数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 138-151

3次元ユークリッド空間における isosceles 8-point set の分類

九州大学大学院数理学府　城戸　浩章 (Hiroaki Kido)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1　導入

$\mathbb{R}^k$ を k 次元ユークリッド空間とする。
$x, y \in \mathbb{R}^k$ を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k), y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ とするとき、x と y の距離を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}$ で定める。

Definition

有限集合 $X \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$A(X) = \{d(x, y) | x, y \in X, x \neq y\}$$

とおく。
このとき、$|A(X)| = s$ であるならば、X を $\mathbb{R}^k$ における s-distance set と呼ぶ。
また、2つの s-distance set が互いに相似である場合は同型であるということにする。

2-distance set の点の個数の最大値は、$\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$(Kelly [7])、$\mathbb{R}^3$(Croft [4]) の場合に知られていた。さらに、$\mathbb{R}^k, k \leq 8$ の場合は Lisoněk [9] によって与えられ、次のページの表1のような結果が得られている。(坂内-坂内 [1] より抜粋)

また、$|X| \geq k+2$ であるならば、$\mathbb{R}^k$ における 2-distance set となる X は有限個であることが Einhorn-Schoenberg [5] により示された。

しかし、一般の s-distance set については、E.Bannai-E.Bannai-D.Stanton [2] や A.Blokhuis [3] によって与えられた $|X| \leq \binom{k+s}{s}$ という上限や、$|X| \geq 5$ ならば、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set X は有限個で、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set の点の個数の最大値は7である (Shinohara [10]) ということが知られているが、それ以外のことはほとんど知られていないので、$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の個数が (同型を除いて) 有限個になるのは点の個数がいくつのときか？という問題や、$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の点の個数の最大値はいくつになるのか？という問題について考えたい。

前者の問題について、その答えを a とすると、a は $7 \leq a \leq \binom{3+3}{3} = 20$ の範囲にあることが知られている。また、後者の問題については、その答えを b とすると、b は $12 \leq b \leq \binom{3+3}{3} = 20$ の範囲にあることが知られている。本講究録では、前者の問題の答えの範囲を狭める足がかりとして、また、$\mathbb{R}^3$ における8点からなる 3-distance set を分類

k	$\binom{k+2}{2}$	2-distance set の点の個数の最大値	最大値を与える 2-distance set の個数
1	3	3	1
2	6	5	1
3	10	6	6
4	15	10	1
5	21	16	1
6	28	27	1
7	36	29	1
8	45	45	≥ 1

表 1: 2-distance set の点の個数の最大値

するための足がかりとして、さらに強い条件をつけた isosceles 8-point 3-distance set について述べる。

2 定義と知られている事実について

Definition

$\mathbb{R}^k$ において、n 個の点からなる集合を考える。
この集合の任意の 3 点が 2 等辺 3 角形をなしているとき (同一直線上の 3 点も許す)、この集合は P(n)-set であるという。

さらに、この集合が s-distance set であるときは、isosceles n-point s-distance set と呼ぶことにする。

次に、この P(n)-set や 2-distance set について知られていることをまとめておく。(2-distance set については、表 1 の $k = 3$ の部分を抜粋したものである。)

- $\mathbb{R}^3$ における P(9)-set は存在しない。(Croft [4])
- $\mathbb{R}^2$ における P(7)-set は存在しない。(Kelly [7])
- $\mathbb{R}^2$ における P(6)-set は、正 5 角形とその中心の 6 点からなる集合に限る。(Kelly [7])
- $\mathbb{R}^3$ における 7 点からなる 2-distance set は存在しない。
  (Croft [4], Einhorn-Schoenberg [6])
- $\mathbb{R}^3$ における 6 点からなる 2-distance set で非同型なものは 6 つしかない。(Einhorn-Schoenberg [6])

