数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 1-5

Inner Product Formula for Kudla Lift

村瀬　篤（京都産業大学・理）
菅野 孝史（金沢大学・理）

はじめに

$U(1,1)$ 上の正則尖点形式 f からテータリフトにより，$U(2,1)$ 上の正則尖点形式 $\mathcal{L}f$ が構成される ([1])．$\mathcal{L}f$ を f の Kudla lift という．この稿では，$\mathcal{L}f$ の Petersson ノルムが，f の保型 L 関数の特殊値と f の局所的データによって記述されることを報告する．

§1. 保型形式と保型 L 関数

1.1 K を，判別式 D の虚 2 次体とする．$\mathcal{O}_K$ を K の整数環，σ を $K/\mathbf{Q}$ の非自明な自己同型とする．$\mathbf{Q}$ の各素点 v に対し，$K_v = K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v$ とおく．また，有限素点 p に対し，

$$\mathcal{O}_{K,p} = \begin{cases} \mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p & \cdots \quad K_p = \mathbf{Q}_p \oplus \mathbf{Q}_p \\ K_p \text{ の整数環} & \cdots \quad K_p \text{ は体} \end{cases}$$

とおき，$\mathcal{O}_{K,f} = \prod_{p<\infty} \mathcal{O}_{K,p}$ および $K^1 = \{t \in K^\times \mid tt^\sigma = 1\}$ とする．K の 0 でない分数イデアルを単にイデアルとよぶ．K に含まれる 1 のベキ根の個数を $w(K)$ により表わす．$X \in M_{mn}(K)$ に対し，$X^* = {}^tX^\sigma$ とおく．K の量指標で，$\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^\times$ への制限が 2 次拡大 $K/\mathbf{Q}$ に対応する $\mathbf{Q}$ の量指標に一致するものの集合を $\mathcal{X}$ と書く．$\chi \in \mathcal{X}$ に対し，整数 $w_\infty(\chi)$ を $\chi(z_\infty) = (z_\infty/|z_\infty|)^{w_\infty(\chi)}$ $(z_\infty \in K_\infty^\times)$ で定める．

1.2 $H = U(T)$ を，歪エルミート行列 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対するユニタリ群とする：

$$H_{\mathbf{Q}} = \{h \in GL_2(K) \mid h^*Th = T\}.$$

H の元を

$$\mathbf{d}(a) = \begin{pmatrix} a^\sigma & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},\ \mathbf{n}(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{\mathbf{n}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$(a \in K^\times, b \in \mathbf{Q})$ により定める．有限素点 p に対し，$\mathcal{U}_p = H_p \cap GL_2(\mathcal{O}_{K,p})$ および

$$\mathcal{U}_0(D)_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_p \mid c \in D \cdot \mathcal{O}_{K,p} \right\}$$

とおく．以下，$w_\infty(\chi) = -1$ なる $\chi \in \mathcal{X}$ を1つ固定する．$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_0(D)_p$ に対し，

$$\widetilde{\chi}_p(u) = \begin{cases} \chi(a) & \cdots \quad c \in p\mathcal{O}_{K,p} \\ \chi(c) & \cdots \quad c \in \mathcal{O}_{K,p} - p\mathcal{O}_{K,p} \end{cases}$$

とおく．このとき，$\widetilde{\chi} = \prod_{p<\infty} \widetilde{\chi}_p$ は $\mathcal{U}_0(D)_f = \prod_{p<\infty} \mathcal{U}_0(D)_p$ のユニタリ指標を定める．$H_\infty = H(\mathbf{R})$ の $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ への作用と正則保型因子 $j \colon H_\infty \times \mathfrak{H} \to \mathbf{C}^\times$ を通常のように定義し，$\mathcal{U}_\infty$ を $z_0 = \sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$ の H_∞ における固定化部分群とする．

1.3 以下，$w(K)$ で割り切れる正の偶数 l を固定する．S_{l-1} を，次の3条件を満たす $H_\mathbf{Q} \backslash H_\mathbf{A}$ 上の smooth な関数 f のなす空間とする：

(i) $f(hu_fu_\infty) = (\det u_\infty)^{l-1} j(u_\infty, z_0)^{-(l-1)} \widetilde{\chi}(u_f) f(h)$

$(h \in H_\mathbf{A}, u_f \in \mathcal{U}_0(D)_f, u_\infty \in \mathcal{U}_\infty)$.

