数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 175-186

ある種の錐線形システムに関する二者択一の定理の構成的証明

東邦大学理学部　並木　誠 (NAMIKI Makoto)
Faculty of Science, Toho University

概要

本稿では，2次錐制約をたった一つだけもつ線形等式システムに関する二者択一の定理の構成的証明を試みる．この構成的証明と錐線形システムにおける双対理論をあわせて考えれば，錐計画問題を解くためのアルゴリズムとなりうるであろう．本稿はそのための第一ステップである．また特殊ケースとして，線形等式システムに関する二者択一の定理の構成的証明が，シンプレックス法でもない内点法でもない，非常に単純な線形計画問題の解法として利用できることもあわせて紹介する．

1 はじめに

m, n を自然数，$\boldsymbol{c}$ を n 次元実ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を m 次元実ベクトル，A を $m\times n$ 実行列としよう．線形計画問題とは，「線形等式制約: $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と非負条件: $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$ の下で，線形目的関数: $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$ を最小（または最大）にするような n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を見つけよ，或はそのようなベクトルが存在しないことを示せ」という問題であり次のように記述される．

$$\text{(P)}\quad \min\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\} \tag{1}$$

線形計画問題の理論の中核をなすものが，弱双対定理，(強) 双対定理，基本定理などの諸定理，いわゆる双対理論と呼ばれるものである．双対理論を説明するためには双対問題を導入しなければならない．上の問題 (P) に対する双対問題は，同じ定数ベクトルや行列を用いて次のように定義される．

$$\text{(D)}\quad \max\{\boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{y} | A^\top\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}\}. \tag{2}$$

簡単な式の変形で，このように定義された問題 (D) もまた線形計画問題であること，さらに (D) の双対問題は元の問題 (P) 自身になるということも確かめられる．双対理論では，問題 (P) だけでなくその双対問題 (D) も同時に扱い，問題 (P) を解くことと問題 (D) を解くということが本質的には等価であることを示している．詳しくは第2節で述べる．

線形計画問題の双対理論に関する諸定理を証明するために，次の線形等式システムにおける二者択一の定理が非常に有効である．

定理 1 (Farkas [2]) A を $m\times n$ 実定数行列，$\boldsymbol{b}$ を m 次元実定数ベクトルとする．次の二つの解集合のいずれか一方かつ一方のみが非空である．

$$X_F(A,\boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\},$$
$$Y_F(A,\boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m | A^\top\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{y}>0\}.$$

Key words. conic linear system, alternative theorem, construction

文献 松井-並木 [5] ではこの二者択一の定理の初等的，構成的な証明を与えている．第2節ではその証明を紹介し，それがどのように線形計画問題の解法に利用可能であるか，具体的なアルゴリズムを提案する．

線形計画問題や二者択一の定理は，凸錘とその双対錘を導入することによって一般化することが可能である．n 次元ユークリッド空間内の部分集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，C の双対 C^* を次のように定義する．

$$C^* := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \in C\} \tag{3}$$

任意の $C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，C^* は閉凸錘，すなわち，閉集合かつ凸集合かつ錘である．ちなみに C が錘であるとは，$\boldsymbol{x} \in C \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} \in C, \forall \alpha \geq 0$ を満たすことである．もし，C が閉凸錘ならば $(C^*)^* = C$ となる．

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を閉凸錘とする，すなわち $C = C^{**}$ とする．線形計画問題を閉凸錘を用いて以下のように一般化した問題，錘線形計画問題を考える．線形計画問題との違いは非負条件の部分が凸錘に入っているかどうかである．

$$\text{(CP)} \quad \min\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in C\}. \tag{4}$$

さらにその双対問題は

$$\text{(CD)} \quad \max\{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} | \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} \in C^*\}. \tag{5}$$

となる．並木-塚田 [6] では，上の問題 (CP) と (DP) 間の双対定理を，次の凸錘における二者択一の定理を用いて証明している．

定理 2 $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 実定数行列，$\boldsymbol{b}$ を m 次元実定数ベクトルとする．$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を閉凸錘とする．もし，$\boldsymbol{A}[C]$ が閉集合ならば，次の二つの解集合のいずれか一方かつ一方のみが非空である．

$$X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, C) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in C\},$$
$$Y(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, C) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} \in C^*, \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0\}.$$

但し，$\boldsymbol{A}[C] := \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{x} \in C\}$（写像 $\boldsymbol{A}$ による C の像）である．

しかしながら，双対定理が成り立つための複雑な十分条件があり，また二者択一の定理の証明自体構成的ではないため，すぐさま錘線形計画の解法には適用できない．本稿の題3節では，その第一段階として，上の二者択一の定理において，凸錘 C が2次錘1つだけからなるとき，構成的な証明を与えている．

2 線形計画問題の場合

強双対定理の証明は，許容解の存在性，つまり線形不等式系の解の存在性の特長付けと本質的な関わりがある．この節では，線形不等式系の解の存在性について，いくつかの二者択一の定理を導入する．さらにそれらのの二者択一の定理の構成的な証明を紹介し，それを利用した非常に単純な線形計画問題の再起的解法を具体的に示す．

可算有限集合 S と一つの要素からなる集合 $\{j\}$ に対し，$S \cup \{j\}$ を $S + j$ と書く．また $j \in S$ の時，$S \setminus \{j\}$ を $S - j$ と書く．集合 S, I, J, K が $I \cap J = J \cap K = K \cap I = \emptyset$ と $S = I \cup J \cup K$ を満たすとき，I, J, K は S の分割であると言う．まず最初に通常知られている Farkas の二者択一の定理（定理 1）より一般的な形式の以下の主張を証明する．

