数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 52-60

アソシエーションスキームの半直積とクリフォード理論

信州大学・理学部 花木 章秀 (Akihide Hanaki)
Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science, Shinshu University

1 はじめに

(可換とは限らない) アソシエーションスキームの表現論を考えるとき、有限群の表現に対して知られていることが、どのように一般化されるかを考えるのは自然なことである。ここでは有限群の指標 (表現) に対して知られている Clifford 理論がアソシエーションスキームに対して成り立つのかどうかを考える。

記号や定義は Zieschang [6] と同じものを用いる。また講義ノート [4] も参考にして頂きたい。アソシエーションスキームの具体例は as12-40 のように表すことにするが、これは [5] の分類表の位数 12 の 40 番目という意味である。[5] では多くの具体例とその指標表を確認することができる。

講演では group-graded algebra という言葉を Curtis - Reiner [1] にしたがって用いたが、土井幸雄氏 (岡山大) に標準的ではないとのコメントを頂いたため、この報告集では Dade [2] にしたがった用語に変更した。講演時にも言ったが、タイトルは講演の前半部分を示しており、不適切と思われるがご容赦願いたい。

まず有限群とその正規部分群に関する Clifford の定理を確認しておこう。G を有限群とし H をその正規部分群とする。$\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$ と $g \in G$ に対して

$$\varphi^g(h) := \varphi(ghg^{-1})$$

で φ^g を定めれば $\varphi^g \in \mathrm{Irr}(H)$ である。

$$T := \{g \in G \mid \varphi = \varphi^g\}$$

とおく。$\mathrm{Irr}(G \mid \varphi)$ で、G の既約指標でその H への制限が φ を既約因子に含むもの全体を表す。このとき次が成り立つ。

Theorem 1.1 (Clifford). (1) $\mathrm{Irr}(T \mid \varphi) \to \mathrm{Irr}(G \mid \varphi)$ $(\eta \mapsto \eta^G)$ は全単射である。

(2) $\chi \in \mathrm{Irr}(G \mid \varphi)$ に対して、ある自然数 e があって $\chi_H = e\sum_{t\in T\backslash G}\varphi^t$ である。

(3) ある $\chi \in \mathrm{Irr}(G \mid \varphi)$ があって $\chi_H = \varphi$ ならば $\mathrm{Irr}(G \mid \varphi) = \{\chi\tau \mid \tau \in \mathrm{Irr}(G/H)\}$ である。

アソシエーションスキームにおいて、有限群の正規部分群に対応する概念として normal closed subset というものがある。Normal closed subset に対して Clifford 型の定理が成り立つことを期待したが、次のように反例がある。

Example 1.2 (as12-40). as12-40 の指標表は以下の通りである。

	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	m_i
χ_1	1	1	2	2	2	2	2	1
χ_2	1	1	2	-1	-1	-1	-1	2
χ_3	1	-1	0	-1	-1	1	1	3
χ_4	2	0	-2	1	1	-1	-1	3

$H := \{g_0, g_1, g_2\} \lhd G$ であり、H の指標表は

	g_0	g_1	g_2	m_i
φ_1	1	1	2	1
φ_2	1	1	-2	1
φ_3	1	-1	0	2

である。

$$\begin{aligned}(\chi_1)_H &= \varphi_1, & (\chi_2)_H &= \varphi_1,\\ (\chi_3)_H &= \varphi_3, & (\chi_4)_H &= \varphi_2 + \varphi_3.\end{aligned}$$

であることが確認でき Clifford 型の定理は成り立たないことが分かる。

この例から Clifford 型の定理のためには normal という条件は弱すぎるということが分かる。アソシエーションスキームにはもう一つ **strongly normal** という概念があり、有限群の場合には normal であることと strongly normal であることは同値である。そこで strongly normal closed subset について Clifford 型の定理が成り立つことを期待する。一般の場合には今のところ未解決で、この講演では可換なアソシエーションスキームとその strongly normal closed subset に対して Clifford 型の定理が成り立つことを紹介した。

