数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 197-205

RIESZ 空間値測度と積分

信州大学・工学部　河邊　淳* (Jun Kawabe)
天野　雄介 (Yusuke Amano)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. この小論では，位相空間上の Riesz 空間値測度の弱収束に関する筆者の一連の結果を解説するための準備として，J.D.M. Wright の数編の論文をもとに Riesz 空間値測度と積分に関して現在までに得られている結果が簡潔にまとめられている.

1. 序論

ベクトル測度の研究は Banach 空間などのノルム構造 (線形位相構造) をもつ空間に値をとる場合に盛んに研究されてきた (Diestel & Uhl [3]，Dinculeanu [4]，Kluvánek & Knowles [11]). この研究とは別に，ノルム構造の代わりに順序構造をもつ Riesz 空間などに値をとるベクトル測度の研究が，イギリス，スロバキア，イタリア，ポーランドなどのヨーロッパ諸国で活発に行われてきている (Wright [14, 15, 16, 17], Riečan & Neubrunn [13]，Boccuto & Candeloro [2] 及びそられの中の文献).

Riesz 空間でベクトル測度の理論を展開する利点は，① 順序構造，特にベクトル測度の正値性に基づく豊富な概念や有益な結果を獲得できる可能性があること，② 得られた結果を L^p $(0 < p < 1)$ 空間などのノルム構造をもたない空間へ応用可能なことなどがある. 一方，これら利点との引き換えに，Riesz 空間値ベクトル測度の研究には下記のような少なからぬ困難さがある : ③ 順序構造は一般に全順序ではない，すなわち，$u \not\leq v$ と $u > v$ は同値ではない. ④ 解析学で有効な ε-テクニックが利用できない. ⑤ 一般には順序構造と整合する線形位相構造が存在しない (Floyd [5]). それゆえ，線形位相空間論および線形位相空間に値をとるベクトル測度に関する豊富な結果を活用できない. ⑥ 空間 $C[0,1]$ のように σ-順序連続な線形汎関数が零汎関数しかない Riesz 空間が存在する (例えば，Zaanen [18, page 147] を見よ). それゆえ，ベクトル測度の議論を，ベクトル測度に線形汎関数を作用させて得られる実測度の議論に帰着させる方法論が機能しない.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28A33, 28B15; Secondary 46G10.
Key words and phrases. Riesz space, Dedekind completeness, order convergence, σ-measure, integral.
*Research supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 15540162, the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan.

このような困難を克服し，Wright [14, 16] は，コンパクト空間 S 上の実数値連続関数全体からなる Riesz 空間 $C(S)$ から Dedekind 完備な Riesz 空間 V への正値線形作用素が，順序構造から定まる σ-加法性をもつ S 上の V-値 Borel 測度の積分として表現できること (Riesz-Markov-Kakutani 型の表現定理) を示した ([15] も見よ).

筆者は位相空間上のベクトル測度及びその弱収束性の研究を続けているが，無限次元空間上でベクトル測度の理論を展開するには，考察する測度が定義された空間が (局所) コンパクト空間では不十分で，一般の距離空間や完全正則空間上での理論展開が必要となる．それゆえ，Wright の結果を S が完全正則空間の場合に拡張することが不可欠である．この拡張に対する試みは，与えれた正値線形作用素に "緊密性" の条件を課すことにより成功することがわかっている ([8])．また，この拡張された Riesz-Markov-Kakutani 型の定理の応用として，現在までに

- 完全正則空間上の正則な Riesz 空間値 σ-測度の Borel 直積測度の存在性と一意性 ([8])
- Riesz 空間値ベクトル測度からなる集合の測度の弱収束に関するコンパクト性判定定理 (Prokhorov-LeCam-Varadarajan のコンパクト性判定条件の拡張)([10])

