数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 215-224

宮脇型の LIFTING の周期と L-VALUE に関する予想について
(ON THE CONJECTURE ON THE PERIOD OF THE LIFTING OF MIYAWAKI TYPE AND L-VALUES)

池田保 TAMOTSU IKEDA (京大・理)

INTRODUCTION

宮脇型の lifting の構成については以前に報告したことがあるが、宮脇型の lifting がいつ自明でない保型形式になるかはわかっていなかった。ここでは宮脇型の lifting の Petersson norm を L-value で表す予想を定式化することができたのでそれについて報告したい。

1. 宮脇型の LIFTING の構成

まず宮脇型の lifting の構成について復習する。k, r, n は自然数で $k+r+n$ は偶数であるとする。

$f=\sum_{N>0} a(N)q^N \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を normalized Hecke eigenform、$h \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))^+$ を志村対応で f に対応する Hecke eigenform とする。Duke-Imamogulu lifting の Kohnen による定式化により、線型写像

$$\iota : S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))^+ \to S_{k+r+n}(\mathrm{Sp}_{2r+2n}(\mathbb{Z}))$$

であって、$F=\iota(h)$ が f の Duke-Imamoglu lift となっているようなものが存在する。とくに、

$$L(s,F,\mathrm{st})=\zeta(s)\prod_{i=1}^{2r+2n} L(s+r+n-i,f)$$

が成り立つ。ここで

$$L(s,f)=\sum_{N>0} a(N)N^{-s}$$

は通常の f の L-function である。

$g\in S^{(r)}_{k+r+n}$ を Hecke eigenform とするとき、

$$\mathcal{F}_{h,g}(Z)=\int_{\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_r} F\left(\begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & W\end{pmatrix}\right)\overline{g^c(W)}(\det \mathrm{Im} W)^{2l-r-1}dW$$

を g の F に関する宮脇 lift と定義したのであった。このとき、$\mathcal{F}_{h,g} \neq 0$ であれば $\mathcal{F}_{h,g}$ も Hecke eigenform であって、その standard L-function は

$$L(s, \mathcal{F}_{h,g}, \mathrm{st}) = L(s, g, \mathrm{st}) \prod_{i=1}^{2r+2n} L(s+r+n-i, f)$$

で与えられる。ここで $L(s, g, \mathrm{st})$ は g の standard L-function である。

2. L-FUNCTIONS

各素数 p に対して半単純行列 $A_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $B_p \in \mathrm{GL}_{2r+1}$ を

$$L(s, f) = \prod_p \det(\mathbf{1}_2 - A_p \cdot p^{k-s-(1/2)})^{-1}$$

$$L(s, g, \mathrm{st}) = \prod_p \det(\mathbf{1}_{2r+1} - B_p \cdot p^{-s})^{-1}$$

が成り立つようなものとして定義する。$\{\alpha_p, \alpha_p^{-1}\}$ を f の Satake parameter とするとき、$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & 0 \\ 0 & \alpha_p^{-1} \end{pmatrix}$ としてよい。$f \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を 1 次の Siegel modular form とみなしたときの standard L-function $L(s, f, \mathrm{st})$ は adjoint L-function

$$L(s, f, \mathrm{Ad}) = \det\left(\mathbf{1}_3 - \begin{pmatrix} \alpha_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_p^{-2} \end{pmatrix} \cdot p^{-s}\right)^{-1}$$

に等しい。

このとき、$L(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f)$ を次のような Euler 積で定義される L 関数とする。

$$L(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f) = \prod_p \det(\mathbf{1}_{4r+2} - A_p \otimes B_p \cdot p^{-s})^{-1}.$$

この L-function $L(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f)$ の gamma factor $L_\infty(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f)$ は

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) \prod_{i=1}^{r} \Gamma_{\mathbb{C}}(s+n-k+i)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+n+k+i-1)$$

で与えられる。ここで $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ である。

$$\Lambda(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f) = L_\infty(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f) L(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f)$$

とおけば関数等式

$$\Lambda(2k-s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f) = (-1)^n \Lambda(s, \mathrm{st}(g) \boxtimes f)$$

が成り立つと期待されている。一方、$\zeta(s)$, $L(s,f,\mathrm{Ad})$ の関数等式は

$$\xi(s)=\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\zeta(s)$$
$$\Lambda(s,f,\mathrm{Ad})=\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+2k-1)L(s,f,\mathrm{Ad})$$

とおくとき

$$\xi(1-s)=\xi(s)$$
$$\Lambda(1-s,f,\mathrm{Ad})=\Lambda(s,f,\mathrm{Ad})$$

で与えられる。ここで $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ である。

ここに現れる gamma factor を少し変更して

$$\tilde{\xi}(s)=\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)\xi(s)=\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\zeta(s)$$
$$\tilde{\Lambda}(s,f,\mathrm{Ad})=\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Lambda(s,f,\mathrm{Ad})=\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+2k-1)L(s,f,\mathrm{Ad})$$