定理 3 (一般形 Farkas の二者択一の定理) 任意の $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と，任意の m 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し，以下が成り立つ．行列 $\boldsymbol{A}$ の列の添え字集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，A_i を $\boldsymbol{A}$ の第 i 列ベクトルとする．N の分割 I, J, K に対し，$X(I,J,K)$, $Y(I,J,K)$ を以下のように定義する．

$$X(I,J,K) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, & \\ x_i \geq 0 & (i \in I) \\ x_i \text{ は自由} & (i \in J) \\ x_i = 0 & (i \in K) \end{array} \right\},$$
$$Y(I,J,K) := \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{ll} {A_i}^\top \boldsymbol{y} \leq 0 & (i \in I) \\ {A_i}^\top \boldsymbol{y} = 0 & (i \in J) \\ {A_i}^\top \boldsymbol{y} \text{ は自由} & (i \in K) \\ \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} > 0 & \end{array} \right\}.$$

N の任意の分割 I, J, K に対し，$X(I,J,K)$ と $Y(I,J,K)$ のうちいずれか一方かつ一方のみが非空である．

上の一般形 Farkas の二者択一の定理において，N の分部分集合 I, J, K を $I = N, J = \emptyset, K = \emptyset$ とすれば，Farkas の二者択一の定理（定理 1）を得る．また，$I = \emptyset, J = N, K = \emptyset$ とすれば，次の Gale[3] による二者択一の定理が得られる．

定理 4 (Gale の二者択一の定理 [3]) M を $m \times n$ 実行列とする．以下の 2 つの解集合のうち一方かつ一方のみが非空である．

$$X_G(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in R^n | \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\},$$
$$Y_G(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{y} \in R^m | \boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} > 0\}.$$

以下にこれらの定理の構成的な証明を紹介しよう．特徴的なのは，線形代数の高度な知識を必要とせず簡単な証明になっていること，定理の主張を示す解を実際に求める再起的な有限時間算法が直ちに導出可能であることである．

定理 3（一般形 Farkas の二者択一の定理）の証明：
$\overline{\boldsymbol{x}} \in X(I,J,K)$ かつ $\overline{\boldsymbol{y}} \in Y(I,J,K)$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 < \boldsymbol{b}^\top \overline{\boldsymbol{y}} &= (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^\top \overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} \\ &= \textstyle\sum_{i \in I} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \sum_{i \in J} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \sum_{i \in K} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i \\ &= \textstyle\sum_{i \in I} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + 0 + 0 \leq 0 \end{aligned}$$

となり矛盾である．故に，$X(I,J,K)$ と $Y(I,J,K)$ が同時に非空となることはあり得ない．以下では $X(I,J,K)$ と $Y(I,J,K)$ の一方が必ず非空となることを，I の要素数に関する帰納法を用いて示す．

(1) $|I| = 0$ の場合，つまり $I = \emptyset$ の場合，Gale の二者択一の定理と等価な定理になることは容易に確かめられる．この場合に関しては別に証明を与える．

(2) 正整数 k に関して，$|I| < k$ ならば主張が成り立つと仮定して，$|I| = k$ の場合に主張が成り立つことを示す．

I 中の要素を 1 つ選び l とし，次の 4 つの集合を考える．

$$X(I-l, J+l, K), X(I-l, J, K+l),$$
$$Y(I-l, J+l, K), Y(I-l, J, K+l).$$

$X(I,J,K) \supseteq X(I-l,J,K+l)$ が成り立つことは容易に確かめられる．つまり $X(I-l,J,K+l) \neq \emptyset$ ならば $X(I,J,K) \neq \emptyset$ である．ゆえに $X(I-l,J,K+l) = \emptyset$ の場合のみ考えればよい．帰納法の仮定より，$X(I-l,J,K+l)$ と $Y(I-l,J,K+l)$ は丁度一方が非空となる事から，$Y(I-l,J,K+l)$ が非空の場合のみ議論すればよい．

同様に，$Y(I,J,K) \supseteq Y(I-l,J+l,K)$ が成り立つことは容易に確かめられる，つまり $Y(I-l,J+l,K) \neq \emptyset$ ならば $Y(I,J,K) \neq \emptyset$ である．ゆえに $Y(I-l,J+l,K) = \emptyset$ の場合のみ考えればよい．帰納法の仮定より，2つの集合 $X(I-l,J+l,K)$ と $Y(I-l,J+l,K)$ は丁度一方が非空なので，$X(I-l,J+l,K)$ が非空の場合のみ議論すればよい．

上記の議論から，以下の要素が存在する場合のみ議論すればよい：

$$\exists \overline{\boldsymbol{x}} \in X(I-l,J+l,K) \text{ かつ } \exists \overline{\boldsymbol{y}} \in Y(I-l,J,K+l).$$

解 $\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}$ の定義より，

$$\begin{aligned} 0 &< \boldsymbol{b}^\top \overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{y}}^\top (A\overline{\boldsymbol{x}}) \\ &= \textstyle\sum_{i \in I-l} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l \overline{x}_l + \sum_{i \in J \cup K} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i \\ &= \textstyle\sum_{i \in I-l} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l \overline{x}_l \leq \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l \overline{x}_l \end{aligned}$$

