数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 181-199

p-進古典群の既約表現について

神戸大学自然科学研究科 宮内通孝 (Michitaka Miyauchi)
Graduate School of Science and Technology,
Kobe University

1 導入

F をその剰余標数が 2 でない非アルキメデス的局所体とする. 本稿は, F 上の古典群の既約 smooth 表現に関する Stevens の論文 [13], [14] の概説である.

V を N 次元 F-線形空間とし, $A=\mathrm{End}_F(V)$, $\widetilde{G}=A^{\times}$ と置く. Bushnell-Kutzko は [2] で, 開 compact 部分群への制限の情報を調べる手法で, $\widetilde{G}$ の既約 smooth 表現の分類を行なった. 彼らの理論で中心的な役割を果たしたのが, $\widetilde{G}$ の開 compact 部分群 K と, その非退化表現 ρ の組である fundamental stratum の概念である.

$\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{\infty}$ を $\widetilde{G}$ の既約 smooth 表現の同型類全体の成す集合とし, $\widetilde{G}$ の開 compact 部分群 K とその既約 smooth 表現 ρ に対し, $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K,\rho)}$ を ρ-isotypic 部分空間が自明でない元全体からなる $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{\infty}$ の部分集合とする. このとき, $\widetilde{G}$ の fundamental stratum 全体の成す集合 $\mathfrak{S}$ は, fundamental strata の存在と呼ばれる次の性質を持つ:

$$\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{\infty}=\bigcup_{(K,\rho)\in\mathfrak{S}}\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K,\rho)}.$$

この性質により, $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{\infty}$ の分類問題を, $(K,\rho)\in\mathfrak{S}$ に対する $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K,\rho)}$ の分類問題に細分することが出来る.

表現が smooth であることから, 開 compact 部分群の自明な表現のみを考えても $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{\infty}=\bigcup_{K:\text{open cpt.}}\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K,1)}$ が成立するのだが, この場合, K が小さくなるに従って $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K,1)}$ がいくらでも大きくなる為, その分類問題は非常に難しくなる. fundamental stratum (K,ρ) の ρ の非退化性とは, $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K,\rho)}$ が膨らまない為の条件であり, $(K,\rho),(K',\rho')\in\mathfrak{S}$ に対し, $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K,\rho)}\cap\mathrm{Irr}(\widetilde{G})^{(K',\rho')}\neq\emptyset$ であるならば, K,K' はある意味で同じサイズとなる.

Stevens の仕事は, stratum を用いた古典群の表現論に関するものである. σ を A 上の F/F_0-対合とし, 対合 $\widetilde{G}\to\widetilde{G}; x\mapsto\sigma(x)^{-1}$ による $\widetilde{G}$ の固定化部分群を G とす

れば, G は F_0 上定義された古典群となる. G の fundamental stratum は, σ で固定される $\widetilde{G}$ の fundamental stratum (K,ρ) の制限 $(K\cap G, \rho|_{K\cap G})$ として定義される. $\widetilde{G}$ の stratum への σ の作用を考察する手法は, 先行する Morris [8] の仕事と同様であるが, [13], [14] では, Bushnell-Kutzko が [4] で拡張した $\widetilde{G}$ の stratum を用いている.

[14] の主結果のひとつは, 古典群の fundamental strata の存在である. 同様の結果として, より一般の群に対する Moy-Prasad [11], F/F_0 が不分岐である場合の古典群に関する刈山-宮内 [6] がある. また, [14] では, $\mathrm{Irr}(G)^{(K,\rho)}$ の元が全て非 supercuspidal 表現であるような G の fundamental stratum (K,ρ) を与えている. 逆に, [13] では, $\mathrm{Irr}(G)^{(K,\rho)}$ の元が全て supercuspidal であるような (K,ρ) を与えている.

2 局所 compact, 完全不連結群の既約表現論

2.1 局所 compact, 完全不連結群の表現

G を局所 compact かつ完全不連結な位相群とする. このとき G は, その開 compact 部分群からなる単位元の基本近傍系 $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を持つ.

G の表現は複素数体 $\mathbf{C}$ 上の表現とする. G の表現 $(\pi,\mathcal{V})$ に対し, $v\in\mathcal{V}$ が smooth であるとは, その固定化部分群 $\{g\in G \mid \pi(g)v=v\}$ が G の開部分群となることである. $\mathcal{V}$ の smooth vector 全体の成す集合を $\mathcal{V}^\infty$ とすれば, $\mathcal{V}^\infty$ は $\mathcal{V}$ の G-部分加群となる. G の表現 $(\pi,\mathcal{V})$ が $\mathcal{V}=\mathcal{V}^\infty$ を満たすとき, $(\pi,\mathcal{V})$ は smooth であるという.

G の表現 $(\pi,\mathcal{V})$ と G の部分群 K に対し, K-fixed vector の成す空間を

$$\mathcal{V}^K=\{v\in\mathcal{V} \mid \pi(k)v=v,\ \forall k\in K\}$$

で定める. G の smooth 表現 $(\pi,\mathcal{V})$ は, G の任意の開部分群 K に対し $\mathcal{V}^K$ が有限次元であるときに許容的であるという.

G の smooth 表現 $(\pi,\mathcal{V})$ に対し, $V^*=\mathrm{Hom}_F(V,\mathbf{C})$ を V 上の線形汎関数全体の成す空間とする. $v^*\in\mathcal{V}^*$ による $v\in\mathcal{V}$ の像を $\langle v,v^*\rangle$ と書くことにする. このとき, G の表現 $(\pi^*,\mathcal{V}^*)$ が

$$\langle v,\pi^*(g)v^*\rangle=\langle\pi(g^{-1})v,v^*\rangle,\ v\in\mathcal{V},\ v^*\in\mathcal{V}^*,\ g\in G$$

によって定まる. $\widetilde{\mathcal{V}}=(\mathcal{V}^*)^\infty$, $\widetilde{\pi}=\pi^*|_{\widetilde{\mathcal{V}}}$ と置き, $(\widetilde{\pi},\widetilde{\mathcal{V}})$ を $(\pi,\mathcal{V})$ の反傾表現と呼ぶ.

$(\pi,\mathcal{V})$ を G の smooth 表現とする. $v\in\mathcal{V}$, $\widetilde{v}\in\widetilde{\mathcal{V}}$ に対し, G 上の関数 $f_{v,\widetilde{v}}$ を

$$f_{v,\widetilde{v}}(g)=\langle\pi(g)v,\widetilde{v}\rangle,\ g\in G$$

で定める. $f_{v,\widetilde{v}}$ を π の matrix coefficient と呼ぶ.

G の smooth 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ は, 任意の $v \in \mathcal{V}$, $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}$ に対し, $f_{v,\widetilde{v}}$ の support が G の中心 $Z(G)$ を法として compact であるとき, supercuspidal であると呼ばれる.

2.2 Hecke 環の表現との関係

局所 compact, 完全不連結群 G は unimodular である, 即ち両側不変な Haar 測度を持つと仮定する. K を G の開 compact 部分群とし, G の Haar 測度 dg として

$$\int_K dg = 1$$

を満たすものを固定する.