と定義する。

3. 予想の定式化

前節で定義した L-function を用いて宮脇 lift $\mathcal{F}_{h,g}$ の Petersson norm に関する予想を次のように定式化することができる。

- **予想 A**: $n<k$ ならば等式

$$\Lambda(k+n,\mathrm{st}(g)\boxtimes f)\prod_{i=1}^{n}\tilde{\Lambda}(2i-1,f,\mathrm{Ad})\tilde{\xi}(2i)=2^{\alpha(r,n,k)}\frac{\langle f,f\rangle}{\langle h,h\rangle}\frac{\langle \mathcal{F}_{f,g},\mathcal{F}_{f,g}\rangle}{\langle g,g\rangle}$$

が成り立つ。ここで $\alpha(r,n,k)$ は r, n, k のみに依存する整数である。

この予想が正しければ $\mathcal{F}_{f,g}\not\equiv 0$ となるための必要十分条件は

$$L(k+n,\mathrm{st}(g)\boxtimes f)\neq 0$$

で与えられる。とくに $r=1$, $n>0$ の場合には $L(k+n,\mathrm{st}(g)\boxtimes f)\neq 0$ である。従って予想 A が正しければ宮脇 [10] の予想 ($r=n=1$ の場合) は正しい。

また $\mathcal{F}_{h,g}\not\equiv 0$ ならば、$G\in\mathbb{C}\cdot\mathcal{F}_{h,g}$ を任意にとるとき、予想 A は g と G に関して対称的に定式化し直すことができる。$\mathcal{F}_{f,g}\in\mathbb{C}\cdot G$ ならば

$$\frac{\langle F|_{\mathfrak{h}_r\times\mathfrak{h}_{r+2n}},g\times G\rangle^2}{\langle g,g\rangle\langle G,G\rangle}=\frac{\langle \mathcal{F}_{f,g},\mathcal{F}_{f,g}\rangle}{\langle g,g\rangle}$$

が成り立つことは直接計算によって確かめることができる。このとき予想 A は次のように定式化し直すことができる。

- **予想 B**: $n<k$, $\mathcal{F}_{h,g}\not\equiv 0$, $G\in\mathbb{C}\cdot\mathcal{F}_{h,g}$ ならば等式

$$\Lambda(k+n,\mathrm{st}(g)\boxtimes f)\prod_{i=1}^{n}\tilde{\Lambda}(2i-1,f,\mathrm{Ad})\tilde{\xi}(2i)=2^{\alpha(r,n,k)}\frac{\langle f,f\rangle}{\langle h,h\rangle}\frac{\langle F|_{\mathfrak{h}_r\times\mathfrak{h}_{r+2n}},g\times G\rangle^2}{\langle g,g\rangle\langle G,G\rangle}$$

が成り立つ。

予想 B が g と G に関して対称的であるとは次のような意味である。$n<0$ の場合には左辺を

$$\left[\Lambda(s+k+n,\mathrm{st}(g)\boxtimes f)\prod_{i=1}^{-n}\tilde{\Lambda}(s-2i+1,f,\mathrm{Ad})^{-1}\tilde{\xi}(s-2i+2)^{-1}\right]_{s=0}$$

と考える。このように解釈すると、左辺は $n<0$ であっても定義され (r,n,g,G) を $(r+2n,-n,G,g)$ に取りかえても（2 の巾を除いて）不変である。

$n<k$ とするとき、予想 B は L-value に関する Deligne の予想と compatible である。すなわち Deligne の予想が正しければ両辺の比は $\mathbb{Q}(f,g)$ の元であると考えられる。まず $n<k$ であれば Yoshida [13] の結果により

$$\Lambda(k+n,\mathrm{st}(g)\boxtimes f)\in\mathbb{Q}(f,g)\cdot\langle f,f\rangle^n$$

であると考えられる。また、i が正の整数なら $\tilde{\xi}(2i)=|B_{2i}|/2i\in\mathbb{Q}^\times$ であることに注意する。さらに、 $0<i\le k$ なら $\tilde{\Lambda}(2i-1,f,\mathrm{Ad})\in\mathbb{Q}(f)^\times\langle f,f\rangle$ であることが知られている。

$n>k$ の場合には、反例は知られていないが、予想が成り立つと信ずる根拠もないように思われる。

4. 特別な場合

$n=r=0$ の場合、$F=c(1)$ と考えられる。従って、予想 A は Kohnen-Zagier [9] の結果の特別な場合

$$\Lambda(k,f)=2^{-k+1}c(1)^2\frac{\langle f,f\rangle}{\langle h,h\rangle}$$

と compatible である。

$r=0,\ n=1$ の場合は予想 A は Kohnen [7], Kohnen-Skoruppa [8] による Saito-Kurokawa lift の Petersson inner product の公式

$$\Lambda(k+1,f)=3\cdot 2^{-k+3}\frac{\langle F,F\rangle}{\langle h,h\rangle}$$

と compatible である。$\tilde{\Lambda}(1,f,\mathrm{Ad})=2^{2k}\langle f,f\rangle$ に注意する。

