数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 19-30

ブール方程式によるシーケンス・ペアの拡張

宮下 弘　　梶谷洋司
Hiroshi Miyashita　Yoji Kajitani
北九州市立大学　国際環境工学部 情報メディア工学科
Department of Information and Media Sciences
Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

概要

LSIチップのフロアプラニングは矩形パッキング問題として定式化できる。矩形パッキング問題は,「与えられた矩形の集合に対して，すべての矩形を平面上に重なりがないように配置したものの中で配置されたすべての矩形を包含するような矩形の面積が最小となる配置を求めよ」と述べることができる。シーケンス・ペア (Sequence-pair) の概念は矩形パッキング問題において矩形配置を表現するものとして提案され，その有効性が確認されている。本論文ではシーケンス・ペアを3次元の直方体パッキング問題に拡張するためのブール方程式を用いた新しい解析法を提案し，具体例について解析結果を示す。

1 準備

集合 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 上の半順序 (partial order) P とは，X 上の2項関係 ($P\subset X\times X$) で $\forall x,y,z\in X$ に対して,

(1) $x\leq x$ (反射律)

(2) $x\leq y$ かつ $y\leq x$ ならば $x=y$ (反対称律)

(3) $x\leq y$ かつ $y\leq z$ ならば $x\leq z$ (推移律)

が成り立つものを言う。

また，集合 X 上の狭義の順序 (strict order) P とは，X 上の2項関係で，$\forall x,y,z\in X$ に対して、

(1') $x\not< x$

(2') $x<y$ かつ $y<z$ ならば $x<z$

が成り立つことを言う。

半順序 P に対して，$x<y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x\leq y$ かつ $x\neq y$ と定義すれば，この関係 $<$ は狭義の順序となる。狭義の順序 $<$ から $x\leq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x<y$ または $x=y$ で関係 $\leq$ を定義すれば，これは半順序となり，もとの P と一致する。よって，半順序，狭義の順序のどちらを考えても良い。本論文では，狭義の順序を考え．これを単に順序と呼ぶ。集合 X とその上の順序 P の組 (X, P) を順序集

合と呼ぶ。$x, y \in X$ が順序 P で関係 $x < y$ が成り立つとき，順序 P を強調して，$x <_P y$ と書くことがある。また，$\Omega \stackrel{def}{=} X \times X - \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), \ldots, (x_n, x_n)\}$ とし，順序 P を Ω の部分集合 $P = \{(x, y) \mid x <_P y\}$ $(\subset X \times X)$ と同一視する。

定義 1 順序 P に対して、

$$\begin{aligned} P^{-1} &\stackrel{def}{=} \{(x, y) \mid (y, x) \in P\} \\ P' &\stackrel{def}{=} \Omega - P \ (P \text{ の } \Omega \text{ に関する補集合}) \end{aligned}$$

と定義する。

このとき，次の命題が成り立つ。

命題 1 順序 P, Q について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} &(1) \quad (P \cup Q)^{-1} &&= P^{-1} \cup Q^{-1} \\ &(2) \quad (P \cap Q)^{-1} &&= P^{-1} \cap Q^{-1} \\ &(3) \quad (P')^{-1} &&= (P^{-1})' \\ &(4) \quad P \cap P^{-1} &&= \emptyset \\ &(5) \quad (P^{-1})^{-1} &&= P \end{aligned}$$

証明

(1) $(x, y) \in (P \cup Q)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P \cup Q \Leftrightarrow (y, x) \in P$ または $(y, x) \in Q \Leftrightarrow (x, y) \in P^{-1}$ または $(x, y) \in Q^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in P^{-1} \cup Q^{-1}$。

(2) $(x, y) \in (P \cap Q)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P \cap Q \Leftrightarrow (y, x) \in P$ かつ $(y, x) \in Q \Leftrightarrow (x, y) \in P^{-1}$ かつ $(x, y) \in Q^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in P^{-1} \cap Q^{-1}$。

(3) $(x, y) \in (P')^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P' \Leftrightarrow (y, x) \notin P \Leftrightarrow (x, y) \notin P^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (P^{-1})'$。

(4) $(x, y) \in P \cap P^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in P$ かつ $(y, x) \in P \Leftrightarrow x < y$ かつ $y < x \Rightarrow (x, x) \in P$。これは矛盾。

