数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 148-156

$C(X)$ 上の代数方程式の解の存在性と X の位相構造

山形大学　工学部　三浦 毅 (Takeshi Miura)
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics,
Yamagata University.

どんな有限個の複素数 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ に対しても，代数方程式

$$\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + a_1\zeta + a_0 = 0$$

は必ず $\mathbb{C}$ に解をもつことが代数学の基本定理としてよく知られている．それでは係数 a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ を連続的に動かしたとき，それに対応して解も連続的に動かすことが可能であろうか．以下では $C(X)$ をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数全体からなる可換 Banach 環として，次の問題を考察しよう．

問題　どんな $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C(X)$ に対しても，これらを係数とする代数方程式

$$\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + a_1\zeta + a_0 = 0$$

は少なくとも一つ $C(X)$ に解をもつか．

もちろん，各 $x_0 \in X$ に対して，複素係数の代数方程式

$$\zeta^n + a_{n-1}(x_0)\zeta^{n-1} + \cdots + a_1(x_0)\zeta + a_0(x_0) = 0$$

は，代数学の基本定理より，$\mathbb{C}$ に解をもつことが分かる．したがって，連続性を要請しなければ，X 上の単なる関数としての解は必ず存在するのである．しかし，その関数を連続関数として選べるかどうかは，実はかなり微妙な問題である．実際，次の例が古くから知られている．

例 1 (a) 任意の $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C([0,1])$ に対して

$$\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + a_1\zeta + a_0 = 0$$

は $C([0,1])$ に少なくとも一つ解をもつ．つまりある $f \in C([0,1])$ が存在して

$$f^n(x) + a_{n-1}(x)f^{n-1}(x) + \cdots + a_1(x)f(x) + a_0(x) = 0 \qquad (\forall x \in X)$$

となる．

(b) $S^1 \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とする．このとき a_0 を S^1 上の恒等関数 (*i.e.* $a_0(x) = x$, $x \in S^1$) とすると，$\zeta^2 + a_0 = 0$ は $C(S^1)$ に解をもたない．

上の例 1 (a) は D. Deckard and C. Pearcy [3, Theorem 2] によるものである．例 1 からも分かるように，位相空間の構造によってはどんな代数方程式も解けることもあれば，逆に簡単な 2 次方程式でさえ解けないこともある．したがって，始めに挙げた問題は一般には否定的に解決されることになるが，$C(X)$ の元を係数とする代数方程式がいつでも解けるための必要十分条件を，位相空間 X の言葉で特徴付ける，という問題は非常に興味あるものである．実際，この問題はある場合については必要十分条件が与えられている．それらを述べるために，次の定義をする．

定義 1 $C(X)$ が代数的に閉じているとは，$C(X)$ の元を係数とする任意の *monic* 多項式が $C(X)$ に解をもつことである．つまり任意の自然数 n と任意の $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in C(X)$ に対して $f \in C(X)$ が存在して

$$f^n(x) + a_{n-1}(x)f^{n-1}(x) + \cdots + a_1(x)f(x) + a_0(x) = 0 \qquad (\forall x \in X)$$

となることである．特に任意の $a \in C(X)$ に対して

$$f^2(x) = a(x) \qquad \forall x \in X$$

となる $f \in C(X)$ が存在するとき，$C(X)$ は平方根に関して閉じているという．

例 1(a) は $C([0,1])$ が代数的に閉じていることを主張している．さらに Deckard and Pearcy [4] は X が完全不連結コンパクト Hausdorff 空間のとき，$C(X)$ は代数的に閉じていることも示している．このとき用いられた手法を応用して，R. S. Countryman [2] は代数的に閉じた $C(X)$ を X の位相の言葉で特徴づけた．その結果を述べるため，さらに幾つかの定義を必要とする．

定義 2 位相空間 T が *A-space* であるとは，境界点が高々有限個であるような開集合の全体がその位相の開基をなすことである．

定義 3 位相空間 T が *hereditarily unicoherent* であるとは，任意の連結閉集合 M, N に対してその共通部分 $M \cap N$ がまた連結となることである．

定義 4 位相空間 T が *almost locally-connected* であるとは，T が次をみたす互いに素な連結閉集合族 $\{C_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を含まないことである：

> 各 C_n は $\cup_{n \in \mathbf{N}} C_n$ の閉包における開集合であり，$x_n, y_n \in C_n$ として得られる数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ で異なる点に収束するものが存在する．

最後にコンパクト Hausdorff 空間 X の任意の連結成分 X_λ に対し，$C(X_\lambda)$ が代数的に閉じているとき X は C-space であるという．また簡単のため A-space かつ C-space を単に AC-space という．次の結果は Countryman [2] から直ちに分かる：

定理 1 (Countryman. [2]) Xをコンパクト*Hausdorff*空間とする．このとき (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) が成り立つ：

