数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 9-18

多入力ガウス型通信路の容量領域についての Ordentlich の結果の精密化

柳 研二郎 (Kenjiro Yanagi)
山口大・工
(Department of Applied Science, Yamaguchi University)
平山 高士 (Takashi Hirayama)
山口大・理工
(Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University)

1 はじめに

m 入力 1 出力の多入力ガウス型通信路は次のように定義される.

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} S_{ij} + Z_i, \ \ i = 1, 2, \cdots$$

$1 \leq j \leq m$ に対して $S_j = \{S_{ij}; i = 1, 2, \cdots\}$ は j 番目の送信者によって送信される入力信号を表す確率過程, $Y = \{Y_i; i = 1, 2, \cdots\}$ は出力信号を表す確率過程, $Z = \{Z_i; i = 1, 2, \cdots\}$ は雑音を表す退化していないガウス過程である. フィードバックをもたない場合は各 S_j は独立, 各 S_j と Z も独立と考えられる. ところがフィードバックをもつ場合は各メッセージ X_j は独立, 各 X_j と Z は独立であるが, 各入力信号 S_j については時刻 j では S_{ij} は X_j と $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{i-1}$ のある函数であると考えられる. 平均電力制限としては次のものが課せられる.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[S_{ij}^2] \leq P_j, \ \ 1 \leq j \leq m.$$

フィードバックをもたない非ホワイトガウス型通信路の容量領域 (capacity region) については Keilers [4] によって最初に特徴づけられた. m 入力ガウス型通信路を n 回用いた時の容量領域は次の条件を満たす m 次レートベクトル (rate vector) $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ 全体で定義される.

$$\sum_{j \in \Gamma} R_j \leq \frac{1}{2n} \log \frac{|\sum_{j \in \Gamma} K_{S_j^{(n)}} + K_Z^{(n)}|}{|K_Z^{(n)}|},$$

ただし Γ は $\{1,2,\cdots,m\}$ の任意の部分集合. $K_{S_j}^{(n)}$ は $S_j^{(n)}=(S_{1j},S_{2j},\ldots,S_{nj})$ の共分散行列で

$$\frac{1}{n}Tr[K_{S_j}^{(n)}]\le P_j,\ \ 1\le j\le m$$

を満たす. 一方フィードバックをもつ非ホワイトガウス型通信路の容量領域についてはPombra and Cover [6] によってえられたが, より精密なものについてはOrdentlich [5] によって次のように与えられている.

$$\sum_{j\in\Delta}R_j\le\frac{1}{2n}\log\frac{|K^{(n)}_{\sum_{i\in\Delta}S_i-\sum_{j\in\bar{\Delta}\cap\Gamma}S_j+Z}|}{|K_Z^{(n)}|},\tag{1}$$

ただし Δ,Γ はいずれも $\{1,2,\cdots,m\}$ の任意の部分集合で $\Delta\subset\Gamma$ を満たすとする. $\bar{\Delta}=\{1,2,\cdots,m\}-\Delta$ である. また

$$\frac{1}{n}Tr[K_{S_j}^{(n)}]\le P_j,\ \ 1\le j\le m\tag{2}$$

を満たす. 容量領域を $C_{n,FB}(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ と書くことにする. またフィードバックをもたない場合の容量領域を $C_n(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ と書く. 全容量 (total capacity) とは $\Gamma=\{1,2,\cdots,m\}$ のとき (2) の下で

$$\sum_{j\in\Gamma}R_j=\sum_{j=1}^{m}R_j$$

を最大にした値である. これを便宜上 $\bar{C}_{n,FB}(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ と書くことにする. さらに $\Gamma\subset\{1,2,\cdots,m\}$ のときも $\sum_{j\in\Gamma}R_j$ を最大にした値を同様に $\bar{C}_{n,FB}(P_1,P_2,\cdots,P_{|\Gamma|})$ と書き Γ-total capacity と呼ぶことにする.

2 Ordentlich の結果

Pombra and Cover [6] は全容量について次の結果を得た.

Proposition 1

$$\bar{C}_n(P_1,P_2,\cdots,P_m)\le\bar{C}_{n,FB}(P_1,P_2,\cdots,P_m)\le 2\bar{C}_n(P_1,P_2,\cdots,P_m).$$

一方、容量領域について Ordentlich [5] は次の結果を得た.

Proposition 2

$$C_n(P_1,P_2,\cdots,P_m)\subset C_{n,FB}(P_1,P_2,\cdots,P_m)\subset 2C_n(P_1,P_2,\cdots,P_m).$$

Outline of Proof.

