数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 231-237

A MATLAB Toolbox for Parametric Robust Control System Design based on symbolic computation

坂部 啓
KEI SAKABE
(株)アルファオメガ
ALPHAOMEGA INC. *

屋並 仁史
HITOSHI YANAMI
(株)富士通研究所
FUJITSU LABORATORIES LTD. †

穴井 宏和
HIROKAZU ANAI
(株)富士通研究所
FUJITSU LABORATORIES LTD. ‡

原 辰次
SHINJI HARA
東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO §

1 はじめに

近年における計算機能力の向上やアルゴリズムの改良等により、数式処理による工学や産業上の諸問題の求解が現実的なものとなってきた。今回紹介する制御器の設計支援ツールは、制御系設計の現場において最も頻繁に用いられている構造の固定された制御器 (fixed-structure controller) を用いた設計作業を支援するツールである。このツールは、周波数領域上における設計仕様を満たす制御器のパラメータの決定を数式処理 (特に Quantifier Elimination: 以下 QE) を用いることで行う。このことにより、与えられた設計仕様が非凸な制約問題に帰着された場合も同様に扱うことができ、制御器のパラメータの可能領域を (semi-algebraic set で表された) 領域として求めることができることが特長となっており、数値計算だけによる設計では、困難であった設計の問題を解くことができるようになった。また、このツールは、全ての作業を GUI 上で行えるものとなっている。

数式処理を利用した制御系設計の研究としては、最近では QEPCAD を用いたもの [5, 7] 等がある。しかし、計算時間等の問題があった。この問題を解決するために、本ツールでは周波数領域における制御系の設計問題が、第 2 章で説明する SDC(Sign Definite Condition) という形に変換できることを利用し、これに特化した QE アルゴリズムを用いることで、CAD(Cylindrical Algebraic Decomposition) アルゴリズムに基づく一般的な QE の計算量 (double-exponential) に対して計算量の大幅な削減 (single-exponential) を行った [2]。例えば現時点で実装されている感度・相補感度に関する仕様の計算では、6 次までのシステムについて数分のオーダーで計算結果が表示される。

本ツールは、数式処理を用いた、パラメータ空間アプローチにより設計を支援する。同様の設計ツールとしては、Γ -region を用いた PARADISE[6] が存在する。これに対し本ツールは、扱える対象となる制御

*sakabe@a2z.co.jp
†yanami@flab.fujitsu.co.jp
‡anai@jp.fujitsu.com
§Shinji_Hara@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

器の構造について特に制約がない点、さらに、ほとんどの周波数領域における設計仕様を扱うことのできる点で、汎用性が高い。また、SDC を解く QE を用いている点も特長であるが、本ツールでは、QE ツールとして Maple 上の実代数制約問題用のツール SyNRAC [3, 4] を用いている。MATLAB ツールボックスの "Extended symbolic math toolbox" は Maple そのものであり、MATLAB からの操作性も違和感なく Maple 上のツール SyNRAC の機能を利用できる。

また、本ツールはすべての作業を GUI 上で行えることを目指して開発された。すなわち、グラフィックオブジェクトによる仕様の図示、同オブジェクトのマウスによるドラッグ等によるパラメータや仕様の設定・変更、GUI レイアウトの自由な変更などを可能にすることを目指した。GUI についての詳細は、第 3 章で説明する。

2 SDC(Sign Definite Condition)

本ツールは、H_∞ ノルムやゲイン・位相余裕、極配置などの周波数領域における制御の諸問題を Sign Definite Condition(以下、SDC) という形に帰着させ、SDC に特化させた QE を用いることにより高速な求解を行っている。以下では、この SDC について説明し、計算例を示す。

ある関数 $f(x)$ が Sign Definite である、とは以下のように定義される。

定義 1
関数 $f(x):\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ が区間 $x\in[a,b], a<b$ において符号が不変のとき、関数 $f(x)$ は (区間 $[a,b]$ において)*Sign definite* であるという。