(a) X は AC-*space* である．

(b) $C(X)$ は代数的に閉じている．

(c) $C(X)$ は平方根に関して閉じている．

(d) X は *hereditarily unicoherent* かつ *almost locally-connected* である．

特に X が第一可算公理をみたせば (d) $\Rightarrow$ (a) が成り立つ．つまり，このとき上の条件 (a), (b), (c), (d) は全て同値である．

Countryman によれば，X が第一可算公理をみたすとき，$C(X)$ が代数的に閉じていることと平方根に関して閉じていることは同値である．つまり 2 次方程式さえ解ければ，どんな代数方程式も解けるのである．しかもそのための必要十分条件として空間の形を決定している．Countryman が代数方程式の可解性を考察したのに対し，O. Hatori and T. Miura [6, Theorem 2.2] は 2 次方程式の可解性だけに着目した．この結果は E. M. Čirka [1] による局所連結コンパクト Hausdorff 空間上の関数環を特徴付ける結果に触発されたものである．ここで位相空間が局所連結であるとは，連結な開集合の全体が位相の開基をなすことであることを注意として述べておこう．

定理 2 (Hatori and Miura [6]) X を局所連結コンパクト*Hausdorff*空間とする．このとき次は同値である．

(a) $C(X)$ は平方根に関して閉じている．

(b) $\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群となる．ここに $\dim X$ は X の被覆次元 ([10] 参照) を表し，$\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は定数層 $\mathbb{Z}$ に係数をもつ X の 1 次の *Čech cohomology* 群である．

以上に述べたように，[2] と [6] によって $C(X)$ が平方根に関して閉じているための X の特徴づけがいくつか得られている．それではこれらの特徴づけにはどのような関係があるのだろうか？ここではそれらの関係を調べる．まず次の関係があることが分かる．

補題 3 X をコンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき $\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X,\mathbb{Z}) = 0$ ならば X は *hereditarily unicoherent* である．

証明. X が hereditarily unicoherent でなければ，$\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群でないことを示す．[2, Lemma 2.1] の証明より X のある閉部分集合 F と $h \in C(F)^{-1}$ が存在して，任意の $f \in C(F)$ に対して $h \neq f^2$ であることが分かる．さて，$\dim X \leq 1$ であることは次と同値であることが知られている ([10] 参照)：

任意の閉集合 K とその上の連続関数 u で $u(K) \subset S^1$ なるものに対して，X 上の連続関数 $\tilde{u}$ で $\tilde{u}|_K = u$ かつ $\tilde{u}(X) \subset S^1$ をみたすものが存在する．

したがって $\tilde{h}|_F = h$ なる $\tilde{h} \in C(X)^{-1}$ が存在することが分かる．ところで，どんな $f \in C(F)$ に対しても $h \neq f^2$ であったから，$\tilde{h} \neq g^2$, $(\forall g \in C(X))$ である．このとき特に $\tilde{h} \notin \exp C(X)$ である．よって $\tilde{h} \in C(X)^{-1} \setminus \exp C(X)$ となる．Arens-Royden の定理 (cf. [5, Theorem 7.2 of Chapter III]) により $C(X)^{-1}/\exp C(X) = \check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ であるから，$\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群ではないことが示された． ■

定理 1 によれば，X が第一可算公理をみたすとき，$C(X)$ が代数的に閉じていることと平方根に関して閉じていることは同値である．定理 2 では $C(X)$ が平方根に関して閉じて

いるための局所連結な空間 X の特徴づけを与えている．それでは X が第一可算公理をみたすとは限らない局所連結な空間の場合も，$C(X)$ が平方根に関して閉じていることと代数的に閉じていることは同値であるだろうか？この問いに対する答えが次の結果である．

定理 4 X を局所連結コンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき以下は同値である．

(a) X は *AC-space* である．

(b) X は *C-space* である．

(c) $C(X)$ は代数的に閉じている．

(d) $C(X)$ は平方根に関して閉じている．

(e) $\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群である．

(f) X は *hereditarily unicoherent* である．

この結果を示すために，次の補題は重要である．

補題 5 (Lemma 2.2, [3]) $P(\cdot,\zeta)$ を $C(X)$ の元を係数とする任意の *monic* 多項式とする．つまりある自然数 n と $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in C(X)$ に対して

$$P(x,\zeta)=\zeta^n+a_{n-1}(x)\zeta^{n-1}+\cdots+a_1(x)\zeta+a_0 \qquad (x\in X)$$

である．$x_0\in X$ を固定し，$z_0\in\mathbb{C}$ を複素係数代数方程式 $P(x_0,\zeta)=0$ の m 位の解とする．このときある $\varepsilon>0$ に対して $P(x_0,\zeta)=0$ が $\{z\in\mathbb{C}:0<|z-z_0|\leq\varepsilon\}$ に解をもたなければ，x_0 のある開近傍 V_0 が存在して任意の $y\in V_0$ に対して $P(y,\zeta)=0$ は $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\varepsilon\}$ に（重複度まで数えて）ちょうど m 個の解をもつ．