(5) $(x, y) \in (P^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in P$。∎

X 上の順序 P に関して任意の $i, j \in X$ $(i \neq j)$ に対して $i <_P j$ または $j <_P i$ が成り立つとき P を線形順序あるいはチェインと呼び，このとき (X, P) を線形順序集合と呼ぶ。P と Q を X 上で定義された順序とする。$P \subset Q$ であるとき、Q は P の拡張であると言い，特に Q が線形順序であるとき線形拡張と呼ぶ。

順序集合 (X, P) を表す有向グラフ $G_P = (V, E)$ を定義する。ここで，V は頂点集合で $V = X$，E は枝集合で $(i, j) \in E \stackrel{def}{\Leftrightarrow} i <_P j$ である。P が順序であることから，$(i, j) \in E$ かつ $(j, k) \in E$ であれば $(i, k) \in E$ である (推移律)。

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，推移律が満たされるように E に向きを付けられるとき，このグラフは推移的向き付け可能であると言い，このグラフを比較可能グラフと呼ぶ。また，$G = (V, E)$ の補グラフ $G_c = (V, E_c)$ は $\{i, j\} \in E_c \Leftrightarrow \{i, j\} \notin E$ で定義されるグラフである。頂点数 n の完全グ

ラフ K_n の枝集合の向き付け F に対して，F が推移的なトーナメントであるとは，$(i,j),(j,k)\in F$ ならば $(i,k)\in F$ であることを言う。

命題 2 [2] F を完全グラフ K_n の向き付けであるとする。このとき，以下の (1)(2)(3)(4) は同値である。

(1) F は推移的なトーナメントである。

(2) F はアサイクリックである。

(3) F での頂点 v_i $(i=1,2,\ldots,n)$ の入次数が $i-1$ となるような頂点の並び替え $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ が存在する。

(4) 節点の並び替え $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ が存在して，$(v_i,v_j)\in F \Leftrightarrow i<j$。

順序 P がチェインであることと P を表す完全グラフ K_n の枝集合 F が推移的なトーナメントであることは同値であるから命題 2 はチェイン P は X の要素の並びと同一視できることを示す。チェイン $P=(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ は $(x_{\sigma(i)},x_{\sigma(j)})\in P$ $(i<j)$ であることを意味する。ここで σ は $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の置換とする。

命題 3 順序 P がチェインとなるための必要十分条件は $P'=P^{-1}$ が成り立つことである。

証明 P をチェインとする。$P\cap P^{-1}=\emptyset$ であるから $P^{-1}\subset P'$ は明らか。$(x,y)\in P'$ ならば $(x,y)\notin P$。よって，$P=(\ldots,y,\ldots,x,\ldots)$ であり，$(x,y)\in P^{-1}=(\ldots,x,\ldots,y,\ldots)$ となるから $P'\subset P^{-1}$。よって $P'=P^{-1}$ となる。

逆に，$P'=P^{-1}$ とする。命題 2 から，$\forall x,y\in X$ $(x\neq y)$ に対して $(x,y)\in P$ または $(y,x)\in P$ を示せばよい。これを否定して，$\exists x,y\in X$ $(x\neq y)$ に対して $(x,y)\notin P$ かつ $(y,x)\notin P$ とすると，$(x,y)\in P'=P^{-1}$。よって，$(y,x)\in P$ となり矛盾。もちろん，P は順序であるから $(x,y)\in P$ かつ $(y,x)\in P$ はあり得ない。よって，$\forall x,y\in X$ $(x\neq y)$ に対して $(x,y)\in P$ と $(y,x)\in P$ のどちらか一方のみ成り立つ。P は順序であるから，P はチェインとなる。▮

集合 X の上で定義された順序 P は $\Omega=X\times X-\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),\ldots,(x_n,x_n)\}$ の部分集合と見なせることは既に述べた。もちろん，Ω の部分集合の全体 $\mathfrak{B}$ は通常の集合演算，$\cup$，$\cap$，$'$ でブール代数になる。最大元 (1 で表す) は Ω，最小元 (0 で表す) は $\emptyset$ に対応する。また，$A\in\mathfrak{B}$ に対して演算 $A\mapsto A^{-1}\in\mathfrak{B}$ も定義されている。

ブール代数 $\mathfrak{B}$ の上での方程式をブール方程式と呼ぶ。

命題 4 $\mathfrak{B}$ を任意のブール代数とする。$a,b,x\in\mathfrak{B}$ に対して次の (1)(2)(3) は同値である。ここで，$a\leq b \overset{def}{\Leftrightarrow} a\cup b=b$ である。

$$\begin{array}{ll} (1) & (a\cap x)\cup(b\cap x') = 0 \\ (2) & b\leq x\leq a' \\ (3) & x=(a'\cap x)\cup(b\cap x') \end{array}$$