$\mathcal{H}(G)$ を compact support を持つ G 上の局所定数関数全体の成す集合とする. $\mathcal{H}(G)$ の積 $*$ を, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G)$ に対し,

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}g)dx, \ g \in G$$

によって定義する.

$(\pi, \mathcal{V})$ を G の smooth 表現とする. $v \in \mathcal{V}$, $f \in \mathcal{H}(G)$ に対し,

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v dg$$

と定めるとき, π は多元環 $\mathcal{H}(G)$ の表現となり, $\pi(\mathcal{H}(G))\mathcal{V} = \mathcal{V}$ が成り立つ.

K の 1 次元 smooth 表現 ρ に対し, $\mathcal{H}(G//K, \rho)$ を G 上の compact support を持つ関数 f で,

$$f(k_1 g k_2) = \rho^{-1}(k_1) f(g) \rho^{-1}(k_2), \ k_1, k_2 \in K, \ g \in G \tag{2.2.1}$$

を満たすもの全体の成す集合とする. $e_\rho \in \mathcal{H}(G//K, \rho)$ を,

$$e_\rho(g) = \begin{cases} \rho^{-1}(g), \ x \in K, \\ 0, \ x \notin K \end{cases}$$

で定めれば, e_ρ は $\mathcal{H}(G)$ の巾等元で, $\mathcal{H}(G//K, \rho) = e_\rho * \mathcal{H}(G) * e_\rho$ となる.

G の smooth 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ に対し, $\mathcal{V}^\rho$ で $\mathcal{V}$ の ρ-isotypic 部分空間を表す. e_ρ は $\mathcal{V}^\rho$ に恒等的に作用するので, $\mathcal{V}^\rho = \pi(e_\rho)\mathcal{V}$ は $\mathcal{H}(G//K, \rho)$-加群となる.

$\mathrm{Irr}(G)^\infty$ を G の既約 smooth 表現の同型類の成す集合とし,

$$\mathrm{Irr}(G)^\rho = \{(\pi, \mathcal{V}) \in \mathrm{Irr}(G)^\infty \mid \mathcal{V}^\rho \neq \{0\}\}$$

と置く. $\mathrm{Irr}\mathcal{H}(G//K, \rho)$ を既約 $\mathcal{H}(G//K, \rho)$-加群の同型類の成す集合とする.

命題 2.2.1 ([2] (4.2.3)). 対応 $(\pi,\mathcal{V})\mapsto\mathcal{V}^{\rho}$ は, $\mathrm{Irr}(G)^{\rho}$ から $\mathrm{Irr}\mathcal{H}(G//K,\rho)$ への全単射を誘導する.

注意 2.2.2. G の開 compact 部分群 K に対し, $\mathrm{Irr}(G)^{K}=\{(\pi,\mathcal{V})\in\mathrm{Irr}(G)^{\infty}\mid\mathcal{V}^{K}\neq\{0\}\}$, $\mathcal{H}(G//K)=\mathcal{H}(G//K,1)$ と置く. $\mathrm{Irr}(G)^{\infty}=\bigcup_{K:\text{open cpt.}}\mathrm{Irr}(G)^{K}$ であるから, $\mathcal{H}(G//K)$ の構造を調べれば G の既約 smooth 表現の分類が可能であるが, これは一般には困難である. 例えば, G が $K_n\supset K_{n+1}$, $\forall n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ を満たす可算個の開 compact 部分からなる単位元の基本近傍系 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}$ を持つ場合, $\mathrm{Irr}(G)^{K_n}\subset\mathrm{Irr}(G)^{K_{n+1}}$ であるから, $\mathcal{H}(G//K_{n+1})\supset\mathcal{H}(G//K_n)$ は $\mathcal{H}(G//K_n)$ の既約表現の情報も含んでいる.

ρ を G の開 compact 部分群 K の 1 次元 smooth 表現とする. $g\in G$ が

$$\rho(k)=\rho(g^{-1}kg),\ \forall k\in K\cap gKg^{-1}$$

を満たすとき, g は ρ を intertwine するという. ρ を intertwine する G の元全体の成す集合 $I_G(\rho)$ を ρ の intertwining と呼ぶ.

命題 2.2.3 ([2] (4.1.1)). $g\in G$ に対し, G が ρ を intertwine する為の必要十分条件は, $f(g)\neq 0$ を満たす $f\in\mathcal{H}(G//K,\rho)$ が存在することである.

一般に, $\mathrm{Irr}(G)^{\rho}$ の中には supercuspidal 表現とそうでないものとが同時に含まれるが, $I_G(\rho)$ が $Z(G)$ を法として compact である場合は, $\mathrm{Irr}(G)^{\rho}$ に属する表現は全て supercuspidal である.

命題 2.2.4. $I_G(\rho)$ は $Z(G)$ を法として compact であると仮定する. このとき, $\mathcal{V}^{\rho}\neq\{0\}$ を満たす G の既約 smooth 表現 $(\pi,\mathcal{V})$ は supercuspidal 表現である.

証明. G の既約 smooth 表現 $(\pi,\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}^{\rho}\neq\{0\}$ を満たすと仮定する. 既約性から, 1 つの matrix coefficient の support が $Z(G)$ を法として compact であるならば, π は supercuspidal である.

$\mathcal{V}^{\rho}\neq\{0\}$ より, $\widetilde{\mathcal{V}}^{\rho^{-1}}\neq\{0\}$ である. $v\in\mathcal{V}^{\rho}$, $\widetilde{v}\in\widetilde{\mathcal{V}}^{\rho^{-1}}$ に対し, $f_{v,\widetilde{v}}(g)\neq 0$ であると仮定する. このとき, $k\in K\cap gKg^{-1}$ に対し,

$$\begin{aligned}\rho(k)f_{v,\widetilde{v}}(g) &= \langle\pi(g)v,\widetilde{\pi}(k^{-1})\widetilde{v}\rangle=\langle\pi(kg)v,\widetilde{v}\rangle\\ &= \rho(g^{-1}kg)f_{v,\widetilde{v}}(g)\end{aligned}$$

であるから, $\rho(k)=\rho(g^{-1}kg)$ となる. 従って, $\mathrm{supp}(f_{v,\widetilde{v}})\subset I_G(\rho)$ となり, 主張を得る. □

3 古典群の fundamental strata

3.1 自己双対的格子列から定まるフィルター付け

F_0 をその剰余標数 p が 2 でない非アルキメデス的局所体, $\mathfrak{o}_0$ をその付値環, $\mathfrak{p}_0$ を $\mathfrak{o}_0$ の極大イデアルとする. F を F_0 上 2 次以下の拡大体とし, $F = F_0$ のときは $^- = \mathrm{id}_F$, $F \neq F_0$ の場合は $^-$ を非自明な $\mathrm{Gal}(F/F_0)$ の元とする. F の付値環とその極大イデアルを $\mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{p}_F$ で表し, $k_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ を F の剰余体とする. $\mathfrak{o}_F$ の素元 ϖ_F として, 拡大 F/F_0 が不分岐である場合 $\overline{\varpi_F} = \varpi_F$, そうでない場合は $\overline{\varpi_F} = -\varpi_F$ を満たすものを固定する.