2 アソシエーションスキームの半直積

まずは、非常に特別な場合を考える。Zieschang [6] で定義しているアソシエーションスキームの半直積の場合である。

(X, G) をアソシエーションスキームとし Θ を有限群とする。また準同型 $\Theta \to \mathrm{Aut}(X, G)$ が与えられ Θ が (X, G) へ作用しているものとする。このとき**半直積** $(X, G)\Theta$ を以下のように定義する。集合としては $(X, G)\Theta = (X \times \Theta, G \times \Theta)$ であり、関係は

$$((x, \zeta), (y, \eta)) \in (g, \theta) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (y\theta, z) \in g, \quad \zeta\theta = \eta$$

によって定める。半直積はアソシエーションスキームの条件を満たし、その**構造定数** (intersection number) は以下のようになる。

$$p_{(d,\varepsilon)(e,\zeta)}^{(f,\eta)} = \delta_{\varepsilon\zeta,\eta}\, p_{d\zeta,e}^{f}$$

σ_g, $\sigma_{(g,\zeta)}$ をそれぞれ $g \in G$, $(g, \zeta) \in G \times \Theta$ の隣接行列とする。構造定数に関する式から $\sigma_{(g,\zeta)}$ を $\zeta\sigma_g$ と書けば

$$\sigma_g\zeta = \zeta\sigma_{g\zeta}$$

であり、それ以外の積は矛盾なく定義されることが分かる。これは半直積 $(X, G)\Theta$ の隣接代数が Θ の (X, G) の隣接代数上の **skew group ring** であることを意味している。Skew group ring に対して Clifford 型の定理が成り立つことが知られているが、より一般に、次の節で説明する crossed product について同様の定理が成り立つ。

3 Group-graded algebra と crossed product

ここでは Dade の論文 [2] にしたがって group-graded algebra に関する説明をする。簡単のため、考える環は代数閉体 F 上の有限次元 algebra のみとし、また加群も F 上有限次元のもののみを考える。Algebra は単位元をもつものとする。

S を有限群とする。F-algebra A が $A = \bigoplus_{s\in S} A_s$ と F-subspace の直和に分解していて

(1) $A_sA_t \subseteq A_{st}$ for $s, t \in S$

を満たすとき A を S-**graded algebra** という。A が S-graded algebra であれば A_1 はその F-subalgebra である。ここで等号が成り立つとき、すなわち

(2) $A_sA_t = A_{st}$ for $s, t \in S$

であるとき A を **strongly S-graded algebra** という。また S-graded algebra A が

(3) 任意の $s \in S$ に対して A_s は A の unit a_s を含む

という条件を満たせば、S が有限群であることなどから、これは (2) の条件を満たす。(3) を満たす S-graded algebra は有限群 S の環 A_1 上の **crossed product** として表されることが知られている [2, Theorem 5.10]. A が crossed product であれば A は右加群と見ても、左加群と見ても A_1-free で free basis として $\{a_s \mid s \in S\}$ を取ることができる。以下で crossed product に関する Clifford 理論を簡単に説明する。この部分を理解するためだけならば Dade [2] よりも Curtis – Reiner [1, §11] の方が分かりやすいと思う。

A を crossed product とし $a_s \in A_s$ を A の unit とする。既約右 A_1-加群 L 対して

$$L^A = L \otimes_{A_1} A = \bigoplus_{s\in S} L \otimes A_s = \bigoplus_{s\in S} L \otimes a_s$$

であり $L \otimes a_s$ は右 A_1-加群である。また $a'_s \in A_s$ も unit であるとすると $L \otimes a_s \cong L \otimes a'_s$ が成り立つ。よって

$$T := \{t \in S \mid L \otimes a_s \cong L\}$$

は well-defined で S の部分群になる。このとき次が成り立つ。

Theorem 3.1 (Clifford Theorem for Crossed Products). A を crossed product とし上の記号を用いる。M を既約右 A-加群とし L を M_{A_1} の既約部分加群とする。$T := \{t \in S \mid L \otimes a_s \cong L\}$ とおくとき次が成り立つ。