次に、SDC への問題の変換例を示す。

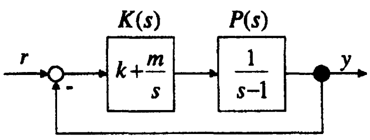

図 1: PI コントローラ設計例

図 1 のようなシステムの感度関数 $S(s)$ および相補感度関数 $T(s)$ は次のようにあらわされる。

$$S(s)=\frac{1}{1+P(s)C(s)}=\frac{s^2-s}{s^2+(k-1)s+m} \tag{1}$$

$$T(s)=\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}=\frac{ks+m}{s^2+(k-1)s+m} \tag{2}$$

ここで、感度関数は目標値応答性に関係し、低周波では小さいほうが望ましい。すなわち、各周波数 ω_s 以下において γ_s 未満にしたいとする。また、相補感度はロバスト安定性に関係し、高周波で小さいほうが望ましい。すなわち、各周波数 ω_t 以上において γ_t 未満になるようにしたいとする。例えば、図 2 の例では、感度関数 $S(s)$ に関しては仕様を満たしているが、相補感度関数 $T(s)$ に関しては仕様を満たしていない。

この制約条件は、周波数帯域を $[\omega_1,\omega_2]$ に限定したノルム

$$\| G \|_{[\omega_1,\omega_2]} \triangleq \sup_{\omega_1\le\omega\le\omega_2} |G(j\omega)| \tag{3}$$

(j : 虚数単位)

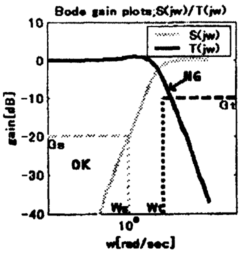

図 2: $S(s), T(s)$ の例

を定義すると、以下のように表せる。

$$\| S(s) \|_{[0,\omega_s]} < \gamma_s \tag{4}$$

$$\| T(s) \|_{[\omega_t,\infty]} < \gamma_t \tag{5}$$

ここで、安定な n 次の伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ において、ハミルトン行列

$$H = \begin{bmatrix} A & O \\ C^TC & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ C^TD \end{bmatrix} \times (\gamma^2 I - D^TD)^{-1} \begin{bmatrix} -D^TC & B^T \end{bmatrix} \tag{6}$$

の特性多項式

$$h(s^2) = | sI - H | = \sum_{i=0}^{n} h_i s^{2i} \tag{7}$$

に関して、s^2 を x と置き換え

$$f(x) \triangleq \sum_{i=0}^{n} h_i x^i \tag{8}$$

とする。このとき、安定な n 次の伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ が $\| G \|_{[\omega_1,\omega_2]} < \gamma$ を満たすための必要十分条件は、$|G(j\omega_1)| < \gamma$ または $|G(j\omega_2)| < \gamma$ を満たし、$\omega_2{}^1 \leq x \leq \omega_2{}^2$ で $f(x) \neq 0$ となることである [1]。

これを条件 (4),(5) に適用すると、(1),(2) より

$$f_s(x) = x^2 + \frac{(2m\gamma_s{}^2 - (k-1)^2\gamma_s{}^2 + 1)x + m^2\gamma_s{}^2}{-1 + \gamma_s{}^2} \tag{9}$$

$$f_t(x) = x^2 + (2m - (k-1)^2 + \frac{k^2}{\gamma_t{}^2})x + m^2(1 - \frac{1}{\gamma_t{}^2}) \tag{10}$$