本講究録では、$\mathbb{R}^3$ における P(8)-set の存在について述べる。
P(8)-set については、下の図 1 で示されたもの (中心から各頂点までの長さが a である正 5 角形を底面とする、高さが a の正 5 角錐を 2 つ用意し、正 5 角形の面で 2 つをくっつけると 7 点からなる立体になり、この 7 点に、くっつけた正 5 角形の中心を加えた 8 点。これは 5-distance set になっている。) の存在は知られているのであるが、"これ以外に P(8)-set は存在するのか?" という問題や、図 1 で示されたもの以外に P(8)-set が存在した場合には、" さらに、3-distance set となっているもの (つまり、isosceles 8-point 3-distance set) は存在するのか?" という問題が現れてくる。

本講究録において示したいことは次の定理である。

Theorem 1
$\mathbb{R}^3$ における P(8)-set は、図 1 で表された 8 点からなる集合以外に存在しない。

これが示されると、次のことも分かる。

Corollary 1
$\mathbb{R}^3$ における isosceles 8-point 3-distance set は存在しない。

この Theorem 1 の証明を Croft [4] の手法を用いて §4 以降で述べる。

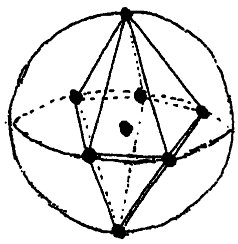

図 1

3 表記について

次の 3 つの言葉を導入する。(apex についてはこの section で、tetrad, pentad については §6 で触れる。)
tetrad : 半球面における 4 点からなる集合
pentad : 半球面における 5 点からなる集合
apex : 3 点以上からなる集合において、残りすべての点から等距離の位置にある点

また、Lemma 18 で、"$\mathbb{R}^3$ における P(8)-set の 8 点を配置することは不可能、もしくは 4 点が同一円周上にある時に限り可能である" ことが分かる。
後者を "conclusion (X)" と呼ぶことにする。

さらに、$P_1, \cdots, P_n$ が P(n)-set であるとする。
このとき、点 P_i の "vertex-number" V(P_i) を、
$V(P_i)$:= (P_iを含む 3 点からなる部分集合をすべて考え、そのうち、P_i が apex となっているものの数)
= ($\angle P_i$を頂角とする 2 等辺 3 角形の個数)
で定義する。

注意 : $\triangle P_iP_jP_k$ が正 3 角形の場合は、P_i, P_j, P_k のいずれも apex であるから、$V(P_1)+\cdots+V(P_n) > \binom{n}{3}$ が成り立つ。
したがって、一般に、$V(P_1)+\cdots+V(P_n) \geq \binom{n}{3}$ が成り立つ。

また、点 P_i から残りの点との距離を考える。距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、$\cdots$、距離 l となる点が u 個あったとき ($a, b, \cdots, l$ は互いに異なり、$r \geq s \geq \cdots \geq u$ とする。また、$r+s+\cdots+u=n-1$)、点 P_i は type$(r, s, \cdots, u)$ の点であるということにする。

4 基本となる補題

Lemma 1

P(8)-set の配置は次の 3 つのいずれかになる。
(i) 2 つの同心球面があって、そのうちの 1 つの球面上に 4 点配置され、もう 1 つの球面上に 2 点もしくは 3 点配置されている。同心球面の中心も P(8)-set の 1 点。
(ii) 1 つの球面上に 5 点もしくは 6 点配置されている。球面の中心も P(8)-set の 1 点。
(iii) 1 つの球面上に 7 点配置され、残りの 1 点は球面の中心。

以後 (i) は 4-2, 4-3 configurations、(ii) は 5-, 6-configurations、(iii) は 7-configuration で表す。

Proof

P(8)-set の 8 点を $P_1, \cdots, P_8$ とする。
8 点集合には $\binom{8}{3} = 56$ 個の 3 角形があるので、§3 の注意より、$V(P) \geq 7$ となる点 P が存在する。この P が P_1 であるとする。