などの結果が得られている．これらの結果は数理解析研究所で開催される研究集会の報告集に順次まとめて行く予定である．しかしながら，Riesz 空間値測度や積分についてはなじみが薄い読者が多いと思われるので，今回の報告ではそれらについて今までに得られている結果を Wright の数編の論文をもとに簡潔にまとめ，筆者により得られた新たな結果については，数理解析研究所で平成 16 年度に開催される研究集会「バナッハ空間の構造の研究とその応用」(研究代表者:斎藤吉助氏) 及び「非線形解析学と凸解析学の研究」(研究代表者:明石重男氏) の報告集で詳説する．

2. Riesz 空間

この章では Riesz 空間に関する必要最小限の概念と基本的性質を解説するとともにその豊富な具体例を挙げる．より詳細な内容については，Aliprantis & Burkinshaw [1]，Luxemburg & Zaanen [12] などを参照して欲しい．

我々が取り扱う多くの関数空間，例えば，連続関数空間や Lebesgue 可積分関数空間などには，ベクトル構造の他に順序構造が備わっている．このように，和，スカラー倍などのベクトル演算と整合した順序構造をもち，さらに束としての構造をもつ実ベクトル空間のことを Riesz 空間という．以下で Riesz 空間についての解説を始める前に，順序構造に関する基本的用語を復習しておこう．

V は空でない集合で，$u, v, w \in V$ とする．V 上の 2 項関係 $\leq$ は次の性質

(P1) $u \leq u$　(反射律)

(P2) $u \leq v$ かつ $v \leq w$ ならば $u \leq w$ (推移律)
(P3) $u \leq v$ かつ $v \leq u$ ならば $u = v$ (反対称律)

を満たすとき，**半順序** (partial order) といい，半順序をもつ集合 $(V, \leq)$ のことを**半順序集合** (partially ordered set) という．

半順序集合 $(V, \leq)$ の空でない部分集合 D に対して，その上界，上限，下界，下限は次のように定義される: $u_0 \in V$ は，$\forall v \in D$ に対して $v \leq u_0$ となるとき，D の**上界** (upper bound) という．$u_0 \in V$ が D の最小上界であるとき，すなわち，u_0 は D の上界で，他のどんな D の上界 u_0' に対しても $u_0 \leq u_0'$ が成り立つとき，**上限** (supremum) という．下界や下限も同様に定義される．V の空でない集合 $D = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の上限，下限が存在するとき，その上限を $\sup D$，$\sup\{u : u \in D\}$，$\sup_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$，$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$ などで，下限を $\inf D$，$\inf\{u : u \in D\}$，$\inf_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$，$\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$ などで表す．特に，$D = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ の場合には，その上限，下限を $u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_n$，$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n$ などと書くこともある．2 項演算 $\vee$ や $\wedge$ は**束演算** (lattice operation) と呼ばれる．

定義 2.1. 実ベクトル空間 V はその上で定義された半順序 $\leq$ がベクトル演算と**整合している**，すなわち

(R1) $u, v, w \in V$ で，$u \leq v$ ならば $u + w \leq v + w$
(R2) $u \in V$，$a \in \mathbb{R}$ で，$u \geq 0$，$a \geq 0$ ならば $au \geq 0$

を満たすとき，**順序ベクトル空間** (ordered vector space) という．さらに，この半順序に関して V が**束** (lattice) となるとき，すなわち

(R3) 任意の $u, v \in V$ に対して，上限 $u \vee v$，下限 $u \wedge v$ が存在する

を満たすとき，**ベクトル束** (vector lattice) または **Riesz 空間** (Riesz space) という．

V は Riesz 空間とする．要素 $u \in V$ は $u \geq 0$ を満たすとき，**正** (positive) であるといい，正の要素全体を V^+ で表す，すなわち，$V^+ := \{u \in V : u \geq 0\}$．また，任意の $u \in V$ に対して**正部分** (positive part) $u^+ := u \vee 0$，**負部分** (negative part) $u^- := (-u) \vee 0$，**絶対値** (modulus) $|u| := u \vee (-u)$ が定義でき，$u = u^+ - u^-$，$|u| = u^+ + u^-$，$u^+, u^- \geq 0$ が成り立つ．