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とし, f を N-次元 F-vector 空間 V 上の非退化 ε-半双線形形式とする. σ を f から誘導される $A = \mathrm{End}_F(V)$ 上の対合とする. 定義から, $X \in A$ に対し $\sigma(X)$ は

$$f(Xv, w) = f(v, \sigma(X)w), \ v, w \in V$$

を満たす.

$\widetilde{G} = A^\times$ とし, G を形式 (V, f) 上の等長変換の成す群

$$G = \{g \in \widetilde{G} \mid g\sigma(g) = 1\}$$

とする. このとき, G の Lie 環は

$$A_- = \{X \in A \mid X + \sigma(X) = 0\}$$

となる.

Bushnell-Kutzko は次のようにして, V の格子列から $\widetilde{G}$ の parahoric 部分群のフィルター付けを構成した. V の開 compact 部分 $\mathfrak{o}_F$-加群を, V の $\mathfrak{o}_F$-格子と呼ぶ. V の $\mathfrak{o}_F$-格子列とは, 有理整数環 $\mathbf{Z}$ から V の $\mathfrak{o}_F$-格子全体の成す集合への写像 Λ で, 次の条件を満足するものをいう ([4] (2.1)):

(i) $\Lambda(i) \supset \Lambda(i+1), \ \forall i \in \mathbf{Z}$,

(ii) $\varpi_F \Lambda(i) = \Lambda(i+e), \ \forall i \in \mathbf{Z}$ を満たす正の整数 $e = e(\Lambda)$ が存在する.

条件 (ii) の $e(\Lambda)$ を Λ の周期と呼ぶ. 格子列 Λ は条件

(i') $\Lambda(i) \supsetneq \Lambda(i+1), \ \forall i \in \mathbf{Z}$

を満たすとき, 狭義であると呼ばれる ([4] (2.2)).

V の $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ から, A の $\mathfrak{o}_F$-格子から成るフィルター付け $\{\mathfrak{a}_n(\Lambda)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ が

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \{X \in A \mid X\Lambda(i) \subset \Lambda(i+n), \ \forall i \in \mathbf{Z}\}$$

で定義される. このフィルター付けが定める A の付値を ν_Λ で表す. 即ち, $\nu_\Lambda(0) = \infty$,

$$\nu_\Lambda(x) = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid x \in \mathfrak{a}_n(\Lambda)\}, \ x \in A \backslash \{0\}$$

である.

A の $\mathfrak{o}_F$-格子 Γ に対して

$$\Gamma^* = \{X \in A \mid \mathrm{tr}_{A/F}(X\Gamma) \subset \mathfrak{p}_F\}$$

と定義する.

命題 3.1.1 ([4] (2.3), (2.10)). V の $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ に対し, 次が成り立つ.

(a) $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ は A の遺伝的整環で, $\mathfrak{a}_1(\Lambda)$ はその Jacobson 根基である.

(b) $\varpi_F \mathfrak{a}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_{n+e(\Lambda)}(\Lambda)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

(c) $\mathfrak{a}_n(\Lambda) \cdot \mathfrak{a}_m(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{n+m}(\Lambda)$, $\forall n, m \in \mathbf{Z}$.

(d) $\mathfrak{a}_n(\Lambda)^* = \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

V の $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ に対し,

$$U_{\Lambda,0} = \mathfrak{a}_0(\Lambda)^\times,\ U_{\Lambda,n} = 1 + \mathfrak{a}_n(\Lambda),\ n \geq 1$$

と定めれば, $\{U_{\Lambda,n}\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ は $\widetilde{G}$ の parahoric 部分群 $U_{\Lambda,0}$ の正規開部分群からなるフィルター付けとなる.

記号 ^ で群の Pontrjagin 双対を表すことにする. ψ_F をその conductor が $\mathfrak{p}_F$ である F の非自明加法的指標とするとき, 次の命題が成立する.

命題 3.1.2 ([2] (1.1)). m, n を $2n \geq m \geq n \geq 1$ を満たす整数とする.

(i) 写像 $U_{\Lambda,n}/U_{\Lambda,m} \to \mathfrak{a}_n(\Lambda)/\mathfrak{a}_m(\Lambda)$; $p \to p - 1$ は加法群の同型である.

(ii) 写像 $\mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda)/\mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda) \to (U_{\Lambda,n}/U_{\Lambda,m})^\wedge$; $b \to \psi_b$,

$$\psi_b(p) = \psi_F(\mathrm{tr}_{A/F}(b(p-1))),\ p \in U_{\Lambda,n}$$

は加法群の同型である.

Stevens が [13], [14] で用いている G の parahoric 部分群のフィルター付けは, Bushnell-Kutzko が $\widetilde{G}$ に対して導入したものに双対性を加えたものである.

V の $\mathfrak{o}_F$-格子 L に対し, その双対格子 $L^\#$ を

$$L^\# = \{v \in V \mid f(v, L) \subset \mathfrak{p}_F\}$$

で定める. $L^\#$ は $(L^\#)^\# = L$ を満たす V の $\mathfrak{o}_F$-格子である.

V の $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ が自己双対的であるとは,

$$\Lambda(i)^\# = \Lambda(d - i),\ \forall i \in \mathbf{Z}$$

を満たす整数 $d = d(\Lambda)$ が存在することをいう．この条件は，任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し $\mathfrak{a}_n(\Lambda)$ が σ-安定であることと同値である．

$A_+ = \{X \in A \mid X = \sigma(X)\}$ と置けば，$p \neq 2$ より $A = A_+ \oplus A_-$ である．A の部分集合 S に対し，$S_+ = S \cap A_+$, $S_- = S \cap A_-$ と置くとき，V の自己双対的 $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ に対し

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(\Lambda)_+ \oplus \mathfrak{a}_n(\Lambda)_-, \ \forall n \in \mathbf{Z}$$

が成立する ([8] (4.13))．

V の自己双対的 $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ に対し，

$$P_{\Lambda,n} = G \cap U_{\Lambda,n}, \ n \geq 0$$

と定義すれば，$\{P_{\Lambda,n}\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ は G の parahoric 部分群 $P_{\Lambda,0}$ の正規開部分群からなるフィルター付けとなる．

ψ_{F_0} を，その conductor が $\mathfrak{p}_0$ である F_0 の加法的指標とするとき，$p \neq 2$ より，$\psi_F = \psi_{F_0} \circ \mathrm{tr}_{F/F_0}$ は conductor が $\mathfrak{p}_F$ である F の加法的指標となる．更に，A の $\mathfrak{o}_F$-格子 Γ に対し，

$$\Gamma^* = \{X \in A \mid \mathrm{tr}_{F/F_0} \circ \mathrm{tr}_{A/F}(X\Gamma) \subset \mathfrak{p}_0\}$$

が成立することに注意すれば，命題 3.1.2 と同様に次が成り立つ．

命題 3.1.3 ([9] (2.13)). m, n を $2n \geq m \geq n \geq 1$ を満たす整数とする．

(i) 写像 $P_{\Lambda,n}/P_{\Lambda,m} \to \mathfrak{a}_n(\Lambda)_-/\mathfrak{a}_m(\Lambda)_-$; $p \to (p - \sigma(p))/2$ は加法群の同型である．