また、$T(m)$ を $T(m) = \frac{1}{2}m(m-1)$ で定義する。
$(T(1) = 0, T(2) = 1, T(3) = 3, T(4) = 6, T(5) = 10, \cdots)$

点 P_1 から残りの点との距離を考え、距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、$\cdots$、距離 l となる点が u 個あったとき ($a, b, \cdots, l$ は互いに異なり、$r \geq s \geq \cdots \geq u$ とする。)、つまり、点 P_1 は type$(r, s, \cdots, u)$ の点であるならば、

$V(P_1) = T(r) + T(s) + \cdots + T(u)$ が成り立つ。
(なぜならば、$T(r)$ は、2 辺が長さ a で、そのはさむ角が$\angle P_1$となる 2 等辺 3 角形の個数、$T(s)$ は、2 辺が長さ b で、そのはさむ角が$\angle P_1$となる 2 等辺 3 角形の個数、$\cdots$、$T(u)$ は、2 辺が長さ l で、そのはさむ角が$\angle P_1$となる 2 等辺 3 角形の個数となるので、これらを加えたものは $V(P_1)$ に一致しなければならない。)

したがって、

$$T(r) + T(s) + \cdots + T(u) \geq 7 \tag{1}$$

が成り立ち、また、

$$r + s + \cdots + u = 7 \tag{2}$$

も成り立つ。
$T(m)$ の値を考えると、(1),(2) を同時に満たすのは、次の場合に限られる。
(i) P_1 は type(4,2,1) もしくは type(4,3)。
(ii) P_1 は type(5,2), type(5,1,1), もしくは type(6,1)。
(iii) P_1 は type(7)。
この (i)〜(iii) は Lemma 1 の (i)〜(iii) に対応している。 ■

P(8)-set の 7 点からなる部分集合が P(7)-set であることに注目することがあるので、次の Lemma を述べておく。

Lemma 2

P(7)-set の配置は次の 5 つのいずれかになる。
(i) 2 つの同心球面に 3 点ずつ配置され、残りの 1 点は同心球面の中心。
(ii) 2 つの同心球面があって、そのうちの 1 つの球面上に 4 点配置され、もう 1 つの球面上に 2 点配置されている。残りの 1 点は同心球面の中心。
(iii) 1 つの球面上に 4 点配置されている。球面の中心も P(7)-set の 1 点。但し、(ii) は満たさない。
(iv) 1 つの球面上に 5 点配置されている。球面の中心も P(7)-set の 1 点。
(v) 1 つの球面上に 6 点配置され、残りの 1 点は球面の中心。

Proof

Lemma 1 と同じようにして示せるので省略する。 ■

また、3 点が同一直線上に並ぶ場合についての考察もしておく。(証明は、Croft [4] の Lemma 6 と同じであるので省略する。)

Lemma 3 (Croft)

P(8)-set の 3 点 P_1, P_2, P_3 がこの順に同一直線上にあるならば、残りの 5 点はすべて P_1P_3 の垂直二等分線が作る平面上の 1 つの円 (正確に言うと、P_2 を中心とする、半径 P_1P_2 の円) の円周上にある。したがって、conclusion (X) が成り立つ。 ■

5 4-2, 4-3 configurations の場合

この section では、Lemma 1 の (i) を満たす P(8)-set の点 $P_1, \cdots, P_8$ の配置について考える。

この section において、P_1 は 2 つの同心球面 S_1, S_2 の中心であるとする。S_1 上には $P_2, \cdots, P_5$ があり、S_2 上には P_6, P_7 (4-3 configuration のときは P_8 も) があるものとし、また、R_1 を S_1 の半径、R_2 を S_2 の半径とする。

Lemma 4

4-2 or 4-3 configuration P(8)-set の 7 点 $P_1, \cdots, P_7$ について、次のいずれかが成り立つ。
(i) conclusion (X) が成り立つ。
(ii) S_1 上の 4 点における異なる 2 点間の距離に、R_1, R_2 以外のものが存在する。
(iii) 任意の 2 点間の距離が R_1 もしくは R_2 である。