これら束演算や順序構造とベクトル演算との間には数多くの等式，不等式が成り立つが，それらの中で自明でない幾つかの結果を紹介しておこう．

- **無限分配法則**: 空でない集合 $D \subset V$ が上限 $v_0 := \sup\{v : v \in D\}$ をもてば，任意の $u \in V$ に対して $u \wedge v_0 = \sup\{u \wedge v : v \in D\}$．同様に，下限 $w_0 := \inf\{w : w \in D\}$ をもてば，任意の $u \in V$ にたいして $u \vee w_0 = \inf\{u \vee w : w \in D\}$.
- **Birkhoff の不等式**: 任意の $u, v, w \in V$ に対して

$$|u \vee w - v \vee w| \leq |u - v|, \quad |u \wedge w - v \wedge w| \leq |u - v|,$$

それゆえ

$$|u^+ - v^+| \leq |u - v|, \quad |u^- - v^-| \leq |u - v|.$$

- **Rieszの分解原理**: $u, x_1, x_2 \in V^+$ で $u \leq x_1 + x_2$ とする．このとき，$u_1, u_2 \in V^+$ が存在して，$u_1 \leq x_1, u_2 \leq x_2, u = u_1 + u_2$ とできる．

実数空間 $\mathbb{R}$ における順序，和，積，上限，下限などの演算のもつ性質から類推される数多くの性質はRiesz空間においても成り立つが，基本的な部分で気をつけなければならないことがある．例えば，$\mathbb{R}$ における通常の順序は**全順序** (total order) であり，任意の2つの要素 $u, v \in \mathbb{R}$ に対して，$u \leq v$ または $v \leq u$ となるが，Riesz空間における順序は一般には半順序なので，$u \not\leq v$ は $u > v$ と同値ではない．また，$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A に対して，$a = \sup A$ であることは，a が A の上界であることと ε-技法を用いた条件: $\forall\varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A; a - \varepsilon \leq a_\varepsilon$ とで特徴付けられるが，一般のRiesz空間では解析学で有効なこの種の ε-技法は無力となる．この困難を乗り越える一つの方策として，最近D-convergenceの技法が注目されている (Boccuto & Candeloro [2])．

多くの具体的空間では単に2つの要素の上限や下限が存在するだけでなく，無限に多くの要素から成る集合の上限や下限が常に存在する場合が多い．このような順序に関する "完備性" の概念をまとめておこう．

定義 2.2. V はRiesz空間とする．

(i) V の上に有界な空でない任意の部分集合が上限をもつとき，V は**Dedekind完備** (Dedekind complete) という．

(ii) V の上に有界な空でない任意の可算部分集合が上限をもつとき，V は**Dedekind σ-完備** (Dedekind σ-complete) という．

上限と下限の間の双対性: $\inf\{f : f \in D\} = -\sup\{-f : f \in D\}$ に注意すれば，V がDedekind完備であることは，V の下に有界な空でない任意の部分集合が下限をもつことと同値となる．これはDedekind σ-完備性の場合も同様．

Dedekind完備なRiesz空間はDedekind σ-完備であり，このとき，**Archimedean**，すなわち，$\forall u \in V^+$ に対して $\inf\{n^{-1}u : n \in \mathbb{N}\} = 0$ となる．また，Riesz空間 V の空でない部分集合 D が上限をもてば，D の有限または可算部分集合 D_0 を選んで，$\sup D = \sup D_0$ とできるとき，V は**countable sup property**をもつ，あるいは**順序可分** (order separable) という．順序可分なDedekind完備Riesz空間は**super Dedekind完備**であるという．

Riesz空間 V の線形部分空間 I は次の2つの性質

(i) **Riesz部分空間**: $u, v \in I$ ならば $u \vee v, u \wedge v \in I$

(ii) **solid**: $u \in V, v \in I$ で $|u| \leq |v|$ ならば $u \in I$

を満たすとき，**順序イデアル** (order ideal) という．V の Dedekind 完備性，Dedekind σ-完備性，順序可分性などは，V の任意の順序イデアルに遺伝する．最後に，上で紹介した完備性をもつ Riesz 空間の例を幾つかあげてこの章を終えることにする．