(1) M_{A_1} は semisimple で、ある自然数 e に対して $M_{A_1} = e \bigoplus_{t\in T\backslash S} L \otimes a_t$ である。

(2) $B := \sum_{t\in T} A_t$ とおく。このとき $\mathrm{Irr}(B \mid L) \to \mathrm{Irr}(A \mid L) \quad (N \mapsto N^A)$ は全単射である。

アソシエーションスキームの半直積 $(X, G)\Theta$ の隣接代数が Θ の FG 上の crossed product であることは明らかである。よってこれについて Clifford 型の定理が成り立つ。また半直積でなくても以下のように crossed product となる例はたくさん存在する。

(X,G) をアソシエーションスキームとし H を G の strongly normal closed subset とする。すなわち剰余スキーム $(X/H, G//H)$ が thin (本質的に有限群) であるとする。このとき $G = \bigcup_{g^H \in G//H} HgH$ は G の分割になる。

$$\mathbb{C}G = \bigoplus_{g^H \in G//H} \mathbb{C}(HgH)$$

は自然に $G//H$-graded algebra である。ただし $K \subset G$ に対して $\mathbb{C}K = \bigoplus_{g \in K} \mathbb{C}\sigma_g \subset \mathbb{C}G$ であるとする。一般にこれは crossed product ではないが、各 $\mathbb{C}(HgH)$ が unit を含めば crossed product である。Crossed product であれば $|H| = |HgH|$ が任意の $g \in G$ に対して成り立ち、また (X,G) が可換のときはこの逆も正しいことが後で示される。非可換の場合に逆が正しいかどうかは、今のところ分からない。

Example 3.2 (半直積でない crossed product, as14-7).

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
\hline
2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

で定義されるアソシエーションスキームは半直積で書くことはできないが crossed product で表される。したがって Clifford 型の定理が成り立ち、指標表は以下の通りである。

	g_0	g_1	g_2	g_3	m_i
χ_1	1	6	3	4	1
χ_2	1	6	-3	-4	1
χ_3	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	6
χ_4	1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	6

4 可換アソシエーションスキームに対する Clifford 理論

前の節では隣接代数が crossed product になるという強い条件の元で Clifford 型の定理を考えた。より一般の場合にはどのようになっているであろうか。まずは簡単な例を見てみる。

Example 4.1 (crossed product でない場合, as06-5 $\subset$ as12-39 $\subset$ as24-360). as24-360 は以下の指標表をもつ。

	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	m_i
χ_1	1	1	2	2	2	2	2	6	6	1
χ_2	1	1	2	2	-2	-2	-2	-6	6	1
χ_3	1	1	2	2	-2	-2	-2	6	-6	1
χ_4	1	1	2	2	2	2	2	-6	-6	1
χ_5	1	1	-1	-1	-2	1	1	0	0	4
χ_6	1	1	-1	-1	2	-1	-1	0	0	4
χ_7	1	-1	-1	1	0	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$	0	0	4
χ_8	1	-1	-1	1	0	$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-3}$	0	0	4
χ_9	1	-1	2	-2	0	0	0	0	0	4

$H = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$, $K = \{g_0, g_1, \cdots, g_6\}$ とすると H, K は共に strongly normal である。$\chi_1, \cdots, \chi_4$ の上では crossed product の場合と同じように Clifford 型の定理が成り立っている。χ_9 は H の外では値が 0 となっている。χ_5, χ_6 の上では K までは Clifford 型の定理が成り立っているように見えるが K の外では値が 0 となっている。χ_7, χ_8 も同様である。

この例で見たような状況が一般のアソシエーションスキームとその strongly normal closed subset に対して成り立つことを期待しているが、今のところ可換の場合しか証明は出来ていない。以下では**可換アソシエーションスキームのみを考える。**