となり，$\overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l < 0$ または $\overline{x}_l > 0$ が成り立つ．$\overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l < 0$ ならば，$\overline{\boldsymbol{y}}$ は $Y(I,J,K)$ の解であり，$\overline{x}_l > 0$ ならば，$\overline{\boldsymbol{x}}$ は $X(I,J,K)$ の解である．よって主張は証明された． ∎

次に定理4を証明する．

定理4（Galeの二者択一の定理）の証明：

$X_G(\boldsymbol{M},\boldsymbol{b})$ と $Y_G(\boldsymbol{M},\boldsymbol{b})$ が同時に要素を持つことがあり得ないのは定理3の証明中で示した．以下では，$X_G(\boldsymbol{M},\boldsymbol{b})$ と $Y_G(\boldsymbol{M},\boldsymbol{b})$ の少なくとも一方が非空となることを，行列 $\boldsymbol{M}$ の列数と行数の和に関する帰納法で示す．

1. $\boldsymbol{M}$ の行数が1のとき．$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\alpha}^\top](\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n)$，$\boldsymbol{b} = [\beta](\beta \in \mathbb{R})$ という形になる．

1-(i) $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ の場合．$\alpha_i \neq 0$ となる i が存在し，$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ を次のように決定すれば，それが $X_G(\boldsymbol{M},\boldsymbol{b})$ の解となる．

$$\overline{x}_j := \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha_i} & (j = i), \\ 0 & (j \neq i). \end{cases}$$

1-(ii) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \beta \neq 0$ の場合．$y \in \mathbb{R}$ を $\beta < 0$ のとき $w = -1$，$\beta > 0$ のとき $w = 1$ と決定すればそれが $Y_G(\boldsymbol{M},\boldsymbol{b})$ の解となる．

1-(iii) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \beta = 0$ の場合．任意の $x \in \mathbb{R}^n$ が $X_G(\boldsymbol{M},\boldsymbol{b})$ の解となる．

2. $\boldsymbol{M}$ の行数が2以上のとき．$\boldsymbol{M}$ を $m \times n$ 行列とし，$m + n = k$ とする．行数と列数の和が k より小さいの任意の行列に関して定理の主張が成り立つと仮定する．

行列 $\boldsymbol{M}$ の一番上の行を $\boldsymbol{\alpha}^\top(\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n)$ とし，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の第一要素の値を $\beta\ (\beta \in \mathbb{R})$ とする．さらに $\boldsymbol{M}'$, $\boldsymbol{b}'$ を $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^\top \\ \boldsymbol{M}' \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix}$ を満たすように定義する．行列 $\boldsymbol{M}'$ および $\boldsymbol{M}'^\top$ の行数と列数の和は $k-1$ であり，帰納法の仮定より，次の2つの集合

$$\begin{aligned} X_G(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{b}') &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{M}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}, \\ Y_G(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{b}') &= \{\boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^{m-1} \mid \boldsymbol{M}'^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' > 0\} \end{aligned}$$

は，いずれか一方のみが非空である．また，

$$X_G(M'^{\top}, \alpha) = \{z \in \mathbb{R}^{m-1} \mid M'^{\top} z = \alpha\},$$
$$Y_G(M'^{\top}, \alpha) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid M'w = \mathbf{0}, \alpha^{\top} w > 0\}$$

の 2 つの集合はいずれか一方のみ非空となる．ゆえに，次の 2-(i)(ii)(iii) に場合分けすることができる．

2-(i) $\exists \overline{y} \in Y_G(M', b')$ の場合． $\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{y} \end{pmatrix} \in Y_G(M, b)$ となる．

2-(ii) $\exists \overline{x} \in X_G(M', b')$ かつ $\exists w \in Y_G(M'^{\top}, \alpha)$ の場合．ベクトル x^* を $x^* := \overline{x} - \left(\dfrac{\alpha^{\top}\overline{x} - \beta}{\alpha^{\top} w}\right) w$ と定義すると，

$$\alpha^{\top} x^* = \alpha^{\top}\overline{x} - \left(\frac{\alpha^{\top}\overline{x} - \beta}{\alpha^{\top} w}\right)\alpha^{\top} w = \beta,$$
$$M' x^* = M'\overline{x} - \left(\frac{\alpha^{\top}\overline{x} - \beta}{\alpha^{\top} w}\right) M' w = M'\overline{x} = b',$$

となり，$Mx^* = b$ が成り立ち $x^* \in X_G(M, b)$ である．

2-(iii) $\exists \overline{x} \in X_G(M', b')$ かつ $\exists z \in X_G(M'^{\top}, \alpha)$ の場合．$\alpha^{\top}\overline{x} = \beta$ ならば，$\overline{x} \in X_G(M, b)$ が成り立つ．$z^{\top} b' \neq \beta$ ならば，$y^* = \begin{pmatrix} -1 \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$y^{*\top} M = -\alpha^{\top} + z^{\top} M' = \mathbf{0}^{\top},$$
$$y^{*\top} b = -\beta + z^{\top} b' \neq 0,$$

を満たし，$y^* \in Y_G(M, b)$ または $-y^* \in Y_G(M, b)$ のどちらかが成り立つ．$\alpha^{\top}\overline{x} \neq \beta$ かつ $z^{\top} b' = \beta$ のときは，$\beta \neq \alpha^{\top}\overline{x} = z^{\top} M' \overline{x} = z^{\top} b' = \beta$ となり矛盾である．

以上で主張は証明された． ∎

準備が整ったので一般形 Farkas の二者択一の定理を用いて双対定理を証明しよう．m, n を任意の正整数とし，A, b, c を $m \times n$ 実行列，m 次元実ベクトル，n 次元実ベクトルとする．次の線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) について考える．

$$\text{(P)} \quad \min\{c^{\top} x \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\},$$
$$\text{(D)} \quad \max\{b^{\top} y \mid A^{\top} y \leq c\}.$$