例 2.3. (i) 実数を成分とする m 項列ベクトル全体から成る Riesz 空間 $\mathbb{R}^m$ は super Dedekind 完備．それゆえ，$\mathbb{R}^m$ の順序イデアルである c_0^m，l_p^m $(0 < p \leq \infty)$ なども super Dedekind 完備．

(ii) 空でない集合 Λ 上の実数値関数全体から成る Riesz 空間を $\mathbb{R}^\Lambda$ で表す．集合 Λ が可算なら，$\mathbb{R}^\Lambda$ は super Dedekind 完備，Λ が非可算なら，$\mathbb{R}^\Lambda$ は Dedekind 完備．Λ 上の有界な実数値関数全体から成る Riesz 空間 $M(\Lambda)$ は $\mathbb{R}^\Lambda$ の順序イデアル，それゆえ $\mathbb{R}^\Lambda$ と同じ順序完備性をもつ．

(iii) 実数列全体から成る Riesz 空間 s は super Dedekind 完備．それゆえ，s の順序イデアルである 0 に収束する実数列全体から成る Riesz 空間 c_0，p 乗総和可能実数列全体から成る Riesz 空間 ℓ_p $(0 < p < \infty)$，有界な実数列全体から成る Riesz 空間 ℓ_∞ も super Dedekind 完備．

(iv) $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ は σ-有限な測度空間とする．Ω 上の λ-可測な実数値関数全体から成る Riesz 空間 $M(\Omega, \lambda)$ は super Dedekind 完備．それゆえ，$M(\Omega, \lambda)$ の順序イデアルである p 乗 λ-可積分関数全体から成る Riesz 空間 $L_p(\Omega, \lambda)$ $(0 < p < \infty)$ および λ-本質的有界かつ λ-可測関数全体から成る Riesz 空間 $L_\infty(\Omega, \lambda)$ も super Dedekind 完備．

(v) 空でない集合 Γ の部分集合から成る集合体上の有限加法的かつ有界な実数値集合関数全体から成る Riesz 空間 $ba(\Gamma)$ は Dedekind 完備．

(vi) 空でない集合 Γ の部分集合から成る σ-集合体上の可算加法的かつ有界な実数値集合関数全体から成る Riesz 空間 $ca(\Gamma)$ は Dedekind 完備．

(vii) Riesz 空間 V から Dedekind 完備 Riesz 空間 W への順序有界な線形作用素全体から成る Riesz 空間 $\mathcal{L}_b(V, W)$ は Dedekind 完備．

(viii) コンパクト Hausdorff 空間 S 上の実数値連続関数全体から成る Riesz 空間を $C(S)$ とする．S が Stonean, すなわち，S の任意の開部分集合の閉包が開集合ならば $C(S)$ は Dedekind 完備．S が σ-Stonean，すなわち，S の任意の開 F_σ-集合の閉包が開集合ならば $C(S)$ は Dedekind σ-完備．

3. Riesz 空間における順序収束性

Riesz 空間の点列あるいは有向点列 (net) に対しては幾つかの収束概念がある．この章では，その中でも代表的な順序収束性について復習しておく．その他の収束概念である相対一様収束性，$(*)$-順序収束，相対一様 $(*)$-収束性，さらには最近注目されている (D)-収束性，(RD)-収束性などについての解説は別の機会に譲ることとする．

定義 3.1. V は Riesz 空間，$\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subset V$ は有向点列，$u\in V$ とする．

(i) $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が単調減少 (単調増加) で，$u=\inf_{\alpha\in\Gamma}u_\alpha$ ($u=\sup_{\alpha\in\Gamma}u_\alpha$) となるとき，$u_\alpha$ は u に**単調に収束する**といい，$u_\alpha\downarrow u$ ($u_\alpha\uparrow u$) とかく．