(ii) 任意の $h_f \in H_f$ に対し，$(\det h_\infty)^{-(l-1)} j(h_\infty, z_0)^{l-1} f(h_f h_\infty)$ は $h_\infty\langle z_0 \rangle \in \mathfrak{H}$ に関して正則である．

(iii) $$\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{Q}_\mathbf{A}} f(\mathbf{n}(x)h)\, dx = 0 \qquad (h \in H_\mathbf{A}).$$

また $\mathcal{Y}_l$ を，$K^1_\mathbf{A}/K^1$ のユニタリ指標 Ω で $\mathcal{O}^1_{K,f} = \prod_{p<\infty} \mathcal{O}^1_{K,p}$ 上 trivial かつ $\Omega(z_\infty) = z^l_\infty$ $(z_\infty \in K^1_\infty)$ を満たすものの集合とすると，$S_{l-1} = \bigoplus_{\Omega \in \mathcal{Y}_l} S_{l-1}(\chi_0\Omega^{-1})$ と分解する．ここに、各成分は中心指標 $\chi\Omega^{-1}$ をもつ S_{l-1} の元のなす空間である．

1.4 各素数 p に対し，$S_{l-1}(\chi_0\Omega)$ に作用する Hecke 作用素を定義する．$f \in S_{l-1}(\chi_0\Omega)$ とする．

(i) p が $K/\mathbf{Q}$ で inert のとき：

$$T_pf(h) = -f(h\mathbf{d}(p^{-1})) - \sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times/p\mathbf{Z}_p} f(h\mathbf{n}(p^{-1}x)) - \sum_{x \in \mathbf{Z}_p/p^2\mathbf{Z}_p} f(h\mathbf{n}(x)\mathbf{d}(p)).$$

(ii)　p が $K/\mathbf{Q}$ で分岐するとき (Π を K_p の素元とする)：

$$T_pf(h)=\chi_p^{-1}(\Pi)\sum_{x\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f\left(h\,\overline{\mathbf{n}}(Dx)\,\mathbf{d}(\Pi^{-1})\right) + \chi_p(\Pi)\sum_{x\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f(h\mathbf{n}(x)\mathbf{d}(\Pi)).$$

(iii)　p が $K/\mathbf{Q}$ で分解するとき ($\Pi_1=(p,1),\Pi_2=(1,p)\in K_p$ とおく)：

$$T_{p,1}f(h)=\chi_p^{-1}(\Pi_1)\{f(h\mathbf{d}(\Pi_1^{-1}))+\sum_{x\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f(h\mathbf{n}(x)\mathbf{d}(\Pi_2))\},$$
$$T_{p,2}f(h)=\chi_p^{-1}(\Pi_2)\{f(h\mathbf{d}(\Pi_2^{-1}))+\sum_{x\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f(h\mathbf{n}(x)\mathbf{d}(\Pi_1))\}.$$

1.5　$f\in S_{l-1}(\chi_0\Omega)$ が，各 p に対して T_p (p が分解するときは $T_{p,i}$ $(i=1,2)$) の固有関数であるとき，f を Hecke eigenform という．Hecke eigenform f に対し，保型 L 関数 $L(f;s)$ を次のように定義する．

$$L(f;s)=\prod_{p<\infty}L_p(f;s),$$

$$L_p(f;s)^{-1}=\begin{cases}1-(p^{-1}\lambda_p+1-p^{-1})p^{-2s}+p^{-4s} & \cdots\ p\text{ は }K/\mathbf{Q}\text{ で inert}\\ 1-p^{-1/2}\lambda_p p^{-s}+p^{-2s} & \cdots\ p\text{ は }K/\mathbf{Q}\text{ で分岐}\\ \displaystyle\prod_{i=1}^{2}(1-p^{-1/2}\lambda_{p,i}p^{-s}+\Omega_p(\Pi_i/\Pi_i^{\sigma})p^{-2s}) & \cdots\ p\text{ は }K/\mathbf{Q}\text{ で分解.}\end{cases}$$