定理4の証明の概略．まず定理2より条件(d)と(e)は同値である．また定理1より(d) $\Rightarrow$ (f)であるから，(b) $\Rightarrow$ (c)及び(f) $\Rightarrow$ (a)を示せばよい．

(b) $\Rightarrow$ (c) : Xは局所連結であるから，Xの各連結成分は開集合である．よってXは高々有限個の連結成分からなる．よってXがC-spaceならば$C(X)$は代数的に閉じている．

(f) $\Rightarrow$ (a) : Xはhereditarily unicoherentであるとする．このときXはAC-spaceであることを示す．さて，いまXは局所連結であるからXの各連結成分は開かつ閉集合である．そこで一般性を失うことなくXは連結であると仮定してよいのでそうする．

はじめにXはA-spaceであることを示す．$x_0 \in X$を任意に取り，Vをx_0の任意の開近傍とする．$X \setminus V \neq \emptyset$の場合を考えれば十分であるのでそうする．各$x \in X \setminus V$に対して次をみたす$y_x \in V$及び開集合$A_x, B_x$が存在することが分かる．

$$x_0 \in A_x,\ x \in B_x,\ A_x \cap B_x = \emptyset \text{ かつ } X \setminus \{y_x\} = A_x \cup B_x.$$

このときy_xはA_xのただ1つの境界点であることに注意する．$X \setminus V$はコンパクトなので，有限個の点$x_1, x_2, \cdots, x_m$が存在して$X \setminus V \subset \cup_{j=1}^m B_{x_j}$となる．$V_0 = \cap_{j=1}^m A_{x_j}$とおくと，$V_0$は$V$に含まれる$x_0$の開近傍でその境界点は高々$m$個である．よって高々有限個の境界点をもつ開集合の全体はXの開基をなす．すなわちXはA-spaceである．

次に$C(X)$は代数的に閉じていることを示す．詳細は[9, Proof of Theorem 3.3]に譲り，ここでは証明の簡単な方針を述べるにとどめる．$P(\cdot, \zeta)$を$C(X)$上の任意のmonic多項式とし，次をみたすXの連結部分集合DとD上の複素数値連続関数fの組(D, f)全体からなる集合を$\mathfrak{D}$とする：

$$P(x, f(x)) = 0 \qquad \forall x \in D$$

(正確には，D は単に連結というだけでは不十分であるが，詳しく述べるには準備が必要であるため“方針”ということで，正確さを欠くことをお許しいただきたい)．どんな $x_0 \in X$ に対しても，代数学の基本定理より，複素係数代数方程式 $P(x_0, \zeta) = 0$ は解をもつから，$\mathfrak{D}$ は空でない．任意の $(D_1, f_1), (D_2, f_2) \in \mathfrak{D}$ に対して，$D_1 \subset D_2$ かつ $f_2|_{D_1} = f_1$ なるとき $(D_1, f_1) \preceq (D_2, f_2)$ と定義する．このとき $\preceq$ は $\mathfrak{D}$ の順序である．Zorn の補題より $\mathfrak{D}$ には極大元が存在することが分かり，(D^*, f^*) を $\mathfrak{D}$ の 1 つの極大元とするとき $D^* = X$ であることが示される．このとき $P(x, f^*(x)) = 0, \forall x \in D^* = X$ であるから $f^* \in C(X)$ が解となる． ■

このように，X に第一可算性あるいは局所連結性を仮定したときは，2 次方程式が解けることと代数方程式が解けることは同値である．しかし [2, 5. Remarks (2)] によれば，X が第一可算公理をみたさないときは，どんな 2^n 乗根も存在するが 5 乗根が存在し得ない空間 X がある．もちろん，このとき X は局所連結ではあり得ない．

また X が局所連結であるとき，さらに $C(X)$ が平方根に関して閉じていれば $\dim X \leq 1$ であることは定理 2 で示されている．K. Kawamura and T. Miura [8, Proposition 2.4] は X が点列コンパクトであるときも同様の結果が成り立つことを示した．著者は X に局所連結性や点列コンパクト性を課さずとも，$C(X)$ が平方根に関して閉じていれば $\dim X \leq 1$ がいえるのではないか，と考えているが，現在の所まだよく分かっていない．

参考文献

[1] E. M. Čirka, *Approximation of continuous functions by functions holomorphic on Jordan arcs in* $\mathbb{C}^n$, Soviet Math., **7** (1966), 336–338.

[2] R.S. Countryman, Jr, *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. Math., **20** (1967), 433–448.

[3] D. Deckard and C. Pearcy, *On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space*, Proc. Amer. Math. Soc., **14** (1963), 322–328.

[4] D. Deckard and C. Pearcy, *On algebraic closure in function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 259–263.

[5] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, N. J. 1969.

[6] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2000), 1185–1189.

[7] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

[8] K. Kawamura and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations*, preprint.

[9] T. Miura and K. Niijima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 2869–2876.

[10] K. Morita, *Dimension of general topological spaces*, Surveys in general topology (G. M. Reed ed.) Academic Press N. Y. 1980