Proof

(ii) も (iii) も成り立たなければ (i) が成り立つことを示せばよい。
(iii) が成り立たないとすると、$P_1, \cdots, P_7$ の 2 点間の距離に R_1, R_2 以外のものが存在する。これを c とする。さらに、(ii) も成り立たないときは、この c は、S_1 上の 4 点における異なる 2 点間の距離にはならない。

$P_1P_i = R_1$ or R_2 $(i = 2, \cdots, 7)$ であるから、P_1 を除く 6 点のうちの 2 点間の距離に c となるものが存在する。

$P_2P_6 = c$ ならば、$\triangle P_1P_2P_6$ の 3 つの辺の長さが R_1, R_2, c となるので、2 等辺 3 角形ではない。

したがって、次のことが分かる。

$$S_1 \text{上にある点と } S_2 \text{上にある点との距離は、} R_1 \text{もしくは } R_2 \text{である。} \tag{3}$$

また、距離 c は、S_2 上の 2 点間の距離として存在することから、$P_6P_7 = c$ としてよい。

このとき、$\triangle P_2P_6P_7$ を考えると、(3) より、P_2P_6, P_2P_7 は R_1 もしくは R_2 であるから、2 等辺 3 角形となるためには、$P_2P_6 = P_2P_7$ とならなければならない。

同様に、$\triangle P_3P_6P_7, \triangle P_4P_6P_7, \triangle P_5P_6P_7$ を考えると、$P_3P_6 = P_3P_7, P_4P_6 = P_4P_7, P_5P_6 = P_5P_7$ が成り立たなければならない。

ゆえに、$P_2, \cdots, P_5$ は P_6P_7 の垂直二等分線の作る平面にあり、かつ S_1 上にあるので、この 4 点 $P_2, \cdots, P_5$ は同一円周上にある。

したがって、conclusion (X) が成り立つ。■

Lemma 5

Lemma 4 の (iii) を満たすような P(8)-set は存在しない。

Proof

Lemma 4 の (iii) を満たすとき、$P_1, \cdots, P_7$ からなる集合は、isosceles 7-point 2-distance set である。

しかし、§2 でも挙げたが、7 点からなる 2-distance set は存在しないので、Lemma 4 の (iii) を満たすような P(8)-set は存在しない。■

したがって、Lemma 4 は次のように書き換えられる。

Lemma 6

4-2 or 4-3 configuration P(8)-set の 7 点 $P_1, \cdots, P_7$ について、次のいずれかが成り立つ。
(i) conclusion (X) が成り立つ。
(ii) S_1 上の 4 点における異なる 2 点間の距離に、R_1, R_2 以外のものが存在する。■

Lemma 7

Lemma 4 の (ii) を満たす 4-2 or 4-3 configuration P(8)-set を考える。
このとき、S_1 上の 4 点においては、異なる 2 点の組は $\binom{4}{2} = 6$ 組存在するが、6 組のうち高々 4 組に入っている距離が R_1 もしくは R_2 ならば (つまり、R_1 と R_2 以外の距離が 2 組以上に入っているならば)、conclusion (X) が成り立つ。

Proof

$P_2P_3 = c, P_4P_5 = d$ とする。($c \neq R_1, c \neq R_2, d \neq R_1, d \neq R_2$ であるが、$c = d$ であってもよい。)
このとき、$P_2P_6, P_3P_6, P_4P_6, P_5P_6$ はいずれも R_1 もしくは R_2 であったから、$\triangle P_2P_3P_6$, $\triangle P_4P_5P_6$ が 2 等辺 3 角形となるためには、$P_2P_6 = P_3P_6$ かつ $P_4P_6 = P_5P_6$ が成り立たなければならない。
同様に、$P_2P_7 = P_3P_7$ かつ $P_4P_7 = P_5P_7$ も成り立たなければならない。
このことから、P_6, P_7 は P_2P_3 の垂直二等分線の作る平面と P_4P_5 の垂直二等分線の作る平面の共有部分にある。