となる。本ツールで用いている SyNRAC の SDC 用 QE では、$\forall x > 0, f(x) > 0$ という条件のものを対象としているので、この条件に (9),(10) 式を変換する。すなわち、$[\omega_1{}^2, \omega_2{}^2]$ を $[0, \infty]$ に移す変換

$$z = \frac{x + \omega_1{}^2}{1 + \frac{x}{\omega_2{}^2}} \tag{11}$$

を用いて、

$$f_s(z) = \frac{(\gamma_s{}^2 - 1)\omega_s^4 z^2 + (z - \omega_s{}^2)^2 m^2 \gamma_s{}^2 + ((k-1)^2\gamma_s{}^2 - 2m\gamma_s{}^2 - 1)(\omega_s{}^2 z - 1)\omega_s{}^2 z}{(\gamma_s{}^2 - 1)(z - \omega_s{}^2)^2} \tag{12}$$

$$f_t(z) = (z - \omega_2{}^2)^2 + m^2(1 - \frac{1}{\gamma_t{}^2}) + (2m - (k-1)^2 + \frac{k^2}{\gamma_t{}^2})(z - \omega_2{}^2) \tag{13}$$

と変換する。

$\omega_s = 1(\mathrm{rad/s})$, $\gamma_s = -20(\mathrm{dB}) = 0.1$, $\omega_t = 20(\mathrm{rad/s})$, $\gamma_t = -10(\mathrm{dB}) \simeq 0.3163$ のとき、$f_s(z)$, $f_t(z)$ が満たされる領域を QE によって求めた結果をプロットすると、図 3, 4 のようになる。また、$f_s(z)$, $f_t(z)$ が共に満たされる領域図 3、4 を重ね合わせることで得られる (図 5)。

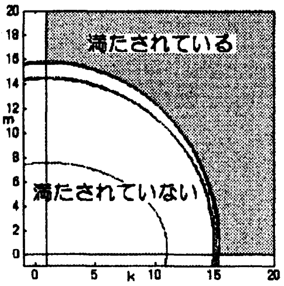

図 3: 感度仕様に関する領域

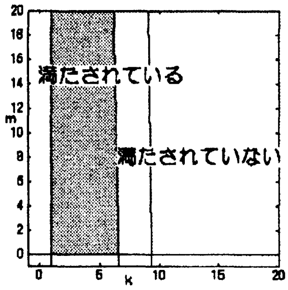

図 4: 相補感度仕様に関する領域

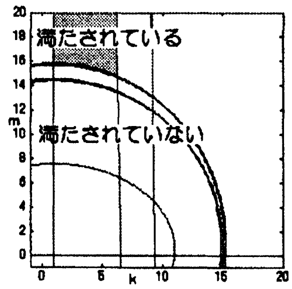

図 5: 複数仕様 (感度、相補感度) に関する領域

3 使用例

本 GUI は、仕様の表示などを行うメインウィンドウと、システムの変数の値や役割を設定する変数設定ウィンドウから構成される。メインウィンドウは、グラフ部分と文字による表示部分との二つから構成される。グラフ部分は、システムの特性や現在設定されている仕様、パラメータ領域などを表示する。文字による表示部分は、さまざまなパラメータや仕様を設定したり、演算結果を見る、エディットボックスやラジオボタンからなる。基本的に、グラフ部分で設定できる仕様やパラメータは文字による表示部分からも設定できる。逆に、文字による表示部分で設定できる項目は、プラント及びコントローラの設定以外はグラフ部分にても設定できる。現時点では、グラフ部分はパラメータ領域 (図 6)、ボーデ線図 (図 7)、極配置 (図 8)、ナイキスト線図 (図 9) の 4 つの図から構成されている。