証明

(1)⇒(2) (1) が成り立てば $a \cap x = 0$ かつ $b \cap x' = 0 \Rightarrow x \leq a'$ かつ $b \leq (x')' = x \Rightarrow b \leq x \leq a'$ となり (2) が成り立つ。

(2)⇒(3) (2) が成り立てば，$b \cap x' = 0$ かつ $a' \cap x = x \Rightarrow x = (a' \cap x) \cup (b \cap x')$ となり (3) が成り立つ。

(3)⇒(1) (3) が成り立てば，(3) の両辺と x' の $\cap$ を取って $b \cap x' = 0$。(3) の両辺と $a \cap x$ の $\cap$ を取って $a \cap x = 0$。よって，$(a \cap x) \cup (b \cap x') = 0$。▮

命題 5 x に関するブール方程式 $(a \cap x) \cup (b \cap x') = 0$ が解をもつための必要十分条件は $a \cap b = 0$ である。また，この条件が満たされるとき解は $b \leq x \leq a'$ である。

証明

ブール方程式が解をもつとすると，$\exists x \in \mathfrak{B}\ (a \cap x) \cup (b \cap x') = 0$。上の命題4(2) より，$b \leq x \leq a'$ であるから $a \cap b = 0$。逆に $a \cap b = 0$ ならば、$(a \cap b) \cup (b \cap b') = 0$。これは，$x = b$ が $(a \cap x) \cup (b \cap x') = 0$ の解であることを示す。この条件が満たされるとき，上の命題4(2) より解は $b \leq x \leq a'$ である。▮

命題 6 x に関するブール方程式 $(a \cap x) \cup (b \cap x') \cup c = 0$ が解をもつための必要十分条件は $(a \cap b) \cup c = 0$ である。この条件が満たされるとき，解は $b \leq x \leq a'$ である。

証明

上の命題5より明らか。▮

ブール連立方程式について以下の命題が成り立つことも明らかである。

命題 7 ブール連立方程式，

$$
\begin{aligned}
f_1 &= g_1 \\
f_2 &= g_2 \\
&\cdots \\
f_n &= g_n
\end{aligned}
$$

が解をもつための必要十分条件は，

$$
\begin{aligned}
(f_1 \cap g_1') \ &\cup \ (f_1' \cap g_1) \cup \\
(f_2 \cap g_2') \ &\cup \ (f_2' \cap g_2) \cup \\
&\cdots \\
(f_n \cap g_n') \ &\cup \ (f_n' \cap g_n) = 0
\end{aligned}
$$

である。ここで，f_i, g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ はブール代数 $\mathfrak{B}$ の元と演算 $\cup, \cap, '$ からなるブール式である。

2 シーケンス・ペアとブール方程式

この節では順序の次元の概念についてまとめ，シーケンス・ペアとブール方程式の関係について述べる。

命題 8 順序集合 (X, P) に対して，P の全ての線形拡張を集めた族を $\mathfrak{C}$ とすれば，$\mathfrak{C} \neq \emptyset$ であり，$\cap\mathfrak{C} = P$ である。

証明
P がチェインであれば，P 自身を線形拡張として選べるから命題は明らかに成り立つ。P がチェインでなければ，$\exists x, y \in X\,(x \neq y)\ (x, y) \notin P$ かつ $(y, x) \notin P$。$P \cup \{(x, y)\}$，$P \cup \{(y, x)\}$ に対応する有向グラフはアサイクリックである。なぜなら，サイクルがあるとすれば，もとの P が推移律を満たすことに矛盾する。$P \cup \{(x, y)\}$ はアサイクリックであるから，その線形拡張 $\widetilde{P}_{x,y}$ が存在する。この線形拡張を求めるには $P \cup \{(x, y)\}$ に対応する有向グラフの深さ優先探索 [1] を行えばよい。$\widetilde{P}_{y,x}$ も同様に求める。この操作を $(x, y) \notin P$ かつ $(y, x) \notin P$ である $x, y\,(x \neq y)$ の組すべてに行い，集めた線形拡張の族を $\mathfrak{C}$ とすれば，明らかに $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ かつ $\cap\mathfrak{C} = P$ である。∎

定義 2 順序集合 (X, P) に対して、その次元 $\dim(X, P)$ は、線形拡張の族 $\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ が存在して $\cap_{i=1}^{m} L_i = P$ を満たすような最小の正整数 m である。