$R(\Delta)=\sum_{j\in\Delta}R_j$, $S(\Delta)=\sum_{j\in\Delta}S_j$ とおくと $\Delta\subset\Gamma$ に対して $R(\Delta)$ を平均すると

$$\frac{1}{2^{|\Delta|}}\sum_{\Delta\subset\Gamma}R(\Delta)=\frac{1}{2}R(\Gamma).$$

また

$$\frac{1}{2^{|\Gamma|}}\sum_{\Delta\subset\Gamma}K^{(n)}_{S(\Delta)-S(\bar{\Delta}\cap\Gamma)+Z}=\sum_{i\in\Gamma}K^{(n)}_{S_i}+K^{(n)}_{Z}$$

に注意すると (1) の両辺を $\Delta\subset\Gamma$ に対して平均をとると右辺は次のように評価される.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^{|\Gamma|}}\sum_{\Delta\subset\Gamma}\frac{1}{2n}\log\frac{|K^{(n)}_{S(\Delta)-S(\bar{\Delta}\cap\Gamma)+Z}|}{|K^{(n)}_{Z}|}\\ \le\ &\frac{1}{2n}\log\frac{|\frac{1}{2^{|\Gamma|}}\sum_{\Delta\subset\Gamma}K^{(n)}_{S(\Delta)-S(\bar{\Delta}\cap\Gamma)+Z}|}{|K^{(n)}_{Z}|}\\ =\ &\frac{1}{2n}\log\frac{|\sum_{j\in\Gamma}K^{(n)}_{S_j}+K^{(n)}_{Z}|}{|K^{(n)}_{Z}|}.\end{aligned}$$

したがって

$$C_{n,FB}(P_1,P_2,\cdots,P_m)\subset 2C_n(P_1,P_2,\cdots,P_m).$$

q.e.d.

3 フィードバックをもつ1入力ガウス型通信路の容量の上界

フィードバックをもたないガウス型通信路の容量は次で与えられることは周知の事実である.

Proposition 3

$$C_n(P)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{nP+r_1+r_2+\cdots+r_k}{kr_i},$$

ただし $0<r_1\le r_2\le\cdots\le r_n$ は $K^{(n)}_Z$ の固有値, $k(\le n)$ は $nP+r_1+r_2+\cdots+r_k>kr_k$ を満たす最大整数である.

一方フィードバックをもつ場合の容量 $C_{n,FB}(P)$ は正確には求められないのでその上界が問題となる．過去様々な形の上界が得られたが，その中で特に注目すべきものがある．Cover and Pombra [2] によって与えられたものである．

Proposition 4

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le 2C_n(P),$$

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(P) + \frac{1}{2}\log 2.$$

この結果をさらに精密化した α-bound と呼ばれる上界が Chen and Yanagi [1] によって得られた．

Proposition 5 次の (1)，(2) が成り立つ．

(1) 任意の $\alpha > 0$ と任意の $P > 0$ に対して次が成り立つ．

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le (1+\frac{1}{\alpha})C_n(\alpha P).$$

(2) $G(P,\alpha) = (1+\frac{1}{\alpha})C_n(\alpha P)$ とおく．このとき次の (a)，(b) が成り立つ．

(a) $G(P^*,1) = \min_{\alpha>0} G(P^*,\alpha)$ となる $P^* > 0$ が存在する．

(b) 任意の $P \ne P^*$ に対して $G(P,\alpha) < G(P,1)$ となる $\alpha > 0$ が存在する．

Proposition 6 次の (1)．(2) が成り立つ．

(1) 任意の $\alpha > 0$ と任意の $P > 0$ に対して次のが成り立つ．

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(\alpha P) + \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{\alpha}).$$

(2) $F(P,\alpha) = C_n(\alpha P) + \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{\alpha})$ とおく．このとき次の (a)，(b) が成り立つ．

(a) $F(P^*,1) = \min_{\alpha>0} F(P^*,\alpha)$ となる $P^* > 0$ が存在する．

(b) 任意の $P \ne P^*$ に対して $F(P,\alpha) < F(P,1)$ となる $\alpha > 0$ が存在する．

4 容量領域の α-outer bound

この論文では Ordentlich [5] によって与えられた Proposition 2 の拡張となる α-outer bound を得る.