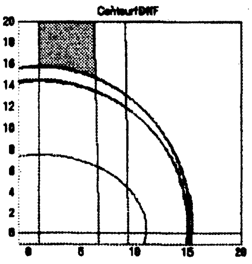

図 6: パラメータ領域

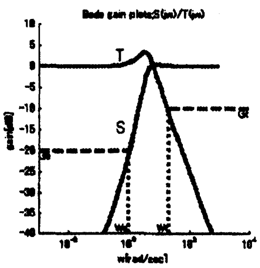

図 7: ボーデ線図

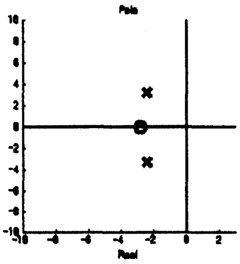

図 8: 極配置

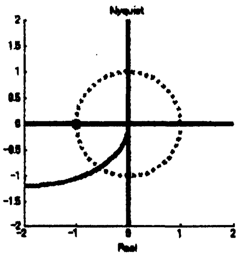

図 9: ナイキスト線図

パラメータ領域の図 (図 6) では、仕様を満たすパラメータの領域が 2 次元平面上に表示される。このとき、仕様を満たさない領域はピンクに、仕様を満たす領域は緑に塗られる。それぞれの境界は青の線で示され、その線をクリックすることでその制約式を見ることができる。また、領域上をクリックもしくはドラッグすることで、その点におけるシステムの特性が他のウィンドウ上に表示され、どのような特性曲線となっているか等を確認することができる。

ボーデ線図 (図 7) では、感度関数の周波数特性や相補感度関数の周波数特性を見ることができる。感度

関数の特性は青の線で、相補感度関数の特性は赤の線で同一の図上で表示されている。また、それぞれに関する仕様を設定できる。現時点では、感度に関してはある周波数以上における最大ゲインを、相補感度に関してはある周波数以下における最大ゲインを仕様として設定できる。これらの仕様は図上に線として表示されており、エディットボックスで設定する以外にも、この線をドラッグすることによっても設定可能となっている。そして、これらの仕様を変更することにより、パラメータ領域の図が自動的に更新される。

極配置、ナイキスト線図の図に関しては、現時点では表示機能のみ利用可能である 。仕様設定、可能領域表示については今後実装予定である。

変数設定ウィンドウ (図 10) では、システムの伝達関数の式に登場する変数について、その値や役割を設定する。すなわち、ラプラス変換

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{14}$$

の s が伝達関数中のどの変数に相当するか、またパラメータ領域をプロットする際にどの変数を横軸に、どの変数を縦軸にするかを設定する。また、これら以外の変数に値を代入することもできる。