命題 8 は任意の順序 P の次元の存在を保証する。以下の命題が次元 2 の順序 P の特徴付けを与える。

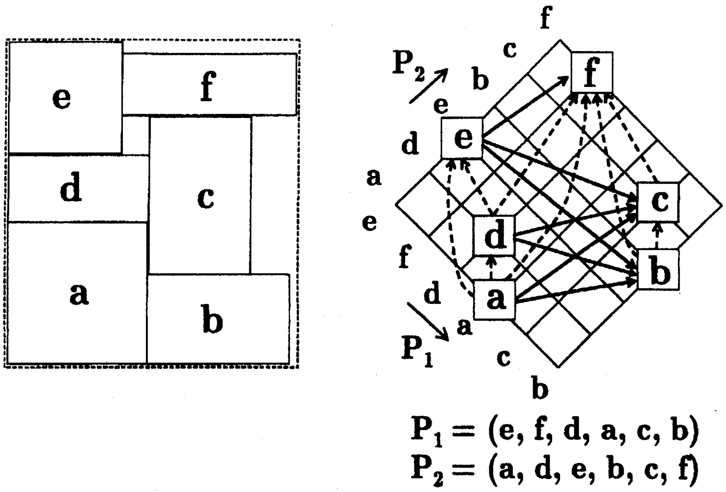
命題 9 [2] G を順序集合 (X, P) を表す比較可能グラフとする。このとき、$\dim(X, P) \leq 2$ であるための必要十分条件は G の補グラフ G_c が推移的に向き付け可能であることである。

シーケンス・ペア [4] による矩形配置の表現の例を図 1 に示す。パッキングの対象となる矩形を a, b, c, d, e, f で表す。矩形配置を矩形の 2 つのシーケンス P_1, P_2 の組で表す。このシーケンス・ペアにより矩形配置が以下のように定義される。

$$\begin{aligned} P_1 = (\ldots, i, \ldots, j, \ldots) \quad &\text{かつ} \quad P_2 = (\ldots, i, \ldots, j, \ldots) \\ &\overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \text{矩形 } j \text{ は矩形 } i \text{ の右にある (左右関係)}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P_1 = (\ldots, j, \ldots, i, \ldots) \quad &\text{かつ} \quad P_2 = (\ldots, i, \ldots, j, \ldots) \\ &\overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \text{矩形 } j \text{ は矩形 } i \text{ の上にある (上下関係)} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，矩形 j が矩形 i の右 (上) にあるとは，ある垂直 (水平) な直線が存在し矩形 j がこの直線の右 (上) 側，矩形 i がこの直線の左 (下) 側にあることである。上の式 (1)(2) に対応して矩形 j が矩形 i の右 (上) にあることを $i <_{\mathrm{H}} j$ $(i <_{\mathrm{V}} j)$ で表し，$P_{\mathrm{H}} \overset{def}{=} \{(i, j) \mid i <_{\mathrm{H}} j\}$，$P_{\mathrm{V}} \overset{def}{=} \{(i, j) \mid i <_{\mathrm{V}} j\}$ と定義する。



(1) (2)

図 1: シーケンス・ペアによる矩形配置表現。(1) シーケンス・ペア, (2) 矩形配置。

命題 2 より矩形の並びからなるシーケンスはチェインとみなせるから命題 9 より矩形配置がシーケンス・ペアで表現できるための必要十分条件が以下の命題のように与えられる。これは "一意四方位" の条件 [3] である。矩形パッキング問題ではこのようにシーケンス・ペアで表現される矩形配置の中に最適配置が存在する。

命題 10 [5][6] 矩形配置が矩形の並びからなるシーケンス・ペアで表現できるための必要十分条件は，任意の矩形のペア $i, j\ (i \neq j)$ に対して，$i <_{\mathrm{H}} j$，$j <_{\mathrm{H}} i$，$i <_{\mathrm{V}} j$，$j <_{\mathrm{V}} i$ のどれか一つのみが満たされることである。

上記の式 (1)(2) はシーケンス P_1，P_2 をチェインとみれば，Ω の部分集合に関する集合演算として，

$$P_1 \cap P_2 = P_H \tag{3}$$
$$P_1^{-1} \cap P_2 = P_V \tag{4}$$

と表せる。また，命題 3 より $P_1^{-1} = P_1'$ であるから

$$P_1 \cap P_2 = P_H \tag{5}$$
$$P_1' \cap P_2 = P_V \tag{6}$$

と表すことができる。これはブール連立方程式となる。この解は $P_1 = P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}}^{-1}$, $P_2 = P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}}$ となることは明らかであるが，ここでは命題 7 を適用して解く。