Theorem 1 任意の $\alpha > 0$ に対して

$$C_n(P_1, P_2, \cdots, P_m) \subset C_{n,FB}(P_1, P_2, \cdots, P_m) \subset (1 + \frac{1}{\alpha})C_n(\alpha P_1, \alpha P_2, \cdots, \alpha P_m).$$

Outline of Proof. Δ-total capacity は次で与えられる.

$$\bar{C}_{n,FB}(P_1, P_2, \cdots, P_{|\Delta|}) = \max R(\Delta),$$

ただし任意の $\Delta \subset \Gamma$ に対して次を満たす.

$$R(\Delta) = \frac{1}{2n} \log \frac{|K^{(n)}_{S(\Delta)-S(\bar{\Delta}\cap\Gamma)+Z}|}{|K^{(n)}_Z|}.$$

また次も満たす.

$$\frac{1}{n} Tr[K^{(n)}_{S_j}] \leq P_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

このとき任意の $\alpha > 0$ と任意の $P > 0$ に対して次を得る.

$$\bar{C}_{n,FB}(P, P, \cdots, P) \leq (1 + \frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha P, \alpha P, \cdots, \alpha P).$$

この証明の詳細は Appendix で与える.
$\bar{C}_{n,FB}(P_1, P_2, \cdots, P_{|\Delta|})$ は $P_1, P_2, \cdots, P_{|\Delta|}$ の symmetric function であり, $\bar{C}_{n,FB}(\cdot, \cdots, \cdot)$ は concave function だから次の一連の不等式を得る. ここで

$$\bar{P} = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j\in\Delta} P_j$$

とおいた.

$$\begin{aligned}
& \bar{C}_{n,FB}(P_1, P_2, \cdots, P_{|\Delta|}) \\
= & \sum_{j\in\Delta} \frac{1}{|\Delta|} \bar{C}_{n,FB}(P_1, P_2, \cdots, P_{|\Delta|}) \\
\leq & \bar{C}_{n,FB}(\frac{1}{|\Delta|} \sum_{j\in\Delta} P_j, \cdots, \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j\in\Delta} P_j) \\
= & \bar{C}_{n,FB}(\bar{P}, \bar{P}, \cdots, \bar{P}) \\
\leq & (1 + \frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha\bar{P}, \cdots, \alpha\bar{P}) \\
= & (1 + \frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha P_1, \cdots, \alpha P_{|\Delta|}).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$C_{n,FB}(P_1, P_2, \cdots, P_m) \subset (1 + \frac{1}{\alpha})C_n(\alpha P_1, \alpha P_2, \cdots, \alpha P_m).$$

q.e.d.

5 Appendix

煩雑さをさけるために $K_Z^{(n)}$ を K_Z のように (n) を省略して書くことにする. 任意の $\alpha > 0$ と任意の $P > 0$ に対して

$$\bar{C}_{n,FB}(P, \cdots, P) \leq (1 + \frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha P, \cdots, \alpha P)$$

が成り立つことを示せばよい. まず (1) において $\Delta = \Gamma$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\Gamma} R_j &\leq \frac{1}{2n}\log\frac{|K_{\sum_{j\in\Gamma}S_j+Z}|}{|K_Z|} \\
&= \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{|K_{\sum_{j\in\Gamma}S_j+Z}|^{\alpha/(1+\alpha)}}{|K_Z|^{\alpha/(1+\alpha)}} \\
&= \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{|K_{\sum_{j\in\Gamma}S_j+Z}|^{\alpha/(1+\alpha)}|K_Z|^{1/(1+\alpha)}}{|K_Z|}.
\end{aligned}$$

ここで $|K_Z| \leq |K_{\alpha\sum_{j\in\Gamma}S_j-Z}|$ だから

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\Gamma} R_j &\leq \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{|K_{\sum_{j\in\Gamma}S_j+Z}|^{\alpha/(1+\alpha)}|K_{\alpha\sum_{j\in\Gamma}S_j-Z}|^{1/(1+\alpha)}}{|K_Z|} \\
&\leq \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{|\frac{\alpha}{1+\alpha}K_{\sum_{j\in\Gamma}S_j+Z} + \frac{1}{1+\alpha}K_{\alpha\sum_{j\in\Gamma}S_j-Z}|}{|K_Z|} \\
&= \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{|\alpha K_{\sum_{j\in\Gamma}S_j} + K_Z|}{|K_Z|}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

ここで今 Γ 内のすべての j に対して同じ power が課せられているとすると (3) は次のように表される.

$$\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + |\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha K_{X_1X_2} + K_Z|}{|K_Z|}.$$