P_2P_3 の垂直二等分線の作る平面と P_4P_5 の垂直二等分線の作る平面の共有部分については、次の 2 つの場合がある。
(i) 2 つの平面が同一であるため、共有部分は平面。
(ii) 1 本の直線。(P_1 はこの直線上にあることに注意しておく。)

(i) の場合、P_2P_3 と P_4P_5 は平行である。
ゆえに、P_2, P_3, P_4, P_5 を含む平面が存在する。
また、P_2, P_3, P_4, P_5 は S_1 上にもあるので、この 4 点は同一円周上にある。
したがって、conclusion (X) が成り立つ。

(ii) の場合、直線と S_2 の交点は 2 点しかないので、P_6 と P_7 の位置は決まる。
4-3 configuration のときは、P_8 が S_2 上に取れず、不適。
一方、4-2 configuration のときは、P_1 がこの直線上にあることから、P_6, P_1, P_7 はこの順に同一直線上にあることになる。
したがって、Lemma 3 より、conclusion (X) が成り立つ。(厳密に言うと、P_2, P_3, P_4, P_5 も S_2 上になければならなくなるので不適。)

また、$P_2P_3 = c, P_3P_4 = d$ としたときも、同様の議論を繰り返せばよい。(但し、2つの平面の共有部分についての場合分けの (i) の場合は現れない。) ■

Lemma 8

Lemma 4 の (ii) を満たす 4-2 or 4-3 configuration P(8)-set を考える。
このとき、S_1 上の 4 点においては、異なる 2 点の組は 6 組存在するが、6 組のうち、R_1 と R_2 以外の距離が唯 1 組にだけ入っているならば、conclusion (X) が成り立つ。

Proof

$P_2P_3 = c$ としてよい。($c \neq R_1, c \neq R_2$)
このとき、$P_1, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ の 6 点からなる集合は 2-distance set になる。

§2 でも述べたように、$\mathbb{R}^3$ 上の 6 点からなる 2-distance set で非同型なものは 6 つしかないことが知られている。下の図 2 で示されているものがその 6 つで、6 つのうちの 2 つは正方形の 4 点を含み、残りの 4 つは正 5 角形の 4 点を含んでいる。正方形の 4 点や正 5 角形の 4 点は同一円周上にあるので、conclusion (X) が成り立つ。 ■

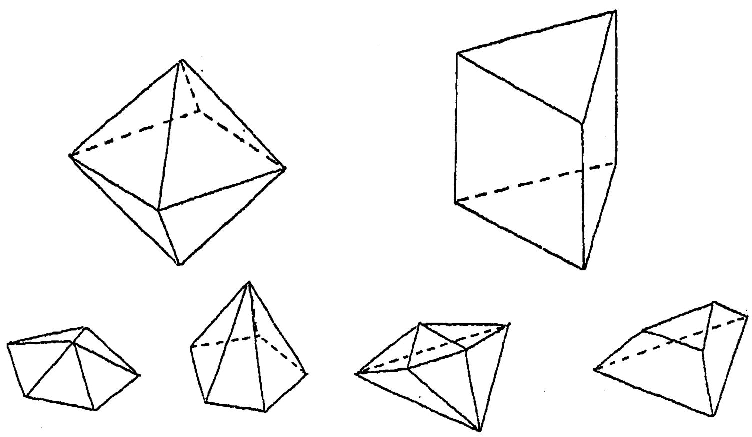

図 2 (Einhorn-Schoenberg [6]より抜粋)

