids and Orlik-Solomon algebras*, Annals of Combinatorics, to appear.

[OS] P. Orlik and L. Solomon, *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, Invent. Math. **56** (1980) 167–189.

[OT] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, (1992).

[Ox] J. Oxley, *Matroid Theory*, Cambridge Univ. Press. Cambridge, (1993).

[WW] M. L. Wachs and J. W. Walker, *On geometric semilattices*, Order **2** (1986), 367–385.

[We] D.J.A. Welsh, *Matroid Theory* , Academic Press. London, (1976).

[Wh] N. White, editor, *Theory of Matroids* , Cambridge Univ. Press. Cambridge, (1986).

[Yu] S. Yuzvinsky, *Orlik-Solomon algebras in algebra and topology*, Uspehi Mat. Nauk 56 (2001), 87-166 and Russian Math. Surveys 56 (2001).