以下，簡単化のため $\cap$ を省略する。命題 7 を使って同値なブール方程式を記述すると

$$
\begin{aligned}
(P_1P_2)P'_{\mathrm{H}} \cup (P_1P_2)'P_{\mathrm{H}} \cup (P'_1P_2)P'_{\mathrm{V}} \cup (P'_1P_2)'P_{\mathrm{V}} &= 0 \\
(P_1P_2)P'_{\mathrm{H}} \cup (P'_1 \cup P'_2)P_{\mathrm{H}} \cup (P'_1P_2)P'_{\mathrm{V}} \cup (P_1 \cup P'_2)P_{\mathrm{V}} &= 0
\end{aligned}
$$

P_2 について整理して

$$
\overbrace{(P_1P'_{\mathrm{H}} \cup P'_1P'_{\mathrm{V}})}^{A} P_2 \cup \overbrace{(P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}})}^{B} P'_2 \cup \overbrace{(P'_1P_{\mathrm{H}} \cup P_1P_{\mathrm{V}})}^{C} \tag{7}
$$

命題 6 より $AB \cup C = 0$ と同値であるから

$$
\begin{aligned}
\overbrace{(P_1P'_{\mathrm{H}} \cup P'_1P'_{\mathrm{V}})}^{A}\overbrace{(P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}})}^{B} \cup \overbrace{(P'_1P_{\mathrm{H}} \cup P_1P_{\mathrm{V}})}^{C} &= 0 \\
P_1P_{\mathrm{V}}P'_{\mathrm{H}} \cup P'_1P'_{\mathrm{V}}P_{\mathrm{H}} \cup (P'_1P_{\mathrm{H}} \cup P_1P_{\mathrm{V}}) &= 0
\end{aligned}
$$

P_1 について整理して

$$
\begin{aligned}
(P_{\mathrm{V}}P'_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}})P_1 \cup (P'_{\mathrm{V}}P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{H}})P'_1 &= 0 \\
\overbrace{P_{\mathrm{V}}}^{D} P_1 \cup \overbrace{P_{\mathrm{H}}}^{E} P'_1 &= 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

これは $DE = 0$ と同値であるから

$$
P_{\mathrm{V}}P_{\mathrm{H}} = 0 \tag{9}
$$

(9) が満たされるとき (8) は解をもち

$$
P_{\mathrm{H}} \leq P_1 \leq P'_{\mathrm{V}} \tag{10}
$$

が解である。このとき (7) では $C = 0$ となり，解は

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}} \leq P_2 &\leq (P_1P'_{\mathrm{H}} \cup P'_1P'_{\mathrm{V}})' \\
&= (P'_1P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{H}}) \cap (P_1 \cup P_{\mathrm{V}}) \\
&= P_{\mathrm{V}} \cup P_{\mathrm{H}} \quad ((10) \text{ より}) \\
P_2 &= P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

(4) から

$$
(P_1^{-1} \cap P_2)^{-1} = P_{\mathrm{V}}^{-1} \Leftrightarrow P_1 \cap P_2^{-1} = P_{\mathrm{V}}^{-1} \Leftrightarrow P_1P'_2 = P_{\mathrm{V}}^{-1}
$$

これと (5) から

$$
P_1 = P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}}^{-1} \tag{12}
$$

このとき，$P_{\mathrm{V}}P_{\mathrm{V}}^{-1} = 0$ より $P_{\mathrm{V}}^{-1} \leq P'_{\mathrm{V}}$ であるから (10) は満たされる。これは命題 10 の証明にもなっている。

3　3次元直方体パッキング

矩形パッキング問題における矩形配置の候補はシーケンス・ペアにより表現できた。シーケンス・ペアの3次元の直方体パッキング問題への拡張が考えられる。この問題では直方体の集合が与えられ，3次元空間でそれらをできる限り詰めて配置し，配置されたすべての直方体を包含する直方体の体積が最小となるようなものを求める。この場合も配置の候補を表現するデータ構造が必要である。このためのシーケンス・ペアの拡張が提案されている [7]。しかし，拡張のための統一的な指針は得られていない。ここではシーケンス・ペアの3次元への拡張をブール方程式を利用して解析する。この節ではシーケンスの三つ組 (Sequence-triplet)[7] を解析する。

3次元パッキングでは2つの直方体 i, j の間の関係として i が j の右 (左) にあるという左右関係，i が j の上 (下) にあるという上下関係に加えて i が j の前 (後) にあるという前後関係を表現する必要がある。