Lemmas 6-8 より、次のことが成り立つ。

Lemma 9

任意の 4-2 or 4-3 configuration に対して、conclusion (X) が成り立つ。 ■

6 5-, 6-configurations の場合

1 つの球面上に 5 点もしくは 6 点配置されている場合は、Croft [4] における §6 での議論を直接適用することが出来る。次の 4 つの Lemmas 10-13 の証明は Croft [4] にあるので、証明は省くことにする。

Lemma 10 (Croft)

P(8)-set が次のように構成されているとする。

・P_1 は球面 S の中心。

・S 上に $P_2, P_3, P_4, \cdots$ がある（少なくとも 3 点、多くても 6 点)。

・少なくとも 1 点 (P_8) は S 上にない。

このとき、S 上にある点たちは、S のある半球面上によせ集められている。 ■

Lemma 11 (Croft)

P(8)-set の 5 点からなる部分集合が半球面 H 上にあるとする (Lemma 10 より、そのように仮定することが出来る。また、この部分集合を pentad と呼ぶことにしていた。)。このとき、conclusion (X) が成り立つ、もしくは次の 3 つが成り立つ。

(i) 5 点のうちの 2 点が、残りの 3 点から等距離の位置にあるということはない。

(ii) 5 点のうちの 1 点が、残りの 4 点から等距離の位置にあるということはない。

(iii) pentad のある部分集合 tetrad が 2-distance set ならば、4 点のうちの 1 点は、残りの 3 点から等距離の位置にある。 ■

Lemma 12 (Croft)

P(8)-set の 5 点 $P_1, \cdots, P_5$ が半球面上にあり、かつ、s-distance set ($s \geq 3$) ならば、conclusion (X) が成り立つ。 ■

Lemma 13 (Croft)

P(8)-set の 5 点 $P_1, \cdots, P_5$ が半球面上にあり、かつ、2-distance set ならば、conclusion (X) が成り立つ。 ■

Lemmas 12,13 より、次のことが成り立つ。

Lemma 14

任意の 5- or 6-configuration に対して、conclusion (X) が成り立つ。 ■

7　7-configurationの場合

このsectionでは、Lemma 1の(iii)を満たすP(8)-setの点$P_1, \cdots, P_8$の配置について考える。

P_1を球面Sの中心とすると、$P_2, \cdots, P_8$はS上にある。

このとき、$P_2, \cdots, P_8$の7点からなる集合がP(7)-setであることに注目すれば、次のことが成り立つ。

Lemma 15

$P_2, \cdots, P_8$がLemma 2の(ii)~(v)のいずれかを満たすP(7)-setの7点となっているとき、conclusion (X)が成り立つ。

Proof

$P_2, \cdots, P_8$がLemma 2の(ii)~(v)のいずれかを満たしているとする。
(ii)~(v)にある球面の中心はP_2であるとしてよい。

このとき、$P_3, \cdots, P_8$のうちの少なくとも4点は、P_2を中心とする半径aの球面上かつ球面S上にある。これは、$P_3, \cdots, P_8$のうちの少なくとも4点は同一円周上にあることを示している。

したがって、conclusion (X)が成り立つ。■

Lemma 16

$P_2, \cdots, P_8$はLemma 2の(i)を満たすP(7)-setの7点にならない。

Proof

$P_2, \cdots, P_8$がLemma 2の(i)を満たしていると仮定する。
(i)にある球面の中心はP_2であるとしてよい。

このとき、P_3, P_4, P_5は、P_2を中心とする半径a'の球面S'上かつ球面S上(つまり、1つの円周上)にあり、P_6, P_7, P_8は、P_2を中心とする半径a''の球面S''上かつ球面S上にある。

$\mathbb{R}^3$上の7点からなる2-distance setは存在しないので、7点$P_2, \cdots, P_8$のうちの異なる2点間の距離にc $(c \neq a', c \neq a'')$となるものが存在する。