(ii) $p_\alpha\downarrow 0$ なる有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subset V$ が存在して，$\forall\alpha\in\Gamma$ に対して $|u-u_\alpha|\le p_\alpha$ が成り立つとき，u_α は u に**順序収束** (order convergence) するといい，$u_\alpha\xrightarrow{o}u$ とかく．

これら単調収束性，順序収束性は V の点列に対しても同様に定義される．

点列や有向点列に対する順序収束性は通常の (位相的な) 収束性と同様の性質をもつ．順序収束性のもつ基本的性質については，例えば，[12]，[18] を見よ．以下では 2 章で紹介した具体的な Riesz 空間において，点列の順序収束性はどのような収束概念を表しているかをまとめておく．

命題 3.2. 例 2.3 と同じ記号のもとで，以下が成り立つ:

(i) $u_n:=(u_n(1),\ldots,u_n(m)),u:=(u(1),\ldots,u(m))\in\mathbb{R}^m$ とすると，$u_n\xrightarrow{o}u$ は各項収束，すなわち，各 $i=1,2,\ldots,m$ に対して $u_n(i)\to u(i)$ と同値．

(ii) $u_n:=(u_n(t))_{t\in\Lambda},u:=(u(t))_{t\in\Lambda}\in\mathbb{R}^\Lambda$ とすると，$u_n\xrightarrow{o}u$ は各点収束，すなわち，各 $t\in\Lambda$ に対して $u_n(t)\to u(t)$ と同値．また，$u_n,u\in M(\Lambda)$ の場合は，$u_n\xrightarrow{o}u$ in $M(\Lambda)$ は，各点収束性に，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の $M(\Lambda)$ における順序有界性，すなわち，$\exists v\in M(\Lambda);\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in\Lambda,|u_n(t)|\le v(t)$ を付け加えたものと同値．

(iii) $u_n:=(u_n(i))_{i\in\mathbb{N}},u:=(u(i))_{i\in\mathbb{N}}\in s$ とすると，$u_n\xrightarrow{o}u$ は各項収束，すなわち，各 $i\in\mathbb{N}$ に対して $u_n(i)\to u(i)$ と同値．$u_n,u\in c_0$ の場合は，$u_n\xrightarrow{o}u$ in c_0 は，各項収束性に，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の c_0 における順序有界性，すなわち，$\exists v\in c_0;\forall n\in\mathbb{N},\forall i\in\mathbb{N},|u_n(i)|\le v(i)$ を付け加えたものと同値．また，$u_n,u\in\ell_p$ $(0<p\le\infty)$ の場合も，$u_n\xrightarrow{o}u$ in ℓ_p は，各項収束性に，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の ℓ_p における順序有界性，すなわち，$\exists v\in\ell_p;\forall n\in\mathbb{N},\forall i\in\mathbb{N},|u_n(i)|\le v(i)$ を付け加えたものと同値．

(iv) $u_n,u\in M(\Omega,\lambda)$ とすると，$u_n\xrightarrow{o}u$ は概収束性，すなわち，$u_n\to u$ (λ-a.e.) と同値．$u_n,u\in L_p(\Omega,\lambda)$ $(0<p\le\infty)$ の場合は，$u_n\xrightarrow{o}u$ in $L_p(\Omega,\lambda)$ は，概収束性に $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の $L_p(\Omega,\lambda)$ における順序有界性，すなわち，$\exists v\in L_p(\Omega,\lambda);\forall n\in\mathbb{N},|u_n|\le v$ (λ-a.e.) を付け加えたものと同値．

(v) $u_n,u\in C(S)$ とすると，$u_n\xrightarrow{o}u$ と各点収束，すなわち，$\forall t\in S,u_n(t)\to u(t)$ との間には一般に相互関係は存在しない．例えば，Zaanen [18, page 88] を見よ．

4. Riesz 空間値測度

Banach 空間や局所凸空間に値をとる測度に対してはその可算加法性はそれら空間のノルム位相や局所凸位相に関する無条件収束性を用いて定義される．一方，Riesz

空間に値をとる集合関数に対しては可算加法性の概念は Riesz 空間の順序構造を用いて定義される.