$D = |\Gamma|\alpha K_X + K_Z$ とおくと

$$\begin{aligned}
&||\Gamma|\alpha K_X + |\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha K_{X_1X_2} + K_Z| \\
=\ &|D + |\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha K_{X_1X_2}| \\
=\ &|D^{1/2}(I + |\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2})D^{1/2}| \\
=\ &|D||I + |\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}|.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\Gamma} R_j &\le \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} \\
&\quad +\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log|I+|\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}| \\
&\le \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} \\
&\quad +\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha})\log\{\frac{1}{n}tr[I+|\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}]\} \\
&= \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} \\
&\quad +\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha})\log\{1+\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha}{n}tr[D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}]\}.
\end{aligned}$$

ここで $\bar{P}=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{j\in\Gamma}P_j$ とおくと次が成り立つ.

$$\bar{C}_{n,FB}(\bar{P},\cdots,\bar{P}) \le (1+\frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha\bar{P},\cdots,\alpha\bar{P})+T_1, \tag{4}$$

ただし

$$T_1=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha})\log\{1+\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)\alpha}{n}tr[D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}]\}.$$

次に第2の不等式を求めるために $\alpha>0$ とし Γ の subset Δ で

$$|\Delta|=\frac{|\Gamma|\alpha}{1+\alpha}$$

となるものを考える. このとき

$$|\bar{\Delta}\cap\Gamma|=\frac{|\Gamma|}{1+\alpha}.$$

ここでこれらの集合の大きさは integer であるように選ばなければならない. したがって α は.

$$\alpha_i=\frac{i}{|\Gamma|-i},\quad 0\le i\le|\Gamma|-1$$

でなければならない. ここで次の Lemma を必要とする.

Lemma 1 フィードバックをもつ *non-white additive noise multiple-access channel* に対してレートベクトル $(R_1,R_2,\cdots,R_m)$ は次のときのみ *achievable* である.
任意の $\Delta,\Gamma(\Delta\subset\Gamma\subset\{1,2,\cdots,m\})$ と任意の下半行列 L に対して

$$\sum_{j\in\Delta}R_j \le \frac{1}{2n}\log\frac{|K_{\sum_{j\in\Delta}S_j-L\sum_{j\in\bar{\Delta}\cap\Gamma}S_j+Z}|}{|K_Z|}$$

となるような *feedback code* が存在する.

Lemma 1 より $L = \alpha I$ とおくと

$$\sum_{j\in\Delta} R_j \le \frac{1}{2n}\log\frac{|K_{\sum_{j\in\Delta} S_j - \sum_{j\in\Delta\cap\Gamma}\alpha S_j + Z}|}{|K_Z|}\frac{1}{2n}\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z - |\Gamma|\alpha K_{X_1X_2}|}{|K_Z|}.$$

ここで $D = |\Gamma|\alpha K_X + K_Z$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Delta} R_j &= \frac{1}{2n}\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} + \frac{1}{2n}\log|I - |\Gamma|\alpha D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}| \\ &\le \frac{1}{2n}\log\frac{|\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} + \frac{1}{2}\log\{\frac{1}{n}tr[I - |\Gamma|\alpha D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}]\} \\ &= \frac{1}{2n}\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} + \frac{1}{2}\log\{1 - \frac{|\Gamma|\alpha}{n}tr[D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}]\}.\end{aligned}$$

この右辺を B とおく．このとき $\sum_{j\in\Delta} R_j \le B$. サイズ $|\Delta| = \frac{|\Gamma|\alpha}{1+\alpha}$ をもつすべての subsets Δ について和をとる．$N_{|\Delta|}$ をそれらの subsets の個数とすると

$$N_{|\Delta|}\sum_{j\in\Delta} R_j \le N_{|\Delta|}B.$$

左辺を $N_{|\Gamma|}\sum_{j\in\Gamma} R_j$ とおくと

$$\sum_{j\in\Gamma} R_j \le \frac{N_{|\Delta|}}{N_{|\Gamma|}}B.$$

このとき

$$N_{|\Gamma|} = \begin{pmatrix} |\Gamma|-1 \\ |\Delta|-1 \end{pmatrix},\quad N_{|\Delta|} = \begin{pmatrix} |\Gamma| \\ |\Delta| \end{pmatrix}$$

であることに注意すると

$$\frac{N_{|\Delta|}}{N_{|\Gamma|}} = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

したがって

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\Gamma} R_j \\ \le\ & \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha})\log\{I - \frac{|\Gamma|\alpha}{n}tr[D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}]\} \\ =\ & \frac{1}{2n}(1+\frac{1}{\alpha})\log\frac{||\Gamma|\alpha K_X + K_Z|}{|K_Z|} + T_2, \qquad (5)\end{aligned}$$

ただし

$$T_2 = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha})\log\{1 - \frac{|\Gamma|\alpha}{n}tr[D^{-1/2}K_{X_1X_2}D^{-1/2}]\}.$$