(X, G) を可換アソシエーションスキームとし H をその strongly normal closed subset とする。Example 4.1 から考えると、algebra 全体を見るのではなく H の既約指標ごとに見た方が良いように感じられる。そこで $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$ に対して、対応する primitive idempotent を e_φ とし

$$\mathbb{C}H = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(H)} e_\varphi \mathbb{C}H, \quad \mathbb{C}G = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(H)} e_\varphi \mathbb{C}G$$

なる直和分解を考える。可換性を仮定しているので、どちらも両側イデアルの直和である。また自然に $\mathrm{Irr}(e_\varphi\mathbb{C}H)=\{\varphi\}$, $\mathrm{Irr}(G\mid\varphi)=\mathrm{Irr}(e_\varphi\mathbb{C}G)$ であるからこの二つの alegbra の間で Clifford 型の対応をみれば良い。

$$e_\varphi\mathbb{C}G=\bigoplus_{g^H\in G//H}e_\varphi\mathbb{C}(HgH)$$

と分解することによって $e_\varphi\mathbb{C}G$ は $G//H$-graded になる。Example 4.1 から考えて

$$Z//H:=\{g^H\in G//H\mid e_\varphi\mathbb{C}(HgH)\neq 0\}$$

とおく。このとき次の Lemma が成り立つ。

Lemma 4.2. 次は同値である。

(1) $e_\varphi\mathbb{C}(HgH)\neq 0$ である。

(2) ある $f\in HgH$ に対して $e_\varphi\sigma_f\neq 0$ である。

(3) $e_\varphi\mathbb{C}(HgH)$ は $e_\varphi\mathbb{C}G$ の unit を含む。

(4) ある $f\in HgH$ に対して $e_\varphi\sigma_f$ は $e_\varphi\mathbb{C}G$ の unit である。

Lemma の証明のために一つの結果を紹介しておく。

Theorem 4.3 ([3, Theorem 3.3, 3.4], [4, 定理 8.4]). H を G の strongly normal closed subset とする。χ を G の指標、τ を $G//H$ の指標とすると

$$\chi\tau(\sigma_g):=\chi(\sigma_g)\tau(\sigma_{g^H})$$

で指標の積を定義すれば、これはまた G の指標になる。特に $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $\tau(1)=1$ であれば $\chi\tau\in\mathrm{Irr}(G)$ であり、重複度に関しては $m_\chi=m_{\chi\tau}$ が成り立つ。

Proof of Lemma 4.2. (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) は自明である。(2) を仮定して (4) を示す。このとき可換性から、ある $\chi\in\mathrm{Irr}(G\mid\varphi)$ に対して $\chi(\sigma_f)\neq 0$ である。また $e_\varphi\sigma_f$ が $e_\varphi\mathbb{C}G$ の unit であるための必要十分条件は、任意の $\xi\in\mathrm{Irr}(G\mid\varphi)$ に対して $\xi(\sigma_f)\neq 0$ であることである。したがってこれを示せば良い。

可換性から $G//H$ はアーベル群で、$\mathrm{Irr}(G//H)$ も自然にアーベル群の構造をもつ。Theorem 4.3 より $\mathrm{Irr}(G//H)$ は $\mathrm{Irr}(G\mid\varphi)$ に作用する。この作用が transitive であることを示す。$\chi\in\mathrm{Irr}(G\mid\varphi)$ を含む軌道を U とする。

$$U=\{\chi\tau\mid\tau\in\mathrm{Irr}(G//H)\}$$

である。χ の stabilizer を Stab_χ と書くことにする。このとき

$$\begin{aligned} e_U &:= \sum_{\eta\in U} e_\eta = \frac{1}{|\mathrm{Stab}_\chi|}\sum_{\tau\in\mathrm{Irr}(G//H)}\frac{m_\chi}{n_G}\sum_{k\in G}\frac{1}{n_k}\overline{\chi\tau(\sigma_k)}\sigma_k \\ &= \frac{1}{|\mathrm{Stab}_\chi|}\sum_{\tau\in\mathrm{Irr}(G//H)}\frac{m_\chi}{n_G}\sum_{k\in G}\frac{1}{n_k}\overline{\chi(\sigma_k)\tau(\sigma_{k^H})}\sigma_k \\ &= \frac{m_\chi}{n_G|\mathrm{Stab}_\chi|}\sum_{k\in G}\frac{1}{n_k}\overline{\chi(\sigma_k)}\left(\sum_{\tau\in\mathrm{Irr}(Z//H)}\overline{\tau(\sigma_{k^H})}\right)\sigma_k \end{aligned}$$