(ii) 写像 $\mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda)_-/\mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)_- \to (P_{\Lambda,n}/P_{\Lambda,m})^\wedge$; $b \to \psi_b$,

$$\psi_b(p) = \psi_F(\mathrm{tr}_{A/F}(b(p - \sigma(p))/2)), \ p \in P_{\Lambda,n}$$

は加法群の同型である．

注意 3.1.4. 上の命題の条件の下，$p \in P_{\Lambda,n}$ に対し $(p - \sigma(p))/2 \equiv p - 1 \pmod{\mathfrak{a}_m(\Lambda)}$ であるから，

$$\psi_b(p) = \psi_F(\mathrm{tr}_{A/F}(b(p-1)), \ p \in P_{\Lambda,n}$$

である．

3.2 古典群の fundamental strata とその存在

V の $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ, $n > r$ を満たす整数 n, r, $b \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)$ から成る四つ組 $[\Lambda, n, r, b]$ を A の stratum と呼ぶ ([4] (3.1))．A の stratum $[\Lambda, n, r, b]$ に対し，$n/e(\Lambda)$ をその level と呼ぶ．

strata $[\Lambda, n, r, b_i]$, $i=1,2$ が同値であることを, $b_1 \equiv b_2 \pmod{\mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)}$ で定義する. 実数 x に対し, $[x]$ をその整数部分とする. $n > r \geq [n/2] \geq 0$ であるとき, 命題 3.1.2 より, stratum $[\Lambda, n, r, b]$ の同値類は $U_{\Lambda, r+1}/U_{\Lambda, n+1}$ の指標 ψ_b に対応する.

定義 3.2.1 ([13] (4.5)). A の stratum $[\Lambda, n, r, b]$ が skew であるとは, Λ が自己双対的で, $b \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)_-$ であることをいう.

命題 3.1.3 より, n, r が $n > r \geq [n/2] \geq 0$ を満たすとき, skew stratum $[\Lambda, n, r, b]$ の同値類は $P_{\Lambda, r+1}/P_{\Lambda, n+1}$ の指標 ψ_b に対応する.

$[\Lambda, n, n-1, b]$ を A の stratum とする. $k = (n, e(\Lambda))$ と置き, $y_b = \varpi_F^{n/k} b^{e(\Lambda)/k}$ とすれば, $y_b \in \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ で, 剰余類 $y_b + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ は stratum の同値類から一意に定まる. y_b の固有多項式を $\Phi_b(X)$ とすれば, $\Phi_b(X)$ は $\mathfrak{o}_F$-係数である. $\Phi_b(X)$ は $y_b + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ の代表元の取り方に依存せず, 従って, stratum の同値類から一意に定まる. $\phi_b(X) = \Phi_b(X) \bmod \mathfrak{p}_F \in k_F[X]$ を stratum の固有多項式と呼ぶ.

定義 3.2.2 ([2] (2.3)). stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$ が fundamental であるとは, $\phi_b(X) \neq X^N$ であるときにいう.

注意 3.2.3. stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$ は fundamental であると仮定する. このとき, [14] (2.11) より, $e(\Lambda)/(n, e(\Lambda)) \leq N$ である.

A の skew stratum $[\Lambda, n, r, b]$ は $r \geq [n/2] \geq 0$ を満たすと仮定する. G の smooth 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ が $\mathcal{V}^{\psi_b} \neq \{0\}$ を満たすとき, π は $[\Lambda, n, r, b]$ を含むという.

ある自己双対的 $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ に対し, $\mathcal{V}^{P_{\Lambda,1}} \neq \{0\}$ である G の smooth 表現を level 0 表現と呼び, そうでないものを level 正表現と呼ぶ. 連結簡約群の既約 level 0 表現は [10], [12] で分類されている. 古典群の level 正表現対して, 次の定理が成立する.

定理 3.2.4 ([14] (2.11)). π を G の既約 level 正表現とする. このとき, A の fundamental skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$ で, $n \geq 1$ かつ π に含まれるものが存在する.

$\mathrm{Irr}(G)^0$ を G の既約 level 0 表現の同型類の成す集合とする. 上の定理より, G の既約 smooth 表現の同型類の成す集合は

$$\mathrm{Irr}(G)^\infty = \mathrm{Irr}(G)^0 \cup \bigcup \mathrm{Irr}(G)^{\psi_b}$$

(但し, ψ_b は $n \geq 1$ を満たす A の fundamental skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$ に対応する $P_{\Lambda, n}$ の指標全体を動く) となる.

定理 3.2.5 ([5] (4.1), (4.2), (4.3)). (i) $[\Lambda, n, n-1, b]$ を fundamental skew stratum, $n \geq 1$ とする. このとき,

$$\mathrm{Irr}(G)^0 \cap \mathrm{Irr}(G)^{\psi_b} = \emptyset.$$

(ii) fundamental skew strata $[\Lambda_i, n_i, n_i-1, b_i]$, $i=1,2$ は $n_i \geq 1$ を満たすと仮定する. このとき,

$$\mathrm{Irr}(G)^{\psi_{b_1}} \cap \mathrm{Irr}(G)^{\psi_{b_2}} \neq \emptyset$$

であるならば, $g \in G$ が存在して

$$g(b_1 + \mathfrak{a}_{1-n_1}(\Lambda)_-)g^{-1} \cap (b_2 + \mathfrak{a}_{1-n_2}(\Lambda)_-) \neq \emptyset$$

となる. 特に, $n_1/e(\Lambda_1) = n_2/e(\Lambda_2)$ かつ $\phi_{b_1}(X) = \phi_{b_2}(X)$ となる.

4 G-split stratum と非 supercuspidal 性

4.1 G-split strata

F の自己同型 $^-$ が誘導する k_F の自己同型を, 同じ記号 $^-$ で表すことにする. F または k_F 係数の多項式 $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ に対し, $\overline{f}(X) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i$ と定める.

A の skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$ に対し, $y_b = \varpi_F^{n/k} b^{e(\Lambda)/k} (k = (n, e(\Lambda)))$ であった. ここで, 拡大 F/F_0 が不分岐であるとき $\eta = (-1)^{e(\Lambda)/k}$, そうでないときは $\eta = (-1)^{n/k}(-1)^{e(\Lambda)/k}$ と置けば, $\sigma(y_b) = \eta y_b$ となる. 従って $\Phi_b(X) = \pm\overline{\Phi_b}(\eta X)$, $\phi_b(X) = \pm\overline{\phi_b}(\eta X)$ を得る.

定義 4.1.1 ([14] 2.8). $[\Lambda, n, n-1, b]$ を A の skew stratum とする. $\phi_b(X)$ が $(p(X), \overline{p}(\eta X)) = 1$ を満たす既約因子 $p(X) \in k_F[X]$, $\deg p(X) \geq 1$ を持つとき, $[\Lambda, n, n-1, b]$ は G-split するという.

A の G-split skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$ に対し, $\phi_b(X) \neq X^N$ であるから, これは fundamental である.

定理 4.1.2 ([14] 2.12). G の既約 smooth 表現 π が G-split skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$, $n \geq 1$ を含むならば, π は supercuspidal でない.

この章の残りで, 定理 4.1.2 の証明に付いて概説する.