(4), (5) より

$$\bar{C}_{n,FB}(\bar{P},\cdots,\bar{P}) \le (1+\frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha\bar{P},\cdots,\alpha\bar{P}) + \min\{T_1,T_2\}.$$

ここで $sgnT_1 = -sgnT_2$ より $\min\{T_1,T_2\} \le 0$. したがって

$$\bar{C}_{n,FB}(\bar{P},\cdots,\bar{P}) \le (1+\frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha\bar{P},\cdots,\alpha\bar{P}).$$

Remark 1 *Theorem 1* の証明は

$$\alpha = \alpha_i = \frac{i}{|\Gamma|-i},\quad 0 \le i \le |\Gamma|-1$$

のときのみについての α *outer bound* を導いたのみである. 証明を完結するには α が正のすべての有理数を含むように *outer bound* をいかに拡張するかを示さなければならないので以下そのことについて言及する.
有理数は $\mathbb{R}$ の *dense subset* をなすので任意の有理数 $\alpha = \frac{q}{p}$ を考える. 2つの整数 K, L (ただし L は0 から $K-1$ までの整数) で $\alpha = \frac{L}{K-L}$ となるものを選ぶ. 実際 $L = p, K = p+q$ で $K \ge m$ と仮定してよい. 今、もともとの m 個の *user* と $K-m$ の *virtual users* から成る K *users* の集合を考える. j が $m+1$ から K まで動く時 *virtual users* は *power constraints* $\bar{P}_j$ をもつ. これらの K *users* と α に対する最大 *sum-rate* についての *upper bound* に適用すると次を得る.

$$\bar{C}_{n,FB}(\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots,\bar{P}_K) \le (1+\frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha\bar{P}_1,\alpha\bar{P}_2,\ldots,\alpha\bar{P}_K).$$

$m+1 \le j \le K$ に対して $\bar{P}_j \to 0$ とすると m *users* に対する *upper bound* を得る.

Remark 2 *Proposition 5* と同様に

$$\bar{G}_\Delta(P,\alpha) = (1+\frac{1}{\alpha})\bar{C}_n(\alpha P,\ldots,\alpha P)$$

とおくと次の (a), (b) が成り立つ.

(a) $\bar{G}_\Delta(P^*,1) = \min_{\alpha>0} \bar{G}_\Delta(P^*,\alpha)$ となる $P^* > 0$ が存在する.

(b) 任意の $P \ne P^*$ に対して $\bar{G}_\Delta(P,\alpha) < \bar{G}_\Delta(P,1)$ となる $\alpha > 0$ が存在する.

ここで任意の部分集合 $\Delta \subset \{1,2,\ldots,m\}$ に対して上のことが成り立つので、この論文で与えられる α-*outer bound* は *Ordentlich* の結果より厳密な意味で狭い *outer bound* を与えることになる.

References

[1] H.W.Chen and K.Yanagi, Refinements of the half-bit and factor-of-two bounds for capacity in Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. IT, 45(1999), 319-325.

[2] T.M.Cover and S.Pombra, Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. IT, 35(1989), 37-43.

[3] T.M.Cover and J.A.Thomas, Elements of Information Theory, John Wiley and Sons, Inc., 1991.

[4] C.W.Keilers, The capacity of the spectral Gaussian multiple-access channel, Ph.D., Thesis, Dept. Elect. Eng., Stanford, CA, May 1976.

[5] E.Ordentlich, On the factor of two bound for Gaussian multiple access channels with feedback, IEEE Trans. IT, 42(1996), 2231-2236.

[6] S.Pombra and T.M.Cover, Non white Gaussian multiple access channels with feedback, IEEE Trans. IT, 40(1994), 884-892.

[7] J.A.Thomas, Feedback can at most double Gaussian multiple access channel capacity, IEEE Trans. IT, 33(1987), 711-716.

[8] K.Yanagi, Outer bound of capacity region in m-user non-white Gaussian multiple access chahnnelwith feedback, Proc. Sym. Applied Functional Analysis, 1995, 128-135.

[9] K.Yanagi and T.Wani-ishi, On the outer bound of capacity region in Gaussian multiple access channel with feedback, Proc. SITA, 1995, 259-265.

[10] K.Yanagi and T.Hirayama, On the α outer bound of capacity region in Gaussian multiple access channel with feedback, Proc. SITA, 2003, 249-252.

[11] K.Yanagi, J.W.Yu and I-F.Chao, On some inequalities for capacity of mixed Gaussian channels with feedback, Arch. Inequalities Appl., 2(2004). 13-24.