次の定理がすぐざま成り立つことがわかる．

定理 5 (弱双対定理) *2 つの線形計画問題 (P) と (D) の任意の実行可能解の対 $\overline{x}, \overline{y}$ は，$b^{\top}\overline{y} \leq c^{\top} x$ を満たす．*

証明 問題 (P), (D) の定義と $\overline{x}, \overline{y}$ が各々の実行可能解である事から $b^{\top}\overline{y} = (A\overline{x})^{\top}\overline{y} \leq c^{\top}\overline{x}$ となる． ∎

定理 6 (強双対定理) *二つの線形計画問題 (P) と (D) のどちらも実行可能解を持つならば，(P) と (D) のいずれも最適解を持ち，最適値は一致する．*

証明 問題 (P) と (D) のいずれも実行可能解を持つと仮定し，以下の 不等式系

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}, \\ A^{\top} y \leq c,\ c^{\top} x \leq b^{\top} y \end{array} \right\}$$

を考える．X が空でなく，解 (x, y) を持つならば，それらはそれぞれ (P) (D) の実行可能解である．よって弱双対定理より明らかに上の不等式形の最後の不等式 $c^\top x \leq b^\top y$ の部分は等式で満たされる．故に，x, y はそれぞれ (P) と (D) の最適解であり，最適値も一致する．

以下では，(P) と (D) のいずれも実行可能解を持つにも関わらず X が空であると仮定をして矛盾を導く．スラック変数 s を導入し，不等式系 X を等式系に見やすく書き直すと，

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & \mathrm{O} & \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{I} & A^\top \\ \hline c^\top & & -b^\top \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ s \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x \geq 0,\ s \geq 0,$$

となる．ただし，I は単位行列を表し，O は適当なサイズの零行列を表す．一般形 Farkas の二者択一の定理より，X が空ならば次の線形不等式系

$$Y = \left\{ \begin{array}{c|l} w \in \mathbb{R}^m & A^\top w + qc \leq 0, \\ z \in \mathbb{R}^n & z \leq 0, q \leq 0, \\ q \in \mathbb{R} & Az - qb = 0, \\ & b^\top w + c^\top z > 0. \end{array} \right\}$$

が解 $(\overline{w} \in \mathbb{R}^m, \overline{z} \in \mathbb{R}^n, \overline{q} \in \mathbb{R})$ を持つ．

$\overline{q} < 0$ のとき，$\overline{x} = \frac{\overline{z}}{q}, \overline{y} = \frac{\overline{w}}{-q}$ とすれば，$\overline{x}, \overline{y}$ はそれぞれ (P), (D) の実行可能解となるが，$c^\top \overline{x} - b^\top \overline{y} = \frac{1}{q}(c^\top \overline{z} + b^\top \overline{y}) < 0$ となり弱双対定理に矛盾する．

$\overline{q} = 0$ のとき，$\overline{x}, \overline{y}$ をそれぞれ (P), (D) の実行可能解とする．但し，X が空なので $c^\top \overline{x} - b^\top \overline{y} > 0$ である．$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\overline{x}(\alpha) := \overline{x} - \alpha \overline{z}$，$\overline{y}(\alpha) := \overline{y} + \alpha \overline{w}$ とすれば，任意の $\alpha \geq 0$ に対して，$\overline{x}(\alpha), \overline{y}(\alpha)$ は (P), (D) の解となる．しかしながら，$\alpha > \frac{c^\top \overline{z} + b^\top \overline{w}}{c^\top \overline{x} - b^\top \overline{y}}$ となる α に対して，$c^\top \overline{x}(\alpha) - b^\top \overline{y}(\alpha) = c^\top \overline{x} - b^\top \overline{y} - \alpha(c^\top \overline{z} + b^\top \overline{w}) < 0$ となる．これは，弱双対定理に矛盾する．

以上で，(P) (D) がともに実行可能解を持つとき，X が空になることはあり得ず，(P), (D) ともに最適解を持ち，最適値が一致することが示せた． ∎

以上のように，Farkas の二者択一の定理を用いて線形計画問題の強双対定理を証明した．この証明の逆，つまり強双対定理から Farkas の二者択一の定理を証明することは比較的容易である（文献 [4] 等参照）．これらの証明は，原始的かつ構成的であるため，なんの工夫もなく次のように線形計画問題を解くためのアルゴリズムとなる．

Algorithm for Linear Programming
Input: An $m \times n$ rational matrix A, a rational n-vector c and a rational m-vector b;
Output: Solutions to (P) and (D) or a certificate of the nonexistence;
Initializations:

$$A' := \left[\begin{array}{c|c|c} A & \mathrm{O} & \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{I} & A^\top \\ \hline c^\top & & -b^\top \end{array}\right];\ b' = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix};\quad \begin{array}{l} I := \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n+1\}; \\ J := \{2n+2, 2n+3, \ldots, 2n+m+1\}; \\ K := \emptyset; \end{array}$$

begin
  call the procedure **GeneralFarkas**(A', b, I, J, K);
  if $X(I, J, K) \neq \emptyset$ **then**
    output a solution in $X(I, J, K)$; **stop**; (* (P) and (D) have optimal solutions *)
  else (* the case $Y(I, J, K) \neq \emptyset$ *)
    output a solution in $Y(I, J, K)$; **stop**;
      (* (P) and (D) have no optimal solutions *)
end.