4.2 G-split skew strata と放物型部分群

P_u を Levi component が M である G の放物型部分群とし, N_u をその unipotent radical とする. G の smooth 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ に対し,

$$\mathcal{V}_u = \mathcal{V}/\langle \pi(g)v - v \mid g \in N_u, v \in \mathcal{V} \rangle$$

を π の P_u に関する Jacquet 加群と呼ぶ. G の smooth 表現が supercuspidal であることと, 任意の放物型部分群に対してその Jacquet 加群が 0 となることが同値であることは良く知られた事実である.

G-split skew stratum の固有多項式に関する条件から, G の放物型部分群が以下のようにして構成される.

$[\Lambda, n, n-1, b], n \geq 1$ を A の G-split skew stratum, $p(X) \in k_F[X]$ を $(p(X), \overline{p}(\eta X)) = 1$ かつ $\deg p(X) \geq 1$ を満たす $\phi_b(X)$ の monic 既約因子とする. $\theta(X) \in k_F[X]$ が, $\theta(X) = \pm\overline{\theta}(\eta X)$ かつ $(p(X), \theta(X)) = 1$ を満たすように, $\phi_b(X)$ を $\phi_b(X) = \pm p(X)^t \overline{p}(\eta X)^t \theta(X)$ と分解する. Hensel の補題より, 互いに素である多項式 $\Psi(X)$, $\Theta(X) \in \mathfrak{o}_F[X]$ が存在して,

$$\Phi_b(X) = \pm\Psi(X)\overline{\Psi}(\eta X)\Theta(X)$$
$$p(X)^t = \Psi(X) \bmod \mathfrak{p}_F,\ \theta(X) = \Theta(X) \bmod \mathfrak{p}_F$$

を満たす.

ここで, $V_0 = \ker\Theta(y_b)$, $V_1 = \ker\Psi(y_b)$, $V_{-1} = \ker\overline{\Psi}(\eta y_b)$ と置けば, (V, f) は

$$V = V_0 \perp (V_1 \oplus V_{-1})$$

と分解され, V_1, V_{-1} は (V, f) の等方的部分空間となる. $y_b \in \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ であるから, [7] (3.5) と同様にして

$$\Lambda(k) = \bigoplus_{-1 \leq i \leq 1} \Lambda(k) \cap V_i,\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

となり, $i, j \in \{-1, 0, 1\}$ に対し $A_{ij} = \mathrm{Hom}_F(V_j, V_i)$ と置くとき, [4] (2.9) から

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) = \bigoplus_{-1 \leq i,j \leq 1} \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap A_{ij},\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

が従う. b と y_b の可換性から, $b \in \bigoplus_i A_{ii}$ を得る. A を

$$A = \begin{pmatrix} A_{-1,-1} & A_{-1,0} & A_{-1,1} \\ A_{0,-1} & A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,-1} & A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix}$$

と block 表示することにし, A の $\mathfrak{o}_F$-格子 $\mathfrak{H}$ を

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_n(\Lambda) & \mathfrak{a}_1(\Lambda) & \mathfrak{a}_1(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_n(\Lambda) & \mathfrak{a}_n(\Lambda) & \mathfrak{a}_1(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_n(\Lambda) & \mathfrak{a}_n(\Lambda) & \mathfrak{a}_n(\Lambda) \end{pmatrix}$$

で定義する.

$$H = G \cap (1 + \mathfrak{H})$$

と置けば, H は stratum に対応する部分群 $P_{\Lambda,n}$ を含む G の開 compact 部分群となる.

H の指標 τ を

$$\tau(h) = \psi_F(\mathrm{tr}_{A/F}(b(h-1))),\ h \in H \tag{4.2.1}$$

で定義する. τ は, stratum に対応する指標 ψ_b の H への自明な延長である.

次の命題によって, G-split skew stratum を含む G の既約 smooth 表現の非 supercuspidal 性は, H への制限が τ を含む既約 smooth 表現の非 supercuspidal 性に帰着させることができる.

命題 4.2.1 ([14] 3.5). G の既約 smooth 表現 π は, G-split skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$, $n \geq 1$ を含むと仮定する. このとき, π の H への制限は τ を含む.

$$M = G \cap (\sum_i A_{ii}),\ N_u = G \cap (1 + \sum_{i<j} A_{ij}),\ N_l = G \cap (1 + \sum_{j<i} A_{ij})$$

と置く. このとき, $P_u = MN_u$ は M を Levi component とする G の放物型部分群で, N_u は unipotent radical である.

$H_M = H \cap M$, $H_u = H \cap N_u$, $H_l = H \cap N_l$ と置く. このとき, 岩堀分解

$$H = H_l \cdot H_M \cdot H_u \tag{4.2.2}$$

が成立し, $b \in \sum_i A_{ii}$ と (4.2.1) より,

$$H_u, H_l \subset \ker \tau \tag{4.2.3}$$

が得られる. このとき, 次の命題が成立する.

命題 4.2.2 ([14] (3.2)). $I_G(\tau) \subset HMH$.

$Z(G)$, $Z(M)$ でそれぞれ, G, M の中心を表す. $\zeta \in Z(M)$ が strongly (P_u, H)-positive であるとは,

$$\zeta^m H_u \zeta^{-m} \subset H_u,\ \zeta^{-m} H_l \zeta^m \subset H_l,\ \forall m \geq 0$$

かつ, これらが $m \to \infty$ なるとき 1 に収束し, かつ

$$H_u = \bigcup_{m \geq 0} \zeta^{-m} H_u \zeta^m, \ H_l = \bigcup_{m \geq 0} \zeta^m H_l \zeta^{-m}$$

が成立することをいう ([3] (6.16)). $\zeta \in Z(M)$ は τ を intertwine するから,

$$\mathrm{supp}(f_\zeta) = H\zeta H, \ f_\zeta(\zeta) = 1$$

を満たす $f_\zeta \in \mathcal{H}(G//H, \tau)$ が存在する.

命題 4.2.3 ([14] (3.3)). strongly (P_u, H)-positive 元 $\zeta \in Z(M)$ で, $f_\zeta \in \mathcal{H}(G//H, \tau)$ が可逆であるものが存在する.

証明.

$$\zeta = \begin{pmatrix} \varpi_F & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\varpi_F}^{-1} \end{pmatrix} \in Z(M)$$

は strongly (P_u, H)-positive である.

後は, [4] (3.9) と同様の議論から従う. $f_\zeta * f_{\zeta^{-1}}$ の support は

$$H\zeta H\zeta^{-1}H = H\zeta(H_u \cdot H_M \cdot H_l)\zeta^{-1}H = H\zeta H_l \zeta^{-1} H$$

と τ の intertwining の共通部分に属する. 命題 4.2.2 と岩堀分解より, $f_\zeta * f_{\zeta^{-1}}$ の support は H に含まれ, これより, $f_\zeta * f_{\zeta^{-1}} = [H\zeta^{-1}H : H] \cdot f_1$ となることが確かめられる. □

4.3 非 supercuspidal 性の証明

定理 4.1.2 を証明しよう. G の既約 smooth 表現が許容的であることは良く知られた事実である. 始めに, 表現の許容性を用いた簡潔な証明を与える.