定義 4.1. V は Dedekind 完備な Riesz 空間, $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間, $\mu : \mathcal{A} \to V$ は有限加法的な正値集合関数とする. 互いに素な集合から成る列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ が成り立つとき, μ は **σ-加法的**であるといい, σ-加法的な正値集合関数のことを **σ-測度**という.

Riesz 空間 L_p $(1 \leq p < \infty)$ においては, そのノルム $\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(\omega)|^p \mu(\omega)\right)^{1/p}$ は σ-順序連続 (σ-order continuous) なので, L_p 空間の単調増加列に対して, 順序収束性と $\|\cdot\|_p$-収束性は一致する. それゆえ, 定義 4.1 の σ-加法性は Banach 空間値ベクトル測度に対するノルムによる通常の σ-加法性の定義と同値となる. このように, Riesz 空間上に線形位相 τ が存在して, $u_n \uparrow u$ を満たすどんな点列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ と $u \in V$ に対しても, u_n は位相 τ に関して u に収束するようにできるとき, この位相 τ は V の順序構造と **σ-両立する** (σ-compatible) という. しかし, Floyd [5] の例によれば, その上のどんな Hausdorff 線形位相も順序構造と σ-両立しない Riesz 空間が存在する. それゆえ, 定義 4.1 の σ-加法性は, 一般には位相的に定義された σ-加法性と一致しない.

有限加法的正値測度 $\mu : \mathcal{A} \to V$ の σ-加法性は, 通常の測度の場合と同様に単調列的連続性で特徴付けられる: すなわち, μ の σ-加法性は, 任意の単調増加列 $A_n \uparrow A$ に対して $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ となることと同値. 同様に, 任意の単調減少列 $A_n \downarrow A$ に対して $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ となることとも同値.

Riesz 空間値 σ-測度の典型的な例を挙げておこう.

例 4.2. V は Dedekind 完備 Riesz 空間, $T : L_1[0,1] \to V$ は σ-順序連続な正値線形作用素とする. $\mu(A) := T(\chi_A)$ $(A \in \mathcal{B}([0,1]))$ とおくと, $\mu : \mathcal{B}([0,1]) \to V$ は σ-測度. ただし, $\mathcal{B}([0,1])$ は $[0,1]$ の Borel σ-集合体とする.

5. Riesz 空間値測度による積分

この章では, J.D.M. Wright [14, 16] によって導入された Riesz 空間値 σ-測度による実数値関数の積分概念について復習しておく. 以下, この章を通じて, V は Dedekind 完備 Riesz 空間, $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間, f, f_n, g などは Ω 上で定義された実数値関数とする.

積分の定義のためには, $\forall u \in V$ に対して $u < +\infty$ かつ $+\infty \notin V$ を満たす仮想点 $+\infty$ を V に付け加えて, V 上の半順序を拡張しておくと便利である. さらに, 単調増加な点列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ が上に有界でないとき, $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = +\infty$ と約束する.

定義 5.1. (i) $\mathcal{A}$-可測単関数 $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ $(n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j)$ に対して

$$\int_\Omega f d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

と定義する．この定義はwell-defined，すなわち，単関数 f の表現の仕方によらずに一意に定まる．

(ii) 正値 $\mathcal{A}$-可測関数 f に対しては，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を f に各点収束する $\mathcal{A}$-可測単関数の増加列として

$$\int_\Omega f d\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu$$

と定義する (右辺は $+\infty$ となることもある)．この定義はwell-defined，すなわち，f に各点収束する単関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の取り方によらずに一意に定まる．

(iii) $\mathcal{A}$-可測関数 f は，$\int_\Omega f^+ d\mu < +\infty$，$\int_\Omega f^- d\mu < +\infty$ のとき，**μ-可積分**であるという．このとき f の μ に関する定積分を