Recursive Algorithm to get a vector in general Farkas's theorem
GeneralFarkas($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, I, J, K$);
Input: An $m \times n$ rational matrix $\boldsymbol{A}$, a rational m-vector $\boldsymbol{b}$ and
a partition of the index set $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, I, J, K;
Output: Exactly one of solutions of $X(I, J, K)$ and $Y(I, J, K)$;
begin
if $I \neq \emptyset$ **then**
choose $l \in I$;
call the procedure **GeneralFarkas**($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, I-l, J+l, K$);
call the procedure **GeneralFarkas**($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, I-l, J, K+l$);
if $X(I-l, J, K+l) \neq \emptyset$
return the solution of $X(I-l, J, K+l)$; (* a solution of $X(I, J, K)$ *)
elseif $Y(I-l, J+l, K) \neq \emptyset$
return the solution of $Y(I-l, J+l, K)$; (* a solution of $Y(I, J, K)$ *)
else (* the case $Y(I-l, J, K+1) \neq \emptyset$ and $X(I-l, J+l, K) \neq \emptyset$ *)
let $\overline{\boldsymbol{x}} \in X(I-l, J+l, K)$ and $\overline{\boldsymbol{y}} \in Y(I-l, J, K+l)$;
if $\overline{x}_l > 0$ **then return** $\overline{\boldsymbol{x}}$; (* a solution of $X(I, J, K)$ *)
else (* $A_l^\top \overline{\boldsymbol{y}} < 0$ *) **return** $\overline{\boldsymbol{y}}$; (* a solution of $Y(I, J, K)$ *)
else (* the case $I = \emptyset$ *)
$\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A}_J$;
call the procedure **Gale**($\boldsymbol{A}'$);
return exactly one of solutions of $X_G(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b})$ and $Y_G(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b})$;
end.

Recursive Algorithm to get a vector in Gale's theorem
Gale($\boldsymbol{M}, \boldsymbol{b}$);
Input: An $m \times n$ rational matrix $\boldsymbol{A}$, a rational m-vector $\boldsymbol{b}$;
Output: Exactly one of solutions of $X_G(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{b})$ and $Y_G(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{b})$;
begin
if $I \neq \emptyset$ **then**
choose $l \in I$;
call the procedure **GeneralFarkas**($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, I-l, J+l, K$);
call the procedure **GeneralFarkas**($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, I-l, J, K+l$);
if $X(I-l, J, K+l) \neq \emptyset$
return the solution of $X(I-l, J, K+l)$; (* a solution of $X(I, J, K)$ *)
elseif $Y(I-l, J+l, K) \neq \emptyset$
return the solution of $Y(I-l, J+l, K)$; (* a solution of $Y(I, J, K)$ *)
else (* the case $Y(I-l, J, K+1) \neq \emptyset$ and $X(I-l, J+l, K) \neq \emptyset$ *)
let $\overline{\boldsymbol{x}} \in X(I-l, J+l, K)$ and $\overline{\boldsymbol{y}} \in Y(I-l, J, K+l)$;
if $\overline{x}_l > 0$ **then return** $\overline{\boldsymbol{x}}$; (* a solution of $X(I, J, K)$ *)
else (* $A_l^\top \overline{\boldsymbol{y}} < 0$ *) **return** $\overline{\boldsymbol{y}}$; (* a solution of $Y(I, J, K)$ *)
else (* the case $I = \emptyset$ *)
$\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A}_J$;
call the procedure **Gale**($\boldsymbol{A}'$);
return exactly one of solutions of $X_G(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b})$ and $Y_G(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b})$;
end.

3 2次錐をもつ二者択一の定理の構成的証明

まず最初にこの節で扱う凸2次錐 $C_{(n)}$ を以下のように定義する．

$$\text{Second order cone (ice cream cone) } C_{(n)} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}\}$$

2次錐 $C_{(n)}$ の表面の概形は $n = 3$ のとき，図1のようになり，その形から ice-cream cone と呼ばれることもある．また，$C_{(n)}$ は自己双対錐，つまり $C^*_{(n)} = C_{(n)}$ である．
以下の2次凸錐制約を一つだけもつ線形システムの二者択一の定理が成り立つ．

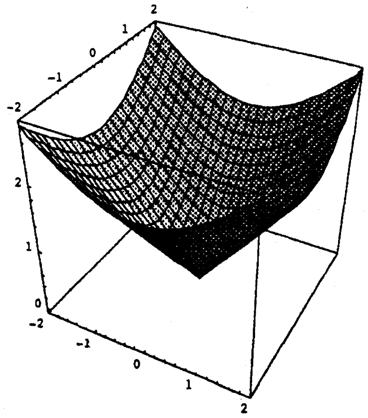

図 1: 2 次錘の概形

定理 7 $\boldsymbol{A}$ を $m\times n$ 実行列，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$ を m 次元実ベクトル，$C_{(n)}$ を上で定義した，凸 2 次錘とする．集合 $X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)})$ と $Y(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)})$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
&X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)}) := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\in C_{(n)}\},\\
&Y(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)}) := \{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{y}\in C^*_{(n)}(=C_{(n)}),\ \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{y}<0,\ \textit{for some}\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m\}.
\end{aligned}$$

もし，$\boldsymbol{A}[C_{(n)}]$ が閉集合ならば，$X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)})$ と $Y(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)})$ のいずれか一方かつ一方のみが非空である．