G の既約 smooth 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ は, G-split skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$, $n \geq 1$ を含むと仮定する. このとき, 命題 4.2.1 より, π の τ-isotypic 部分空間 $\mathcal{V}^\tau$ は零ではない. $\ker\tau \subset H$ は G の開部分群であるから, $\mathcal{V}^\tau \subset \mathcal{V}^{\ker\tau}$ は有限次元である. 射影 $\pi(e_\tau) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\tau$ を用いて $(\mathcal{V}^\tau)^*$ を $\mathcal{V}^*$ に埋め込むとき, $(\mathcal{V}^\tau)^*$ に H は τ^{-1} で作用するので, $(\mathcal{V}^\tau)^* \subset \widetilde{V}$ とみなすことができる.

$m \geq 0$ に対し,

$$H\zeta H\zeta^m H = H\zeta^{m+1} H$$

であるから, $f_\zeta * f_{\zeta^m} = f_{\zeta^{m+1}}$ を得る. 従って, $m \geq 1$ に対し $f_{\zeta^m} = (f_\zeta)^m \in \mathcal{H}(G//H, \tau)$ は可逆であるから, 任意の $0 \neq v \in \mathcal{V}^\tau$ に対し, $\pi(f_{\zeta^m})v \in \mathcal{V}^\tau$ は 0 ではない. $\mathcal{V}^\tau$ の次元の有限性から, 可算個の $m \geq 1$ に対し $\langle \pi(f_{\zeta^m})v, \widetilde{v} \rangle \neq 0$ を満たす $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ が存在する. ここで

$$\langle \pi(f_{\zeta^m})v, \widetilde{v} \rangle = \int_G f_{\zeta^m}(x) f_{v,\widetilde{v}}(x) dx$$

であるから, $f_{v,\widetilde{v}}$ の support は可算個の $m \geq 1$ に対し $H\zeta^m H'$ と共通部分を持つので, $Z(G)$ を法として compact ではない. 従って, π が supercuspidal でないことが証明された.

π の非 supercuspidal 性は, 全節で構成した放物型部分群 $P_u = MN_u$ に関する Jacquet 加群が消えないことを用いても証明することができる.

定理 4.3.1 ([3] (7.9)). G-split skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$, $n \geq 1$ に対し, $P_u = MN_u$, (H, τ) を全節の通りとする. このとき, G の smooth 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ に対し, $\mathbf{C}$ 上の線形空間の同型

$$\mathcal{V}^\tau \simeq (\mathcal{V}_u)^{\tau|_{H_M}}$$

が成り立つ. ここで, $(\mathcal{V}_u)^{\tau|_{H_M}}$ は, G の放物型部分群 $P_u = MN_u$ に関する π の Jacquet 加群 $\mathcal{V}_u$ の $\tau|_{H_M}$-isotypic 部分空間である.

G の既約 smooth 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ が G-split skew stratum $[\Lambda, n, n-1, b]$, $n \geq 1$ を含むと仮定しよう. このとき, 命題 4.2.1 より $\mathcal{V}^\tau \neq \{0\}$ であるから, 定理 4.3.1 より特に, π の $P_u = MN_u$ に関する Jacquet 加群が消えないので, π は非 supercuspidal となり, 定理 4.1.2 が得られた.

証明. r_u を $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}_u$ への自然な全射とする. $N_u = \bigcup_{m \geq 0} \zeta^{-m} H_u \zeta^m$ であるから, $v \in \mathcal{V}$ に対し, $r_u(v) = 0$ である為の必要十分条件は, ある $m \geq 0$ に対し,

$$\int_{\zeta^{-m} H_u \zeta^m} \pi(g) v dg = 0$$

が成り立つことである ([1] (2.33)).

単射性: 任意の $m \geq 0$ に対し f_{ζ^m} は可逆であったから, $0 \neq v \in \mathcal{V}^\tau$ に対し, $\pi(f_{\zeta^m})v \neq 0$ である. ここで,

$$\begin{aligned} \pi(f_{\zeta^m})v &= \int_G f_{\zeta^m}(g) \pi(g) v dg \\ &= \sum_{k \in H/H \cap \zeta^m H \zeta^{-m}} f_{\zeta^m}(k\zeta^m) \pi(k\zeta^m) v, \end{aligned}$$

$\zeta^{-1}H_l\zeta \subset H_l$ かつ $\zeta \in Z(M)$ より,

$$\pi(f_{\zeta^m})v = \sum_{k \in H_u/H_u \cap \zeta^m H_u \zeta^{-m}} f(k\zeta^m)\pi(k\zeta^m)v,$$

$H_u \subset \ker\tau$ より,

$$\begin{aligned}\pi(f_{\zeta^m})v &= \sum_{k \in H_u/H_u \cap \zeta^m H_u \zeta^{-m}} \pi(k\zeta^m)v \\ &= \int_{H_u} \pi(k\zeta^m)vdk\end{aligned}$$

を得る. 従って, 任意の $m \geq 0$ に対して,

$$\int_{\zeta^{-m}H_u\zeta^m} \pi(g)vdg = \pi(\zeta^{-m})\pi(f_{\zeta^m})v \neq 0$$

が成立するので, $0 \neq v \in \mathcal{V}^\tau$ に対し, $r_u(v) \neq 0$ を得る.

全射性: P_u の $\mathcal{V}_u$ での作用を $r_u(\pi)$ で表す. 即ち, $v \in \mathcal{V}$, $p \in P_u$ に対し,

$$r_u(\pi)(p)r_u(v) = r_u(\pi(p)v)$$

である.

上の計算と $r_u(\pi(g)v) = r_u(v), \forall g \in H_u$ より,

$$r_u(\pi(f_{\zeta_m})v) = [H_u : H_u \cap \zeta^m H_u \zeta^{-m}] \cdot r_u(\pi)(\zeta^m)r_u(v)$$

を得る.

$v \in \mathcal{V}$ に対し, $r_u(v) \in (\mathcal{V}_u)^{\tau|_{H_M}}$ であると仮定する. v が $\zeta^{-m}H_l\zeta^m$ で固定されるような $m \geq 0$ を取れば, $\pi(\zeta^m)v$ は H_l で固定される. このとき, $r_u(\pi(\zeta^m)v) \in (\mathcal{V}_u)^{\tau|_{H_M}}$ であるから,

$$r_u(\pi(\zeta^m)v) = r_u(\pi(e_\tau)\pi(\zeta^m)v)$$

となる.

$$\begin{aligned}r_u(v) &= r_u(\pi)(\zeta^{-m})r_u(\pi(\zeta^m)v) \\ &= r_u(\pi)(\zeta^{-m})r_u(\pi(e_\tau)\pi(\zeta^m)v) \\ &= r_u(\pi)(\zeta^{-m})r_u(\pi(f_{\zeta^m})\pi(f_{\zeta^{-m}})\pi(\zeta^m)v) \\ &= [H_u : H_u \cap \zeta^m H_u \zeta^{-m}] \cdot r_u(\pi(f_{\zeta^{-m}})\pi(\zeta^m)v),\end{aligned}$$

$\pi(f_{\zeta^{-m}})\pi(\zeta^m)v \in \mathcal{V}^\tau$ より主張が示された. □

$[\Lambda, n, n-1, b]$, $n \geq 1$ を G-split skew stratum とする. このとき, [3] (7.2) より, Hecke 環の同型

$$T : \mathcal{H}(G//H, \tau) \simeq \mathcal{H}(M//H_M, \tau|_{H_M})$$

で, $f \in \mathcal{H}(G//H, \tau)$ に対し

$$\mathrm{supp}(f) = H\mathrm{supp}(Tf)H$$

を満たすものが存在する. H へ制限して τ を含む G の既約 smooth 表現の非 supercuspidal 性は, この Hecke 環同型の support 保存性と $Z(M)/Z(G)$ が compact でないことからも従う. 定理 4.3.1 の同型は, この Hecke 環同型と可換であり ([3] (7.12)), [3] では, こうした枠組を用いた F 上の連結簡約代数群の cover 理論を展開している.