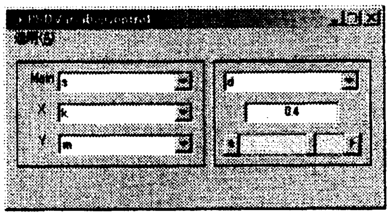

図 10: 変数設定ウィンドウ

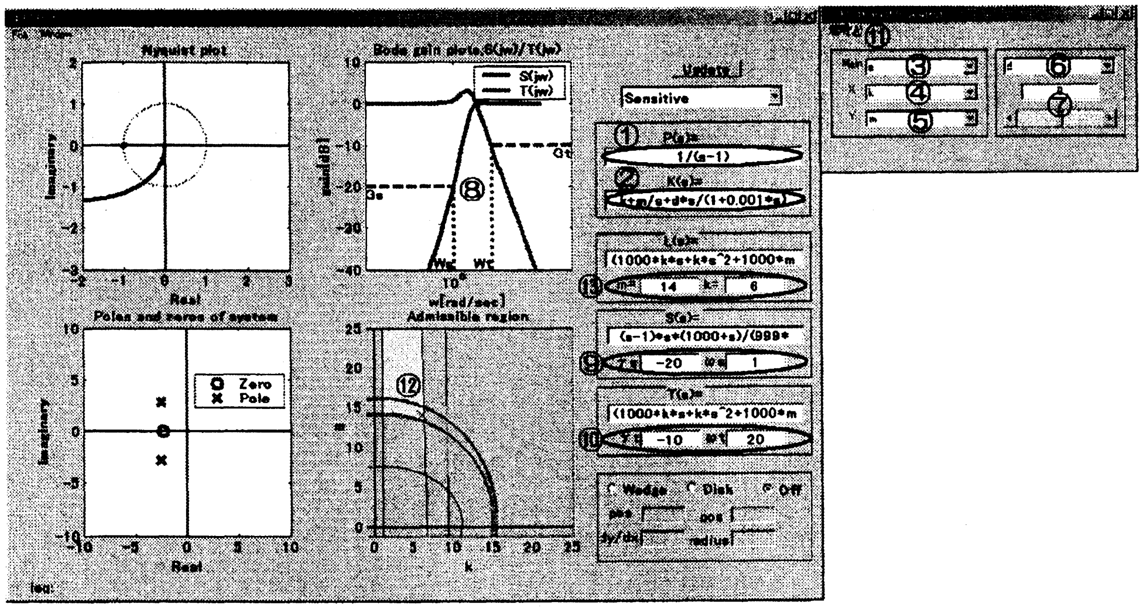

図 11: 操作手順

次に、実際の作業の流れ (図 11) について説明する。まず、プラントとコントローラの伝達関数を入力する (①,②)。すると、変数設定ウィンドウが開くので、入力された関数中のどの文字がラプラス変換の s に

相当する変数か (③)、またパラメータ領域のプロット時にどの変数を軸にとるか (④,⑤)、等を設定する。現時点では 2 変数のプロットしかできないため、ラプラス変換の s や軸以外の変数には値を割り振らなければならない (⑥,⑦)。次に、設定したい各種仕様を設定する (⑧,⑨,⑩)。これは図上にある、仕様を表すグラフィックオブジェクトをマウスにより操作することで設定しても (⑧)、またエディットボックスに直接値を打ち込んでもよい (⑨,⑩)。設定に不備が無いことを確認し、変数設定ウィンドウのメニューにある「適用」を押すと (⑪)、パラメータ領域がプロットされる。以後は、仕様を変更すると自動的にパラメータ領域が再プロットされる。最後に、プロットされたパラメータ領域上のある点におけるシステムの特性を確認する。これを行うには、パラメータ領域上で特性を確認したい点をクリックするか (⑫)、エディットボックスに直接値を打ち込めばよい (⑬)。

軸として用いられている変数以外の変数についてプロットしたい場合は、ウィンドウ上部にあるメニューから変数設定ウィンドウを呼び出し、軸に用いる変数を再設定すればよい (④,⑤)。また、軸に用いられていない変数を変化させながらパラメータ領域の変化を見たい場合は、変数設定ウィンドウを閉じずに、変数の値を変えていけばよい (⑥,⑦)。

4 おわりに

本稿では我々が開発した、数式処理を用いたパラメータ空間アプローチによる制御系設計支援ツールについて紹介した。基本設計の段階からユーザインターフェースを重視して開発を行ってきたため、これまでの制御系 CAD に比較して、使いやすく分かりやすいものとなった。機能上の特徴は 3 点ある。1 点目は SDC という特定の形に問題を帰着させ、その形に特化した QE を用いることで計算量の大幅な低減を行ったことである。2 点目は、単に結果を計算するだけではなく GUI により仕様を容易に設定でき、また計算により求まった仕様を満たすパラメータ空間を見ることができることである。3 点目は、求まったパラメータ空間上で、どのようなパラメータがもっとも望ましい特性を与えるか、パラメータ空間上の点を変更させながら特性を見ることができることである。

本ツールは数値・数式ハイブリッド計算に基づくロバスト最適化手法を実際の問題に適用してテストするプラットフォームとしても使えることを目指している。このためには、テストを行うための GUI を追加することが容易であることと GUI の組み合わせをカスタマイズすることが可能であることが必要である。現時点では図 11 のようにひとつの GUI にすべての図及び GUI が埋め込まれており、このカスタマイズは困難なものとなっている。将来的には図 12 のようにそれぞれの GUI を独立させるとともに、図 13 のように MATLAB の GUI エディタ：GUIDE を用いて容易にユーザの好みに合わせて各 GUI をひとつにまとめ、図 14 のようにその上で作業をすることができるようにもすることを目指している。現在、これを実現するために必要なアプリ間通信などの規格を策定中である。