この定理自体は文献 [1, 6] 等でより一般的な形の定理として証明されている．ここでは，構成的な別証明を与える．証明中は簡単な例題も挙げて解りやすく説明したつもりである．

証明　まず，前処理として線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を掃き出しにより次のように変形する．

$$\overset{[x_1,x_2,\ldots,x_n]}{\boxed{\quad\boldsymbol{A}\quad}} = \boxed{\boldsymbol{b}} \quad \overset{\text{掃き出し}}{\Rightarrow} \quad \underset{\boldsymbol{A}'}{\underset{\|}{\overset{[x_1,\ldots,x_m,\quad x_{m+1},\ldots,x_n]}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \boldsymbol{\alpha}^\top \\ \cline{4-4} & \ddots & & \boldsymbol{B} \\ & & 1 & \end{array}\right]}}} = \underset{\boldsymbol{b}'}{\underset{\|}{\left[\begin{array}{c}\beta\\ \hline \boldsymbol{b}\end{array}\right]}}$$

但し，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^{n-m}, \beta\in\mathbb{R}, \boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{(m-1)\times(n-m)}, \boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{m-1}$ である（右辺と左辺の $\boldsymbol{b}$ は異なることに注意）．一般性を欠くことなしに上のように変形できる，つまり $[x_1,\ldots,x_m]$ が次のように $[x_{m+1},\ldots,x_n]$ の線形結合で表される．

$$x_1=\beta-\boldsymbol{\alpha}^\top\begin{bmatrix}x_{m+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_2\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x_{m+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{6}$$

このように変形しても $X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)})=X(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{b},C_{(n)})$，$Y(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)})=Y(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{b},C_{(n)})$ $\boldsymbol{A}[C_{(n)}]=\boldsymbol{A}'[C_{(n)}]$ となることは容易に確かめられる．次に関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) := x_1-\sqrt{x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}$$

上式に式 (6 を代入し，整理しそれを新たに $g(\cdot)$ とおく．

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \beta - \boldsymbol{\alpha}^\top \bar{\boldsymbol{x}} - \sqrt{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^\top(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})\bar{\boldsymbol{x}}} =: g(\bar{\boldsymbol{x}})$$

但し，$\bar{\boldsymbol{x}} = [x_{m+1},\ldots,x_n]^\top$ である．上式の $\sqrt{\cdot}$ 中の $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}$ は正定値行列であり，よって Cholesky 分解可能である．つまり，$\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{D}^\top\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}$ は $m \times m$ 下三角行列 と表せる．

$g(\bar{\boldsymbol{x}})$ の 勾配ベクトル（一次微分）$\nabla g(\bar{\boldsymbol{x}})$ とヘシアン（二次微分）$Hg(\bar{\boldsymbol{x}})$ を計算すると

$$\nabla g(\bar{\boldsymbol{x}}) = -\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}}) \times \frac{1}{\sqrt{\kappa(\bar{\boldsymbol{x}})}} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &Hg(\bar{x}) = \\ &-\frac{1}{\sqrt{\kappa(\bar{\boldsymbol{x}})}}\{\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D} + (\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}})^2(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}})^\top\} \end{aligned} \tag{8}$$

となる．但し，$\kappa(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^\top(\boldsymbol{B}\top\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})\bar{\boldsymbol{b}}$ である．$-Hg(\bar{x})$ は非負定値（positive semi-definite）であるので，関数 $g(\bar{x})$ は凹関数であり，極大解（存在するならば）が最適解（最大）となることに注意する．今後の証明の方針としては，$g(\bar{\boldsymbol{x}}) =$ となる $\bar{\boldsymbol{x}}$ に着目して話を進める．

まずは次のように場合分けする．

(Case A) $\alpha = 0$ のとき．式 (7) より，

$$\bar{\boldsymbol{x}}^* := (\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{b}$$

のときのみ $\nabla g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) = \boldsymbol{0}$ となる．

もし $g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) \geq 0$ ならば，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は $X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)})$ の要素となる．

$g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) < 0$ ならば，$X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)}$ は空となり，その場合は次のように $Y(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},C_{(n)}$ の要素を構成する．

(Subcase A-a) $g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) < 0, \beta < 0$ のとき．$\boldsymbol{y} = [y_1,y_2,\ldots,y_m] := [1,0,\ldots,0]$ とすれば，$\boldsymbol{A}'^\top \boldsymbol{y} = [1,0,\ldots,0] \in C^*_{(n)}$ と $\boldsymbol{b}'^\top \boldsymbol{y} = -\beta > 0$ が確かめられ，$\boldsymbol{A}'^\top \boldsymbol{y}$ が $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{b}',C_{(n)})$ の要素となる．

$g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) < 0, \beta \geqslant 0$ のときは，まず，$\beta \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) \neq 0$ となることを示す．$\boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) = 0$ を仮定し，$g(\bar{\boldsymbol{x}}^*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) &= \beta - \sqrt{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^* + \bar{\boldsymbol{x}}^{*\top} \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}}^*} \\ &= \beta - \sqrt{(-\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{B} + \bar{\boldsymbol{x}}^{*\top} \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D})\bar{\boldsymbol{x}}^*} \\ &= \beta < 0 \ (\because \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}}^* = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

故に，$\beta \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) \neq 0$ である．このことを踏まえて，次のように場合分けする．