5 semisimple skew stratum の intertwining

5.1 semisimple skew stratum

A の skew stratum $[\Lambda, n, r, b]$ に対し, その形式的 intertwining $I_G[\Lambda, n, r, b]$ を

$$\begin{aligned} I_G[\Lambda, n, r, b] &= \{g \in G \mid g(b + \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)_-)g^{-1} \cap (b + \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)_-) \neq \emptyset\} \\ &= \{g \in G \mid \mathrm{ad}(b)(g) \in g\mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)_- + \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)_- g\} \end{aligned}$$

で定義する. skew stratum が条件 $n > r \geq [n/2] \geq 0$ を満たすとき, $I_G[\Lambda, n, r, b]$ は対応する $P_{\Lambda, r+1}$ の指標 ψ_b の intertwining

$$I_G(\psi_b) = \{g \in G \mid \psi_b(p) = \psi_b(g^{-1}pg),\ \forall p \in P_{\Lambda, r+1} \cap gP_{\Lambda, r+1}g^{-1}\}$$

に一致する. この様に, skew stratum $[\Lambda, n, r, b]$ に対応する指標の intertwining は, A のフィルター付け $\{\mathfrak{a}_k(\Lambda)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ への $\mathrm{ad}(b)$ の作用と関連深い.

定義 5.1.1 ([2] (1.5.5)). 次の条件を満たす A の stratum $[\Lambda, n, r, \beta]$ を, pure stratum と呼ぶ:

(i) β が生成する多元環 $E = F[\beta]$ が体を成す.

(ii) 埋め込み $E \subset A$ によって V を E-線形空間とみなすとき, Λ は $\mathfrak{o}_E$-格子列となる.

(iii) $\nu_\Lambda(\beta) = -n$

A の pure stratum $[\Lambda, n, r, \beta]$ に対し, $B = C_A(\beta)$ を A に於ける β の中心化部分環とする. 整数 k に対し,

$$\mathfrak{n}_k(\beta, \Lambda) = \{x \in \mathfrak{a}_0(\Lambda) \mid \mathrm{ad}(\beta)(x) \in \mathfrak{a}_k(\Lambda)\}$$

と置けば, $\mathfrak{a}_0(\Lambda) \supset \mathfrak{n}_k(\beta,\Lambda) \supset \mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{n+k}(\Lambda)$ であるから, $\mathfrak{n}_k(\beta,\Lambda)$ は A の $\mathfrak{o}_F$-格子である. $\mathrm{ad}(\beta)(\mathfrak{a}_1(\Lambda))$ は $\mathrm{ad}(\beta)(A)$ の $\mathfrak{o}_F$-格子であるから, 十分大きな k に対し, $\mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathrm{ad}(\beta)(A)$ を含む. このとき, $x \in \mathfrak{n}_k(\beta,\Lambda)$ に対し, $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(y)$ を満たす $y \in \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ が存在するので, $x \in B \cap \mathfrak{a}_0(\Lambda) + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ となる. 従って, 十分大きな k に対し, $\mathfrak{n}_k(\beta,\Lambda) \subset B \cap \mathfrak{a}_0(\Lambda) + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ が成り立つ.

pure stratum $[\Lambda, n, r, \beta]$ が $\mathfrak{a}_0(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap B + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ を満たすと仮定しよう. ここで, $\mathfrak{a}_1(\Lambda) \cap B$ は $\mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap B$ の Jacobson 根基で, $\mathfrak{a}_1(\Lambda) = (\mathfrak{a}_1(\Lambda) \cap B) \cdot \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ であることから, 中山の補題を用いて $\mathfrak{a}_0(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap B$ を得る. 従って $A = B$ となり, このとき $\beta \in F$ である.

$\beta \notin F$ である場合,

$$k_0(\beta,\Lambda) = \inf\{k \mid \mathfrak{n}_{k+1}(\beta,\Lambda) \subset B \cap \mathfrak{a}_0(\Lambda) + \mathfrak{a}_1(\Lambda)\}$$

と置く. 先に注意したように, $\mathfrak{n}_{-n}(\beta,\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda) \not\subset \mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap B + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ であるから, $k_0(\beta,\Lambda)$ は $-n$ 以上の整数である. $\beta \in F$ である場合は, 任意の k に対して $\mathfrak{n}_k(\beta,\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ であるから, $k_0(\beta,\Lambda) = -\infty$ と置く.

定義 5.1.2 ([2] (1.5.5)). 条件

(iv) $k_0(\beta,\Lambda) < -r$, 即ち $\mathfrak{n}_{-r}(\beta,\Lambda) \subset B \cap \mathfrak{a}_0(\Lambda) + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$

を満たす A の pure stratum $[\Lambda, n, r, \beta]$ を simple stratum と呼ぶ.

$k_0(\beta,\Lambda)$ は $\mathrm{ad}(\beta)$ の $\{\mathfrak{a}_k(\Lambda)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ への作用を測る量であり, 条件 (iv) は $I_G[\Lambda, n, r, \beta]$ をうまく記述する為の条件である.

$[\Lambda, n, r, b]$ を A の skew stratum とする. (V, f) の直交分解

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$$

に対し,

$$\Lambda(m) = \bigoplus_{1\le i\le k} \Lambda(m) \cap V_i, \ \forall m \in \mathbf{Z}$$

が成立すると仮定する. このとき, V_i の $\mathfrak{o}_F$-格子列 Λ_i を $\Lambda_i(m) = \Lambda(m) \cap V_i$, $m \in \mathbf{Z}$ と定義すれば Λ_i は形式 $(V_i, f|_{V_i})$ に関して自己双対的となる. $1 \le i,j \le k$ に対し, $A_{ij} = \mathrm{Hom}_F(V_j, V_i)$ と置けば, [4] (2.9) より,

$$\mathfrak{a}_m(\Lambda) = \textstyle\bigoplus_{1\le i,j\le k} \mathfrak{a}_m(\Lambda) \cap A_{ij}, \ \forall m \in \mathbf{Z},$$
$$\mathfrak{a}_m(\Lambda) \cap A_{ii} = \mathfrak{a}_m(\Lambda_i), \ 1 \le \forall i \le k, \ \forall m \in \mathbf{Z}$$

となる.

上の直交分解に対し, 更に $\beta V_i \subset V_i, \forall i$ が成立すると仮定する. $\beta_i = \beta|_{V_i}$ と置けば, $\nu_{\Lambda_i}(\beta_i) \geq -n$ である.

$$n_i = \max\{-\nu_{\Lambda_i}(\beta_i), r+1\}$$

と定めるとき, $[\Lambda, n_i, r, \beta_i]$ は $A_{ii} = \mathrm{End}_F(V_i)$ の skew stratum となる. このとき,

$$[\Lambda, n, r, \beta] = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} [\Lambda_i, n_i, r, \beta_i]$$

と表す.