となるが $k\notin H$ (すなわち $k^H\neq 1^H$) のとき σ_k の係数は 0 である。よって $e_U\in\mathbb{C}H$ となり e_φ が $\mathbb{C}H$ で primitive であることから $U=\mathrm{Irr}(G\mid\varphi)$ である。

したがって $\mathrm{Irr}(G\mid\varphi)$ の任意の元は $\chi\tau$, $\tau\in\mathrm{Irr}(G//H)$ と書けて

$$\chi\tau(\sigma_f)=\chi(\sigma_f)\tau(\sigma_{f^H})\neq 0$$

となる。 □

Remark 4.4. 証明から、可換の場合には $e_\varphi\sigma_f\neq 0$ ならば $e_\varphi\sigma_f$ が unit であることが分かるが、非可換の場合にはこれが成り立たないような例がある。

この Lemma よりただちに Z が closed subset (すなわち $Z//H$ が $G//H$ の部分群) であることが分かり、また $e_\varphi\mathbb{C}G$ が $Z//H$ の $e_\varphi\mathbb{C}H$ 上の crossed product であることが分かる。よって以下の結果を得る。

Theorem 4.5 (Clifford Theorem for Commutative Schemes). (X,G) を可換アソシエーションスキームとし H を G の strongly normal closed subset とする。$\varphi\in\mathrm{Irr}(H)$ に対して

$$Z//H := \{g^H\in G//H\mid e_\varphi\mathbb{C}(HgH)\neq 0\}$$

とおく。このとき次が成り立つ。

(1) $\xi\in\mathrm{Irr}(Z\mid\varphi)$ を一つ固定すれば

$$\mathrm{Irr}(Z\mid\varphi)=\{\xi\tau\mid\tau\in\mathrm{Irr}(Z//H)\}$$

である。

(2) $\mathrm{Irr}(Z \mid \varphi) \to \mathrm{Irr}(G \mid \varphi)$, $(\eta \mapsto \eta^G)$ は全単射である。ここで $g \in Z$ に対しては $\eta^G(\sigma_g) = \eta(\sigma_g)$ であり、$g \notin Z$ に対しては $\eta^G(\sigma_g) = 0$ である。

(3) $\chi \in \mathrm{Irr}(G \mid \varphi)$ の重複度に関して

$$m_\chi = \frac{n_G}{n_Z} m_\varphi$$

が成り立つ。

この結果の簡単な応用として以下を得る。

Corollary 4.6. (X, G) を可換アソシエーションスキームとし H を G の strongly normal closed subset とする。このとき

$$|H| + |G//H| - 1 \leq |G| \leq |H| \cdot |G//H|$$

が成り立つ。特に $|H| + |G//H| - 1 = |G|$ となるための必要十分条件は G が H と $G//H$ の wreath product となることであり、また $|G| = |H| \cdot |G//H|$ となるための必要十分条件は G の隣接代数が crossed product となることである。

References

[1] C. W. Curtis, I .Reiner, Method of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders, vol. I. New York Willey, 1981.

[2] E. C. Dade, Group-graded rings and modules, Math. Z. **174**, 241 – 262 (1980).

[3] A. Hanaki, Character products of association schemes, preprint.

[4] A. Hanaki, Representation Theory of Association Schemes, http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/dvi/lecture.pdf, (in Japanese) 2004.

[5] A. Hanaki, I. Miyamoto, Classification of association schemes with small vertices, http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/.

[6] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996.