そこで，3つのシーケンス P_1, P_2, P_3 を使って以下のように定義する。

$$\begin{array}{c}
P_2 = (\ldots, i, \ldots, j, \ldots)\ \text{かつ}\ P_3 = (\ldots, j, \ldots, i, \ldots) \\
\overset{def}{\Leftrightarrow}\ i \text{の右に} j\ (\text{左右関係}) \\
P_1 = (\ldots, j, \ldots, i, \ldots)\ \text{かつ}\ P_2 = (\ldots, j, \ldots, i, \ldots)\ \text{かつ}\ P_3 = (\ldots, j, \ldots, i, \ldots) \\
\overset{def}{\Leftrightarrow}\ i \text{の前に} j\ (\text{前後関係}) \\
P_1 = (\ldots, j, \ldots, i, \ldots)\ \text{かつ}\ P_2 = (\ldots, i, \ldots, j, \ldots)\ \text{かつ}\ P_3 = (\ldots, i, \ldots, j, \ldots) \\
\overset{def}{\Leftrightarrow}\ i \text{の上に} j\ (\text{上下関係})
\end{array}$$

ここで，左右，前後，上下に対応して xyz 直交座標系を定義すれば，直方体 j が直方体 i の右にあるとは，x 軸に垂直なある平面があり $j(i)$ がこの平面の右 (左) 側にあることである。前後，上下関係も同様 $y(z)$ 軸に垂直な平面を使って定義する。直方体 j が直方体 i の右にあることを $i <_{\mathrm{H}} j$ と表し，$P_{\mathrm{H}} \overset{def}{=} \{(i,j) \mid i <_{\mathrm{H}} j\}$ と定義する。前後 (上下) 関係に対応して $i <_{\mathrm{D}} j$ $(i <_{\mathrm{V}} j)$，$P_{\mathrm{D}} \overset{def}{=} \{(i,j) \mid i <_{\mathrm{D}} j\}(P_{\mathrm{V}} \overset{def}{=} \{(i,j) \mid i <_{\mathrm{V}} j\}$ も同様に定義する。

これらの関係は以下のように表せる。

$$P_2 \cap P_3^{-1} = P_{\mathrm{H}} \tag{13}$$

$$P_1^{-1} \cap P_2^{-1} \cap P_3^{-1} = P_{\mathrm{D}} \tag{14}$$

$$P_1^{-1} \cap P_2 \cap P_3 = P_{\mathrm{V}} \tag{15}$$

(13)(14)(15) を命題3を使って書き直す。P_1, P_2, P_3 をチェインと考えると，$P_1^{-1} = P_1'$，$P_2^{-1} = P_2'$，$P_3^{-1} = P_3'$ と書ける。簡単化のため $\cap$ は省略する。

$$P_2 P_3' = P_{\mathrm{H}} \tag{16}$$

$$P_1' P_2' P_3' = P_{\mathrm{D}} \tag{17}$$

$$P_1' P_2 P_3 = P_{\mathrm{V}} \tag{18}$$

これをブール連立方程式と考えると，

$$\overbrace{P_2P_3'P_H' \cup (P_2P_3')'P_H}^{(16)\text{より}} \cup \overbrace{P_1'P_2'P_3'P_D' \cup (P_1'P_2'P_3')'P_D}^{(17)\text{より}}$$
$$\cup \overbrace{P_1'P_2P_3P_V' \cup (P_1'P_2P_3)'P_V}^{(18)\text{より}} = 0$$

と同値である。

これを P_1, P_1' について整理すると，

$$\overbrace{(P_D \cup P_V)}^{A} P_1 \cup \overbrace{(P_2'P_3'P_D' \cup P_2P_3P_V')}^{B} P_1'$$
$$\cup \overbrace{(P_2P_3'P_H' \cup (P_2' \cup P_3)P_H \cup (P_2 \cup P_3)P_D \cup (P_2' \cup P_3')P_V)}^{C} = 0 \qquad (19)$$

これは $AB \cup C = 0$ と同値であるから，これを計算すると，

$$\overbrace{(P_2P_3P_V'P_D \cup P_2'P_3'P_D'P_V)}^{AB} \cup$$
$$\overbrace{(P_2P_3'P_H' \cup (P_2' \cup P_3)P_H \cup (P_2 \cup P_3)P_D \cup (P_2' \cup P_3')P_V)}^{C} = 0$$

これを P_2, P_2' について整理して，

$$(P_3P_V'P_D \cup P_3'P_H' \cup P_D)P_2 \cup (P_3'P_D'P_V \cup P_H \cup P_V)P_2' \cup (P_3P_H \cup P_3P_D \cup P_3'P_V) = 0$$