定義 5.1.3 ([13] (4.8), [14] (2.10)). $[\Lambda, n, r, \beta]$ を A の skew stratum とする. ある (V, f) の直交分解 $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$ に対し, $[\Lambda, n, r, \beta]$ が次の条件を満たすように分解されるとき, $[\Lambda, n, r, \beta]$ を semisimple skew stratum と呼ぶ.

(i) $[\Lambda_i, n_i, r, \beta_i]$ は simple stratum であるか, または $\beta_i \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_i)$ である.

(ii) $i \neq j$ に対し, $n_i = n_j$ であるならば, $(\phi_{\beta_i}(X), \phi_{\beta_j}(X)) = 1$ が成立する.

$[\Lambda, n, r, \beta] = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} [\Lambda_i, n_i, r, \beta_i]$ を A の skew semisimple stratum とする. 条件 (ii) より, $[\Lambda_i, n_i, r, \beta_i]$ が simple でない $1 \leq i \leq k$ は高々 1 つである. また, $[\Lambda_i, n_i, r, \beta_i]$ が simple である場合, $\phi_{\beta_i}(X)$ は X で割れない.

ここで, $i \neq j$ に対し $n_i > n_j$ であると仮定する. このとき, skew stratum $[\Lambda_i \oplus \Lambda_j, n_i, r, \beta_i + \beta_j]$ は $\beta_i + \beta_j \equiv \beta_i \pmod{\mathfrak{a}_{1-n_i}(\Lambda_i \oplus \Lambda_j)}$ を満たすから, その固有多項式は $\phi_{\beta_i+\beta_j}(X) = \phi_{\beta_i}(X) X^{N_j}$ $(N_j = \dim_F(V_j))$ となる. これと条件 (ii) を帰納的に用いれば, $C_A(\beta) = \bigoplus_{A_{ii}} C(\beta_i)$ を得る.

定理 5.1.4 ([14] (2.12), (2.13)). G の既約 level 正 supercuspidal 表現 π は, semisimple skew stratum $[\Lambda, n, n-1, \beta]$, $n \geq 1$ を含む.

定理 5.1.5 ([14] (4.15)). $[\Lambda, n, r, \beta]$, $r \geq 0$ を A の semisimple skew stratum とする. このとき, $P_{\Lambda,1}$ のある開部分群に対して

$$I_G[\Lambda, n, r, \beta] = K C_G(\beta) K$$

となる. ここで, $C_G(\beta)$ は G に於ける β の中心化群である.

[13] では, 定理の compact 部分群 K も具体的に記述されている. $[\Lambda, n, r, \beta]$, $r \geq 0$ が simple である場合, $k = k_0(\beta, \Lambda)$ と置けば,

$$K = G \cap (1 + \mathfrak{a}_{-(k+r)}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-r}(\beta, \Lambda))$$

となる. simple stratum の条件 $k < -r$ から, $\mathfrak{a}_{-(k+r)}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_1(\Lambda)$, 従って $K \subset P_{\Lambda,1}$ である. 一般の $[\Lambda, n, r, \beta]$ の場合, K は分割 $[\Lambda, n, r, \beta] = \bigoplus_i [\Lambda, n_i, r, \beta_i]$ から帰納的に定義される.

5.2 supercuspidal 表現

A の semisimple skew stratum $[\Lambda, n, r, \beta] = \bigoplus_{1\leq i\leq k}[\Lambda_i, n_i, r, \beta_i]$ が極大であるとは，$E_i = F[\beta_i]$ が A_{ii} の極大部分体であるときにいう．このとき，$C_A(\beta) = \bigoplus_i E_i$ である．$N_1(E_i) = \{x \in E_i \mid x\sigma(x) = 1\}$ と置けば，$N_1(E_i)$ は $A_{ii}^\times$ の compact 部分群であり，$C_G(\beta) = \prod_i N_1(E_i)$ が成立する．

系 5.2.1 ([13] (4.15)). A の極大 semisimple skew stratum $[\Lambda, n, r, \beta]$, $r \geq 0$ に対し，

$$I_G[\Lambda, n, r, \beta] \subset P_{\Lambda,0}.$$

特に，$[\Lambda, n, r, \beta]$ が条件 $n > r \geq [n/2] \geq 0$ を満たすならば，$[\Lambda, n, r, \beta]$ を含む G の既約 smooth 表現は supercuspidal である．また，ρ を $\rho|_{P_{\Lambda,r+1}} \supset \psi_\beta$ を満たす $P_{\Lambda,0}$ の既約表現とすれば，$I_G(\rho) = P_{\Lambda,0}$ となるから，ρ の compact 誘導表現 $\pi = \mathrm{ind}_{P_{\Lambda,0}}^G \rho$ は G の既約 supercuspidal 表現となる ([13] (4.16))．

注意 5.2.2. skew semisimple stratum $[\Lambda, n, r, \beta]$ が極大でなくとも，$C_G(\beta)$ が compact であれば上の主張は全て成立する．このとき，$C_G(\beta) \subset P_{\Lambda,0}$ である．また，分割 $[\Lambda, n, r, \beta] = \bigoplus_{1\leq i\leq k}[\Lambda, n_i, r, \beta_i]$ で，$\beta_i \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_i)$ かつ $(V_i, f|_{V_i})$ が anisotropic である場合を考えれば，そのような例は実際に構成できる．

参考文献

[1] I. N. Bernšteǐ n and A. V. Zelevinskiĭ. Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field. *Uspehi Mat. Nauk*, 31(3(189)):5–70, 1976.

[2] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko. *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[3] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 77(3):582–634, 1998.

[4] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko. Semisimple types in GL_n. *Compositio Math.*, 119(1):53–97, 1999.

[5] R. Howe and A. Moy. Minimal K-types for GL_n over a p-adic field. *Astérisque*, 171-172:257–273, 1989.

[6] K. Kariyama and M. Miyauchi. Fundamental C-strata for classical groups. *J. Algebra*, 279(1):38–60, 2004.

[7] P. C. Kutzko. Towards a classification of the supercuspidal representations of GL_N. *J. London Math. Soc. (2)*, 37(2):265–274, 1988.

[8] L. Morris. Fundamental G-strata for classical groups. *Duke Math. J.*, 64:501–553, 1991.

[9] L. Morris. Tamely ramified supercuspidal representations of classical groups. I. Filtrations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 24:705–738, 1991.

[10] L. Morris. Level zero G-types. *Compositio Math.*, 118:135–157, 1999.

[11] A. Moy and G. Prasad. Unrefined minimal K-types for p-adic groups. *Invent. Math.*, 116:393–408, 1994.

[12] A. Moy and G. Prasad. Jacquet functors and unrefined minimal K-types. *Comment. Math. Helv.*, 71(1):98–121, 1996.

[13] S. Stevens. Double coset decompositions and intertwining. *Manuscripta Math.*, 106(3):349–364, 2001.

[14] S. Stevens. Semisimple strata for p-adic classical groups. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)*, 35(3):423–435, 2002.