(Subcase A-b) $g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) < 0, \beta = 0$ のとき．$y_1^* \in \mathbb{R}$ と $\bar{\boldsymbol{y}}^* := [y_2^*, \bar{y}_3^*, \ldots, \bar{y}_m^*] \in \mathbb{R}^{m-1}$ を以下のように決めると

$$y_1 := -g(\bar{\boldsymbol{x}}^*),\ \bar{\boldsymbol{y}}^* := \begin{cases} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^* \text{ if } \boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) < 0 \\ -(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) \text{ if } \boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) > 0 \end{cases}$$

次の式が成り立つ．

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} y_1^* \\ \bar{\boldsymbol{y}}^* \end{bmatrix} = -\beta g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) - |\boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*)| < 0$$

次に，$A'^{\top}[y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*]^{\top}$ が凸錘 $C_{(n)}^*$ に属することを次の式展開で示す．

$$\begin{aligned}
& y_1^* - \sqrt{\bar{\boldsymbol{y}}^{*\top}\bar{\boldsymbol{y}}^* + (\boldsymbol{B}^{\top}\bar{\boldsymbol{y}}^*)^{\top}(\boldsymbol{B}^{\top}\bar{\boldsymbol{y}}^*)} \\
&= -g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) - \sqrt{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*)^{\top}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) + (\boldsymbol{B}^{\top}\bar{\boldsymbol{y}}^*)^{\top}(\boldsymbol{B}^{\top}\bar{\boldsymbol{y}}^*)} \\
&= -g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) - \sqrt{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*)^{\top}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) + \bar{\boldsymbol{x}}^{*\top}\bar{\boldsymbol{x}}^*} \\
&= -g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) - (\beta - g(\bar{\boldsymbol{x}}^*)) = \beta = 0 \geq 0
\end{aligned}$$

である．なぜなら

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{x}}^* &= (\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{b} \qquad & (\boldsymbol{B}^{\top}\bar{\boldsymbol{y}}^*)^{\top}(\boldsymbol{B}^{\top}\bar{\boldsymbol{y}}^*) \\
(\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})\bar{\boldsymbol{x}}^* &= \boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{b} & = (\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*)^{\top}(\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) \\
\bar{\boldsymbol{x}}^* &= \boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*, & = \bar{\boldsymbol{x}}^{*\top}\bar{\boldsymbol{x}}^*
\end{aligned}$$

の２つの式展開が成り立つからである．よって，$\boldsymbol{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*]$ は $Y(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b}', C_{(n)})$ の要素である．この場合を次の具体例で確かめてみよう．

例 1

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in C_{(3)}$$

このとき $g(x_3) = -\sqrt{2x_3^2 - 2x_3 + 1}$ であり，$x_3^* = \frac{1}{2}$ である．$f(x_3^*) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ で $\beta = 0$ であるから，$[y_1^*, y_2^*]$ を次のように決める．

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(= -f(x_3^*)) \\ -\frac{1}{2}(= -(1 - x_3^*)) \end{bmatrix}$$

すると，

$$\boldsymbol{A}'^{\top}\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in C_{(3)}^*, \boldsymbol{b}^{\top}\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} < 0$$

が成り立ち，$\boldsymbol{A}'^{\top}[y_1^*, y_2^*]^{\top} \in C_{(3)}^*$ が確かめられた．

Subcase $g(\bar{\boldsymbol{x}}^*) < 0, \beta > 0$ の場合，同様に次のように $\boldsymbol{y}^*$ を決めれば $Y(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b}', C_{(n)})$ の要素は求められる．

$$y_1^* := \beta - g(\bar{\boldsymbol{x}}^*),$$

$$\begin{bmatrix} y_2^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{bmatrix} := \begin{cases} -(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) \text{ if } \boldsymbol{b}^{\top}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) > 0 \\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^* \text{ if } \boldsymbol{b}^{\top}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}^*) < 0 \end{cases},$$

さて最後に

(Case B) $\alpha \neq 0$ のとき．

$$g(\bar{\boldsymbol{x}}) = \beta - \boldsymbol{\alpha}^{\top}\bar{\boldsymbol{x}} - \sqrt{\boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\top}(\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})\bar{\boldsymbol{x}}}$$

$$\nabla g(\bar{\boldsymbol{x}}) = -\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\top}\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}}}}(\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{x}})$$

であるので，

$$\bar{x}(\lambda) := -\lambda(D^\top D)^{-1}\alpha + (D^\top D)^{-1}B^\top b$$

とする．このとき，

$$\text{(i)}\exists\bar{x}^* \text{ s.t. } \nabla g(\bar{x}^*) = 0 \ \Rightarrow\ \exists\lambda^* \text{ s.t. } \nabla g(\bar{x}(\lambda^*)) = 0$$

が成り立つ．$\bar{x}(\lambda)$ を $g(\cdot)$ に代入し λ に関して整理し，それを $h(\lambda)$ とする．

$$g(\bar{x}(\lambda)) = \beta' - \alpha'\lambda - \sqrt{a\lambda^2 + b\lambda + c} =: h(\lambda)$$

但し，β', α', a, b, c はそれぞれ適当な数，ベクトルである．(i) の性質と g が凹関数であることから，

$$\text{(ii)}\exists\bar{x}^0 \text{ s.t. } g(\bar{x}^0) = 0 \Rightarrow \exists\lambda_0 \text{ s.t. } g(\bar{x}(\lambda_0)) = h(\lambda_0) = 0$$

が成り立つ．このとき，以下のように場合分けする．

(Case B-a) $\exists\lambda_0$ s.t. $h(\lambda_0) = 0, -\infty < \lambda_0 < +\infty$ のとき．

$$\begin{bmatrix} \beta \\ b - B\bar{x}(\lambda_0) \\ \bar{x}(\lambda_0) \end{bmatrix}$$