$P_2P_i = a'$ or a'' $(i = 3, \cdots, 8)$であるから、P_2を除く6点のうちの2点間の距離にcとなるものが存在する。

$P_3P_6 = c$ならば、$\triangle P_2P_3P_6$の3つの辺の長さがa', a'', cとなるので、2等辺3角形ではない。

したがって、次のことが分かる。

$$S'\text{上にある点と }S''\text{上にある点との距離は、}a'\text{もしくは }a''\text{である。} \tag{4}$$

また、距離cは、同一球面上の2点間の距離として存在することから、$P_6P_7 = c$としてよい。

このとき、$\triangle P_3P_6P_7$ を考えると、(4) より、P_3P_6, P_3P_7 は a' もしくは a'' であるから、2等辺3角形となるためには、$P_3P_6 = P_3P_7$ とならなければならない。

同様に、$\triangle P_4P_6P_7, \triangle P_5P_6P_7$ を考えると、$P_4P_6 = P_4P_7, P_5P_6 = P_5P_7$ が成り立たなければならない。

ゆえに、P_3, P_4, P_5 は P_6P_7 の垂直二等分線の作る平面にあり、かつ S' 上かつ S 上にある。

しかし、P_6P_7 の垂直二等分線の作る平面と S' と S の交点は高々2点しかないので矛盾が生じる。

したがって、$P_2, \cdots, P_8$ は Lemma 2 の (i) を満たす P(7)-set の7点にならない。 ■

Lemmas 15, 16 より、次のことが成り立つ。

Lemma 17

7-configuration に対して、conclusion (X) が成り立つ。 ■

Lemmas 1, 9, 14, 17 より、次のことが成り立つ。

Lemma 18

P(8)-set が存在するならば、conclusion (X) が成り立つ。 ■

これ以降の Lemmas についての証明は省略する。

8 conclusion (X) における4点の配置について

Lemma 18 より、P(8)-set の4点 $P_1, \cdots, P_4$ は同一円周上にある。この4点 $P_1, \cdots, P_4$ の配置について、次のことが成り立つ。

Lemma 19 (Croft)

P_1, P_2, P_3, P_4 は正方形の4点、もしくは正5角形の4点である。 ■

9 正方形の4点を含むP(8)-setの構成

Lemma 20 (Croft)

P(8)-set の4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は、1辺の長さが1の正方形をなしているものとする。この4点を $P_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), P_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), P_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ とし、また、正方形の中心 (0,0,0) を O、正方形を含む平面を Π とする。

このとき、残りの点は、次の2つのいずれかにある。

(i) O を通り、Π に垂直な直線 L 上

(ii) 次の $Q_1, \cdots, Q_8$ のいずれか

$Q_1 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), Q_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), Q_3 = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), Q_4 = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}),$

$Q_5 = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), Q_6 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}), Q_7 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), Q_8 = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
(四角形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ と四角形 $Q_5Q_6Q_7Q_8$ はともに1辺の長さが $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の正方形。) ■

Lemma 21 (Croft)

Lemma 20 の $Q_1, \cdots, Q_8$ において、$Q_iQ_j = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ならば、Q_i と Q_j は隣接しているということにする。(例えば、Q_1 と Q_2 は隣接している。)
このとき、次のことが成り立つ。
隣接した Q_i と Q_j は P(8)-set の2点とはならない。
また、P(8)-set には、3点以上の Q_i たちが含まれてはならない。 ■

Lemma 22

正方形の4点を含むような P(8)-set が存在するならば、正方形の4点を除く4点は、L 上に2点と Q_i, Q_j $(i, j = 1, \cdots, 8$。但し、Q_iと Q_jは隣接していない$)$ のような配置になっている。 ■

Lemma 23

正方形の4点を含むような P(8)-set は存在しない。 ■

10　正5角形の4点を含む P(8)-set の構成

Lemma 24 (Croft)