$P_3P_V'P_D \subset P_D$、$P_3'P_D'P_V \subset P_V$ に注意すれば，

$$\overbrace{(P_3'P_H' \cup P_D)}^{D} P_2 \cup \overbrace{(P_H \cup P_V)}^{E} P_2' \cup \overbrace{(P_3P_H \cup P_3P_D \cup P_3'P_V)}^{F} = 0 \qquad (20)$$

これは，$DE \cup F = 0$ と同値であるから，

$$(P_3'P_H'P_V \cup P_DP_H \cup P_DP_V) \cup (P_3P_H \cup P_3P_D \cup P_3'P_V) = 0$$

$P_3'P_H'P_V \subset P_3'P_V$ であるから，P_3, P_3' について整理して，

$$\overbrace{(P_H \cup P_D)}^{G} P_3 \cup \overbrace{P_V}^{\mathrm{H}} P_3' \cup \overbrace{P_D(P_H \cup P_V)}^{I} = 0 \qquad (21)$$

従って，これは $GH \cup I = 0$ と同値である。これを計算すると，

$$\begin{aligned}(P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{D}})P_{\mathrm{V}} \cup P_{\mathrm{D}}(P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}}) &= 0 \\ P_{\mathrm{H}}P_{\mathrm{V}} \cup P_{\mathrm{D}}P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{D}}P_{\mathrm{V}} &= 0 \Leftrightarrow P_H, P_D, P_V \text{ が互いに素} \end{aligned} \tag{22}$$

(21) より，

$$P_{\mathrm{V}} \leq P_3 \leq (P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{D}})' = P'_{\mathrm{H}}P'_{\mathrm{D}} \tag{23}$$

(20) より，

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{V}} \leq P_2 &\leq (P'_3P'_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{D}})' \\ &= (P_3 \cup P_{\mathrm{H}}) \cap P'_{\mathrm{D}} \\ &= P_3 \cup P_{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{24}$$

ここで，(22) より $P_{\mathrm{H}} \leq P'_{\mathrm{D}}$ であること，(23) より $P_3 \leq P'_{\mathrm{D}}$ であることを使った。
(19) より，

$$\begin{aligned}(P'_2P'_3P'_{\mathrm{D}} \cup P_2P_3P'_{\mathrm{V}}) \leq P_1 &\leq (P_D \cup P_V)' \\ &= P'_VP'_D\end{aligned} \tag{25}$$

(14) から $P_1P_2P_3 = P_{\mathrm{D}}^{-1}$，(18) から $P'_1P_2P_3 = P_{\mathrm{V}}$ であるから

$$\begin{aligned}P_2P_3 &= P_1P_2P_3 \cup P'_1P_2P_3 \\ &= P_{\mathrm{D}}^{-1} \cup P_{\mathrm{V}} \\ P'_2P'_3 &= P_2^{-1}P_3^{-1} = (P_2P_3)^{-1} \\ &= P_{\mathrm{D}} \cup P_{\mathrm{V}}^{-1}\end{aligned}$$

この関係を使えば，(25) は

$$(P_{\mathrm{V}}^{-1}P'_{\mathrm{D}} \cup P_{\mathrm{D}}^{-1}P'_{\mathrm{V}}) \leq P_1 \leq P'_{\mathrm{V}}P'_{\mathrm{D}} \tag{26}$$

となる。

以上，まとめると，与えられた P_{H}，P_{D}，P_{V} に対して (13)(14)(15) を満たすチェイン P_1, P_2, P_3 が存在するための必要十分条件は

$$P_{\mathrm{H}}P_{\mathrm{V}} \cup P_{\mathrm{D}}P_{\mathrm{H}} \cup P_{\mathrm{D}}P_{\mathrm{V}} = 0 \tag{27}$$

を満たし，

$$P_{\rm V} \le P_3 \quad \le \quad P'_{\rm H}P'_{\rm D} \tag{28}$$

$$P_{\rm H} \cup P_{\rm V} \le P_2 \quad \le \quad P_{\rm H} \cup P_3 \tag{29}$$

$$P_{\rm V}^{-1}P'_{\rm D} \cup P_{\rm D}^{-1}P'_{\rm V} \le P_1 \quad \le \quad P'_{\rm V}P'_{\rm D} \tag{30}$$

を満たすチェイン P_1, P_2, P_3 が存在することである。

この条件が満たされるかをチェックすることにより 3 次元の直方体配置がこの Sequence-triplet で表現できるか決定できる。図 2 に例 [7] を示す。