が $X(A, b, C_{(n)})$ の要素となる．

(Case B-b) $\nexists\lambda_0$ s.t. $h(\lambda_0) = 0, -\infty < \lambda_0 < +\infty)$ の場合．$h(\lambda) = \beta' - \alpha'\lambda - \sqrt{a\lambda^2 + b\lambda + c}$ を微分すると

$$\nabla h(\lambda) = -\alpha' - \frac{1}{2}(2a\lambda + b)\frac{1}{\sqrt{a\lambda^2 + b\lambda + c}}$$

が得られる．(iii) $\exists\bar{x}^*$ s.t. $\nabla g(\bar{x}^*) = 0 \Rightarrow \exists\lambda^*$ s.t. $\nabla g(\bar{x}(\lambda^*)) = 0 \Rightarrow \exists\lambda^*$ s.t. $\nabla h(\lambda^*) = 0$ が成り立つので，

$$\nabla h(\lambda) = -\alpha' - \frac{1}{2}(2a\lambda + b)\frac{1}{\sqrt{a\lambda^2 + b\lambda + c}} = 0$$

を解く．

(Subase B-b-1) $\exists\lambda^*$ s.t. $\nabla h(\lambda) = 0, -\infty < \lambda < +\infty$ のとき．$\bar{x}(\lambda^*)$ は $g(\bar{x})$ の最大値を与える．但し，$g(\bar{x}(\lambda^*) < 0$ である．(Case A) の場合と同じように $Y(A', b, C_{(n)})$ の要素を構成することができる．

(Subase B-b-2) $\nexists\lambda^*$ s.t. $\nabla h(\lambda) = 0, -\infty < \lambda < +\infty$ のとき，つまり $g(\bar{x})$ の最大値も存在せず $g(\bar{x}) = 0$ となる $\bar{x}$ も存在しない場合何が起っているかを，次の簡単な例を用いて説明しよう．

例 2

$$\begin{array}{cccc} x_1 & -\sqrt{2}x_3 & = & -1 \\ x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in C_{(3)}$$

を考えよう．

$$g(x_3) = -1 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{(1 - x_3)^2 + x_3^2}$$
$$g'(x_3) = \sqrt{2} - (2x_3 - 1)\frac{1}{\sqrt{(1-x_3)^2 + x_3^2}}$$

であり，$g(x_3)$ は決して 0 にはならず，また最大値も持たず $x_3 \to +\infty$ で 0 に近づく（図 *2*）．$A'[C_{(3)}]$ を調べてみると，$C_{(3)}$ の境界上の点 $(r, r\cos\theta, r\sin\theta)$ は A' によって図 *3* のようなある一つの直線に接する楕円に写される．$A'[C_{(3)}]$ はその直線の上側部分，但し，原点以外の直線上の点を除いた部分となり，$A'[C_{(3)}]$ が閉集合になっていないことが容易に確かめられる．

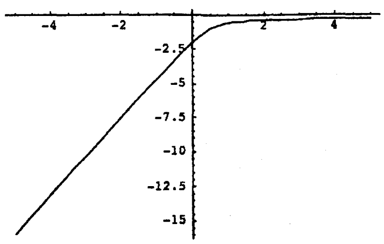

図 2: $g(x_3)$ の概形

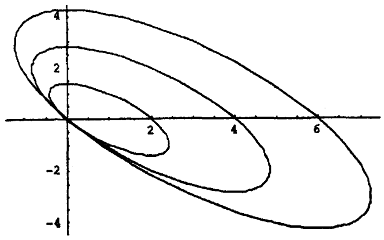

図 3: $A'[C_{(n)}]$ の概形

$A'[C_{(3)}]$ が閉集合ならば，このような状況は起こりえないということが証明できるが，多くの紙面をとることが予想されるのでここでは割愛する． ∎

4 最後に

本稿では，２次錘制約を一つだけ持つ線形システムの二者択一の定理の構成的証明を行った．また，錘計画の特殊な場合として，線形計画を取り上げ，線形システムにおける二者択一の定理の構成的証明の紹介，およびそれを応用した線形計画の解法を紹介した．最終目標は今回の構成的証明を利用して，錘計画問題の解法を構成することである．線形システムの二者択一の定理は，制約の部分が凸多面錘になっていることが理由で証明に帰納法が使えるのであろう．一般の錘の場合は，多面錘のように有限個の超平面で表すことはできない．従って，本稿のような解析が必要となる．さらにまた，文献 [6] にあるように，一般の錘の場合の二者択一の定理を双対定理に適応させるためには，複雑な十分条件が成り立っている必要がある．この十分条件を吟味し，できるだけ簡単な形にしていくというのも，最終目標の課題であると思われる．

参考文献

[1] B.D.Craven & J.J.Koliha, Generalizations of Farkas' Theorem, SIAM Math. Anal. 8(6), 983-997, 1977

[2] J.Farkas, Uber die Theorie der einfachen Ungleichungen, J. Reine Angew. Math. 124, 1-24, 1902.

[3] D.Gale, The Theory of Linear Economic Model, MacGraw-Hill, 1960.

[4] 今野浩，「線形計画法」，日科技連, 1987.

[5] 松井知己，並木誠, Farkas の補題と双対定理の初等的証明, 日本オペレーションズリサーチ学会誌 45(10), 2000.

[6] M. Namiki & M. Tsukada, Theorems of Alternative and Cone Programming, *Proceeding of China and Japan Joint Symposium on Applied Mathematics and Its Related Topics*, 2003.