P(8)-set の4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は正5角形の4点であるとする (P_4 と P_1 の間に "gap" があるものとする)。また、正5角形を含む平面を Π とする。
このとき、残りの点は、次のいずれかにある。
(i) 正5角形の残りの点 T
(ii) $\triangle QP_4P_1$ と $\triangle QP_2P_3$ をともに正3角形にする点 Q
(このような Q は2点あるので Q_1, Q_2 としておく)
(iii) 正5角形の中心 O を通り、Π に垂直な直線 L 上 ■

Lemma 25 (Croft)

P_1, P_2, P_3, P_4, T, Q は P(8)-set の6点とはならない。
但し、Q は Q_1 と Q_2 のいずれかを表しているものとする。 ■

Lemma 26

図1で表された8点からなる集合以外に、正5角形の4点を含むような P(8)-set が存在するならば、正5角形の4点を除く4点は、L 上に2点と Q_1, Q_2 のような配置になっている。 ■

Lemma 27
正5角形の4点を含むようなP(8)-setは、図1で表された8点からなる集合に限る。■

11 Theorem 1の証明の完結

まず、P(8)-setが存在するならば、Lemma 1の(i)〜(iii)のいずれかが成り立つのだが、いずれの場合も、Lemmas 9, 14, 17より、conclusion (X)(4点が同一円周上にある)が成り立つことが分かった。

Lemma 19より、同一円周上の4点は、正方形の4点もしくは正5角形の4点である。正方形の4点の場合だと、Lemma 23より、P(8)-setは存在せず、正5角形の4点の場合だと、Lemma 27より、P(8)-setは図1で表された8点からなる集合に限るので、$\mathbb{R}^3$におけるP(8)-setは図1で表された8点からなる集合以外に存在しない。■

12 今後の課題

今後の課題としては、次のようなものが挙げられる。
(i) $\mathbb{R}^3$におけるP(7)-setは、3ページの図1の部分集合や、正8面体の6点に、正8面体の中心を加えた7点からなる集合X以外に存在するか？
また、isosceles 7-point 3-distance setは、上の集合X以外に存在するか？
(ii) $\mathbb{R}^3$における7点からなる3-distance setで、互いに同型でないものは有限個であるのか？(もし無限個であれば、頂点数をどれくらい大きくすれば有限個になるのか？)
(iii) (ii)の課題を一般の次元kに拡張すればどうなるか？
つまり、$\mathbb{R}^k$における3-distance setで、頂点数をどれくらい大きくすれば互いに同型でないものは有限個になるのか？
(iv) 2ページの表1の3-distance set versionを作成できないか？
(v) 3-distance setの3つの距離の比はある程度定まるのか？
(Larman-Rogers-Seidel [8]の拡張)

参考文献

[1] 坂内英一、坂内悦子、球面上の代数的組合せ理論、シュプリンガー・フェアラーク東京、1999.

[2] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, *An upper bound for the cardinality of an s-distance subsets in real Euclidean space, II*, Combinatorica **3** (1983), 147-152.

[3] A. Blockhuis, *Few-distance sets*, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

[4] H. T. Croft, *9-point and 7-point configuration in 3-space*, Proc. London. Math. Soc. (3), **12** (1962), 400-424.

[5] S. J. Einhorn, I. J. Schoenberg, *On Euclidean sets having only two distances between points I*, Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A69=Indag. Math. **28** (1966), 479-488.

[6] S. J. Einhorn, I. J. Schoenberg, *On Euclidean sets having only two distances between points II*, Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A69=Indag. Math. **28** (1966), 489-504.

[7] L. M. Kelly, *Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points*, Amer. Math. Monthly, **54** (1947), 227-229.

[8] D. G. Larman, C. A. Logers, and J. J. Seidel, *On two-distance sets in Euclidean space*, Bull. London Math. Soc., **9** (1977), 261-267.

[9] P. Lisoněk, *New maximal two-distance sets*, J. Comb. Theory, Ser. A77 (1997), 318-338.

[10] M. Shinohara, *Classification of Three-Distance Sets in Two Dimensional Euclidean Space*, (accepted).