ここに，λ_p (resp. $\lambda_{p,i}$) は T_p (resp. $T_{p,i}$) に対する f の固有値である．

注意　K の類数を 1 とする．このとき，f は weight $l-1$, 指標 $\left(\frac{D}{*}\right)$ の $\Gamma_0(D)$ 上の正則尖点形式 f_{dm} に対応している．f_{dm} の Fourier 展開を $f_{dm}(z)=\sum_{m=1}^{\infty}c(m)e^{2\pi imz}$ とするとき，$L(f;s)$ は，$K/\mathbf{Q}$ で分岐する p における局所因子を除いて，Rankin L 関数

$$\zeta(2s)\sum_{\mathfrak{a}}c(\mathrm{N}(\mathfrak{a}))\alpha^{l}\,\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{-(s+l-1)}$$

に一致する．ここに，$\mathfrak{a}=(\alpha)$ は K の 0 でない整イデアルをわたる．

§2. 主結果

2.1 $\kappa = \sqrt{D}$ とし，

$$S = \begin{bmatrix} & & \kappa^{-1} \\ & 1 & \\ -\kappa^{-1} & & \end{bmatrix}$$

とおく．S のユニタリ群を G と書く．G 上の正則保型形式については [5] を参照されたい．

2.2 ψ を $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}/\mathbf{Q}$ の加法指標で，$\psi(x_\infty) = e^{2\pi i x_\infty}$ $(x_\infty \in \mathbf{R})$ なるものとする．$K_{\mathbf{A}}^3$ 上の Schwartz-Bruhat 関数の空間 $\mathcal{S}(K_{\mathbf{A}}^3)$ 上実現されるユニタリ表現 $\mathcal{M}_\chi \colon G_{\mathbf{A}} \times H_{\mathbf{A}} \to GL(\mathcal{S}(K_{\mathbf{A}}^3))$ を

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\chi(g \times 1_2) f(z) &= \chi(\det g) f(g^{-1}z) \qquad (g \in G_{\mathbf{A}}), \\
\mathcal{M}_\chi(1_3 \times \mathbf{d}(a)) f(z) &= \chi^{-3}(a) |\mathrm{N}(a)|_{\mathbf{A}}^{3/2} f(az) \qquad (a \in K_{\mathbf{A}}^\times), \\
\mathcal{M}_\chi(1_3 \times \mathbf{n}(b)) f(z) &= \psi(bz^* Sz) f(z) \qquad (b \in \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}), \\
\mathcal{M}_\chi(1_3 \times w_v) f(z) &= \lambda_{K_v}(\psi_v) \int_{K_v^3} \psi(\mathrm{Tr}(z^* S z')) f(z') dz'
\end{aligned}$$

で定める．ここに，$f \in \mathcal{S}(K_{\mathbf{A}}^3), z \in K_{\mathbf{A}}^3$ で，$\mathbf{Q}$ の素点 v に対し，$w_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in H_v$ とする．また，$|\cdot|_{\mathbf{A}}$ は idele norm を表し，$\lambda_{K_v}(\psi_v)$ は Weil 定数である．

2.3 テータ核 $\theta_\chi \colon G_{\mathbf{Q}} \backslash G_{\mathbf{A}} \times H_{\mathbf{Q}} \backslash H_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ を

$$\theta_\chi(g,h) = \chi^{-1}(\det g) \chi^{-2}(\det h) \sum_{X \in K^3} \mathcal{M}_\chi(g \times h) \varphi(X) \qquad (g \in G_{\mathbf{A}}, h \in H_{\mathbf{A}})$$