図 2(1) では $P_{\rm H} = \{(a,f), (f,c), (a,c)\}$，$P_{\rm D} = \{(a,e), (e,c), (a,c)\}$ であるから $P_{\rm H}P_{\rm D} = \{(a,c)\} \neq 0$ となり (27) が成り立たない。従って，この Sequence-triplet では表現できない。

図 2(2) では $P_{\rm V} = \{(a,b), (b,d), (a,d)\}$，$P_{\rm H} = \{(b,c)\}$，$P_{\rm D} = \{(d,c), (c,a), (d,a)\}$ である。

さらに，

$$\begin{aligned} P'_{\rm V} &= \{(a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c)\} \\ P'_{\rm D} &= \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (c,b), (c,d), (d,b)\} \end{aligned}$$

であるから $P_{\rm V}^{-1}P'_{\rm D} = \{(b,a), (d,b)\}$，$P_{\rm D}^{-1}P'_{\rm V} = \{(c,d), (a,c)\}$ となる。このとき $P_{\rm V}^{-1}P'_{\rm D} \cup P_{\rm D}^{-1}P'_{\rm V} \le P_1$ を満たすチェイン P_1 は存在しない。なぜなら，これを満たすチェイン P_1 が存在したとすると $(b,b) \in P_1$ となり矛盾するからである。従って，(30) を満たすチェイン P_1 が存在せず，この配置はこの Sequence-triplet では表現できない。

このように Sequence-triplet を使って 3 次元直方体パッキングの配置候補を表現することができるがシーケンス・ペアを使った 2 次元の矩形パッキングの場合と異なりすべての配置候補を表現することはできない。Sequence-triplet の定義の仕方は多様であり，実際の応用ではある条件を満たす制限された配置を必要とすることが多い。ブール方程式を使った解析はこのような配置の表現法の探索に役立つ。

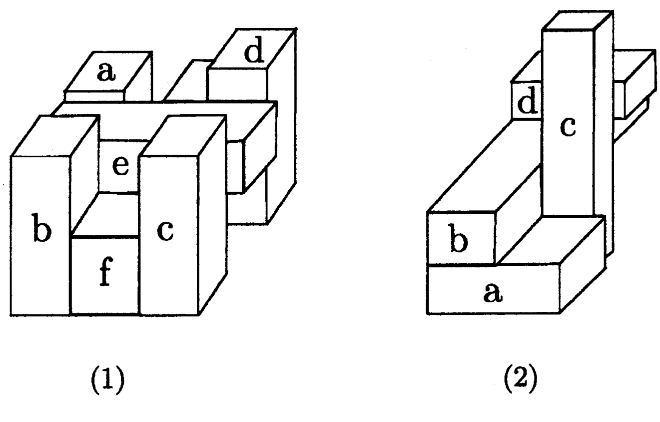


図 2: Sequence-triplet で表現できない直方体配置。

4 まとめ

2 次元における矩形パッキングのために考案されたシーケンスペアを 3 次元の直方体パッキング問題に拡張することを目的としてブール方程式を用いた新しい解析法を提案した。この手法を使って，3 次元パッキングにおける直方体配置の表現法として提案された Sequence-triplet を解析し，この表現が可能となる必要十分条件を示した。今後はこの解析法を発展させ 3 次元パッキング問題において実際の用途に適合した配置候補の表現法を検討していきたい。

参考文献

[1] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Second Edition, The MIT Press, 2003.

[2] M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Second Edition, Elsevier B.V., 2004.

[3] 梶谷，“配置の数理: 多数の長方形を最小面積に埋め込む，” 信学技報，vol. 98, no. 286, VLD98-38, 1998。

[4] H. Murata, K. Fujiyoshi, S. Nakata and Y. Kajitani, “VLSI module placement based on rectangle-packing by the sequence-pair,” *IEEE Trans. on CAD*, vol. 15, pp. 1518–1524, Dec. 1996.

[5] 宮下，“矩形パッキングのためのシーケンスペアと半順序の次元との関係について，” 1999 年電子情報通信学会総合大会，1999 年 3 月。

[6] H. Miyashita and Y. Kajitani, “Dimension of partial orders and its applications to rectangle packing,” *RIMS Kokyuroku* 1340, pp. 65–76, Sept. 2003.

[7] H. Yamazaki, K. Sakanushi, S. Nakatake and Y. Kajitani, “The 3D-packing by meta data structure and packing heuristics,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E83-A, no. 4, pp. 639–645, Apr. 2000.