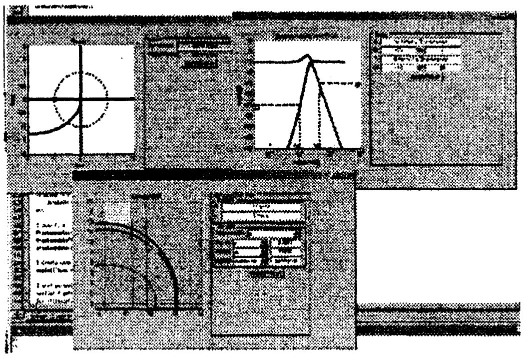

図 12: 独立したGUI

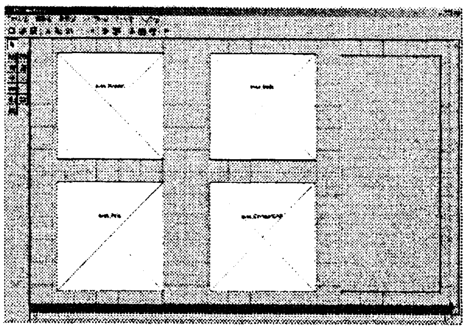

図 13: GUIDE によるレイアウト作業の様子

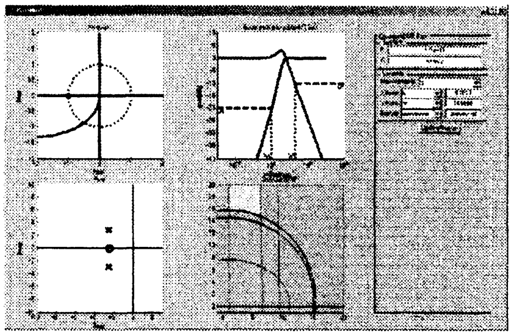

図 14: GUI を複合させた例

5 謝辞

本研究は 21 世紀 COE プログラム「情報科学技術戦略コア」超ロバスト計算原理プロジェクト及び (独) 科学技術振興機構 (JST) 戦略的創造研究推進事業の支援を受けている。

参 考 文 献

[1] 金子 卓司 近藤 良, 原 辰治. パラメータ空間設計による h_∞ 制御. **計測自動制御学会論文集**, 27(6):714–716, 1991.

[2] H Anai and S Hara. Fixed-structure robust controller synthesis based on sign definite condition by a special quantifier elimination. In *Proceedings of American Control Conference 2000*, pages 1312–1316, 2000.

[3] H Anai, H Yanami, and S Hara. SyNRAC: a maple-package for solving real algebraic constraints toward a robust parametric control toolbox. In *Proceedings of SICE Annual Conference 2003 (Fukui, Japan)*, pages 1716–1721, 2003.

[4] Hirokazu Anai and Hitoshi Yanami. SyNRAC: A maple-package for solving real algebraic constraints. In *Proceedings of International Workshop on Computer Algebra Systems and their Applications (CASA) 2003 (Saint Petersburg, Russian Federation), P.M.A. Sloot et al. (Eds.): ICCS 2003, LNCS 2657*, pages 828–837. Springer, 2003.

[5] P. Dorato, W.Yang, and C.Abdallah. Application of quantifier elimination theory to robust multi-object feedback design. *J. Symb. Comp.* **11**, pages 1–6, 1995.

[6] T. Büntet L. Güvenc D. Kaesbauer M. Kordt M. Muhler J. Ackermann, P. Blue and D. Odenthal. Robust control: The parameter space approach. Springer, 2002.

[7] M. Jirstrand. Nonlinear control system design by quantifier elimination. *J. of Symb. Comp.* **24**, pages 137–152, 1997.