により定義する．ここに，試験関数 $\varphi \in \mathcal{S}(K_{\mathbf{A}}^3)$ を

$$\begin{aligned}
\varphi(X) = \left(\frac{2}{\sqrt{D}} x_{1,\infty} + x_{3,\infty} \right)^l \exp\left(-2\pi \left\{ -\frac{2}{D} |x_{1,\infty}|^2 + |x_{2,\infty}|^2 + \frac{1}{2} |x_{3,\infty}|^2 \right\} \right) \\
\times \prod_{p < \infty} \varphi_p(X_p)
\end{aligned}$$

$(X = (X_v) \in K_{\mathbf{A}}^3, X_\infty = {}^t(x_{1,\infty}, x_{2,\infty}, x_{3,\infty}) \in \mathbf{C}^3$, φ_p は $\mathcal{O}_{K,p}^3$ の特性関数) で定める．テータリフト

$$\mathcal{S}_{l-1}(\chi\Omega) \ni f \longmapsto \mathcal{L}_\chi f(g) = \int_{H_{\mathbf{Q}} \backslash H_{\mathbf{A}}} \theta_\chi(g,h) f(h) dh \qquad (g \in G_{\mathbf{A}})$$

を f の Kudla lift という.

$\mathcal{L}_\chi f$ は, weight l, level 1, central character Ω^{-1} の正則尖点形式であり, f が Hecke eigenform ならば $\mathcal{L}_\chi f$ も Hecke eigenform となる ([1], [2], [3]).

2.4 主結果を述べるために, $f \in S_{l-1}(\chi\Omega)$ に対し, 次を仮定する.

(2.1) f は Hecke eigenform である.

(2.2) D の各素因子 p に対し, $f(hw_{D,p}) = \epsilon_p(f)f(h)$ $(\epsilon_p(f) = \pm 1)$.

ここに, $w_{D,p} = \begin{pmatrix} & \sqrt{D}^{-1} \\ \sqrt{D} & \end{pmatrix} \in H_p$ である.

D の各素因子 p に対し,

$$C_p(f,\chi) = 1 + \epsilon_p(f)\lambda_{K_p}(\psi_p)\chi_p^{-1}(\sqrt{D})\,\frac{\nu_p^{\delta_p} + \nu_p^{-\delta_p}}{2}$$

とおく. ここに, $\nu_p^{\pm} \in \mathbf{C}^\times$ を $\nu_p + \nu_p^{-1} = p^{-1/2}\lambda_p$ により定め, $\delta_p = \mathrm{ord}_p D$ とする. この稿の主結果は次のとおりである ([4]).

定理 2.5 上のような $f \in S_{l-1}(\chi\Omega)$ に対し,

$$\int_{G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}}} |\mathcal{L}_\chi f(g)|^2 dg = c\cdot w(K)^{-1}\pi^{-l}|D|^{5/2}(l-1)! \prod_{p|D} C_p(f,\chi)\cdot L(f;1) \int_{H_{\mathbf{Q}}\backslash H_{\mathbf{A}}} |f(h)|^2 dh.$$

ここに, c は Haar 測度 dh, dg の取り方によって explicit に定まる正定数である.

References

[1] S. Kudla, On certain Euler products for $SU(2,1)$, Compositio. Math. **42** (1981), 321–344.

[2] A. Murase and T. Sugano, Fourier-Jacobi expansion of Kudla lift, I. Primitive components, preprint.

[3] A. Murase and T. Sugano, Fourier-Jacobi expansion of Kudla lift, II. Non-Primitive components, preprint.

[4] A. Murase and T. Sugano, Inner product formula for Kudla lift, in preparation.

[5] 村瀬篤, 菅野孝史, 3 次ユニタリ群上の保型形式について, 「数学」, in press.