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

と定義する．ただし，$f^+ := f \vee 0$，$f^- := (-f) \vee 0$ である．

さて，Ω 上で定義された μ-可積分な $\mathcal{A}$-可測関数全体を $\mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ で表す．上で定義された積分は，実際に“積分”という名で呼ばれるにふさわしい性質をもっている．それらを以下でまとめてこの小論を終えることとする．命題の証明などこの積分に関するより詳細な内容についてはWright [14, 16] を見よ．

命題 5.2. (i) $\mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ は実ベクトル空間で，写像 $f \mapsto \int_\Omega f d\mu$ は $\mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ から V への正値線形作用素である．さらに，$f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ と $|f| \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ は同値．

(ii) **単調収束定理**: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{A}$-可測な正値関数の単調増加列で，各 $\omega \in \Omega$ に対して $f(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) < \infty$ とする．このとき

$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu$$

が成り立つ．ただし，$+\infty$ となる場合も含める．

(iii) **Fatouの補題**: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ で，$f_n \geq 0$ for $\forall n \in \mathbb{N}$ とする．このとき

$$\int_\Omega (\sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k) d\mu \leq \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} \int_\Omega f_k d\mu$$

が成り立つ．ただし，$+\infty$ となる場合も含める．

(iv) **優収束定理**: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ で，各 $\omega \in \Omega$ に対して $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ であるとする．このとき，$\exists g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mu); |f_n| \leq g$ for $\forall n \in \mathbb{N}$ ならば，f は μ-可積分で

$$\int_\Omega f_n d\mu \xrightarrow{o} \int_\Omega f d\mu$$

が成り立つ.

参考文献

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive operators*, Academic Press, Orlando, 1985.

[2] A. Boccuto and D. Candeloro, *Uniform s-boundedness and convergence results for measures with values in complete l-groups*, J. Math. Anal. Appl. **265** (2002), 170–194.

[3] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, Amer. Math. Soc. Surveys No. 15, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1977.

[4] N. Dinculeanu, *Vector integration and stochastic integration in Banach spaces*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.

[5] E. E. Floyd, *Boolean algebras with pathological order topologies*, Pacific J. Math. **5** (1955), 687–689.

[6] J. Kawabe, *Joint continuity of injective tensor products of vector measures in Banach lattices*, J. Aust. Math. Soc. Ser. **74** (2003), 185–199.

[7] ———, *The portmanteau theorem for Dedekind complete Riesz space-valued measures*, to appear in Nonlinear analysis and convex analysis (Tokyo, 2003), Yokohama Publishers, Yokohama.

[8] ———, *Borel products of Riesz space-valued measures on topological spaces*, to appear in Sci. Math. Jpn.

[9] ———, *Uniformity for weak order convergence of Riesz space-valued measures*, submitted for publication.

[10] ———, *Prokhorov-LeCam's sequential compactness criterion for Riesz space valued measures*, in preparation.

[11] I. Kluvánek and G. Knowles, *Vector measures and control systems*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[12] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces* I, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[13] B. Riečan and T. Neubrunn, *Integral, measure, and ordering*, Kluwer, Bratislava, 1997.

[14] J. D. M. Wright, *Stone-algebra-valued measures and integrals*, Proc. London Math. Soc. **19** (1969), 107–122.

[15] ———, *Vector lattice measures on locally compact spaces*, Math. Z. **120** (1971), 193–203.

[16] ———, *Measures with values in a partially ordered vector space*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 675–688.

[17] ———, *Products of positive vector measures*, Quart. J. Math. Oxford **24** (1973), 189–206.

[18] A. C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz spaces*, Springer, Berlin, 1997.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF ENGINEERING
SHINSHU UNIVERSITY
4-17-1 WAKASATO, NAGANO 380-8553, JAPAN
E-mail address: jkawabe@shinshu-u.ac.jp
E-mail address: yamono224@yahoo.co.jp