$r=0,\ n>0$ の場合は予想 A は Duke-Imamoglu lift の Petersson inner product を与える。すなわち、予想 A が正しければ $F=\iota(h)\in S_{k+n}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ とするとき、

$$\Lambda(k+n,f)\prod_{i=1}^{n}\tilde{\Lambda}(2i-1,f,\mathrm{Ad})\tilde{\xi}(2i)=2^{\alpha(0,n,k)}\frac{\langle F,F\rangle}{\langle h,h\rangle}$$

が成り立つはずである。

5. 数値的実例

Nebe と Venkov [12] によって計算された 24 個の weight 12 の Hecke eigenform のうち Duke-Imamoglu lifting または宮脇型の lifting になっているものは次 のとおりである。

- Duke-Imamoglu liftings

form	degree	f
F_3	2	ϕ_{22}
F_5	4	ϕ_{20}
F_{11}	6	ϕ_{18}
F_{13}	8	ϕ_{16}
F_{24}	12	Δ

- Miyawaki liftings

form	degree	g	f	F	r	n	k
F_4	3	Δ	ϕ_{20}	F_5	1	1	10
F_6	4	F_3	ϕ_{18}	F_{11}	2	1	9
F_7	5	F_4	ϕ_{16}	F_{13}	3	1	8
F_8	5	Δ	ϕ_{18}	F_{11}	1	2	9
F_9	6	F_3	ϕ_{16}	F_{13}	2	2	8
F_{12}	7	Δ	ϕ_{16}	F_{13}	1	3	8
F_{14}	7	F_7	Δ	F_{24}	5	1	6
F_{16}	7	F_8	Δ	F_{24}	5	1	6
F_{17}	8	F_5	Δ	F_{24}	4	2	6
F_{18}	8	F_6	Δ	F_{24}	4	2	6
F_{20}	9	F_4	Δ	F_{24}	3	3	6
F_{22}	10	F_3	Δ	F_{24}	2	4	6
F_{23}	11	Δ	Δ	F_{24}	1	5	6

これらは lifting になっているのでその standard L-function は簡単に計算することができる。$g \in S_{k+r}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ を Hecke eigenform とするとき、Böcherer [1] の結果

$$\frac{\langle E^{(2r)}_{k+r}|_{\mathfrak{h}_r\times\mathfrak{h}_r}, g\times g\rangle}{\langle g,g\rangle} = 2^{(-r^2+3r-2rk+2)/2}\pi^{(r^2+r)/2}\frac{\Gamma_r(k+\frac{r-1}{2})}{\Gamma_r(k+r)}$$
$$\times\,\zeta(k+r)^{-1}\prod_{i=1}^{r}\zeta(2k+2r-2i)^{-1}L(k,g,\mathrm{st})$$

を使ってこれらの Petersson norm の近似値を計算することができる。ここで $\Gamma_r(s) = \prod_{i=1}^{r} \Gamma(s-((i-1)/2))$ である。これらを次の表に示す。

• standard L-functions

$$L(s,F_3,\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{10\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{22}),$$

$$L(s,F_4,\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{9\leq i\leq 10} L(s+i,\phi_{20}),$$

$$L(s,F_5,\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{8\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{20}),$$

$$L(s,F_6,\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{10\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{22}) \prod_{8\leq i\leq 9} L(s+i,\phi_{18}),$$

$$L(s,F_7,\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{9\leq i\leq 10} L(s+i,\phi_{20}) \prod_{7\leq i\leq 8} L(s+i,\phi_{16}),$$

$$L(s,F_8,\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{7\leq i\leq 10} L(s+i,\phi_{18}),$$

$$L(s,F_9,\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{10\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{22}) \prod_{6\leq i\leq 9} L(s+i,\phi_{16}),$$

$$L(s,F_{11},\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{6\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{18}),$$

$$L(s,F_{12},\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{5\leq i\leq 10} L(s+i,\phi_{16}),$$

$$L(s,F_{14},\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{9\leq i\leq 10} L(s+i,\phi_{20}) \prod_{7\leq i\leq 8} L(s+i,\phi_{16}) \prod_{5\leq i\leq 6} L(s+i,\Delta),$$

$$L(s,F_{16},\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{7\leq i\leq 10} L(s+i,\phi_{18}) \prod_{5\leq i\leq 6} L(s+i,\Delta),$$

$$L(s,F_{13},\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{4\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{16}),$$

$$L(s,F_{17},\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{8\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{20}) \prod_{4\leq i\leq 7} L(s+i,\Delta),$$

$$L(s,F_{18},\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{10\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{22}) \prod_{8\leq i\leq 9} L(s+i,\phi_{18}) \prod_{4\leq i\leq 7} L(s+i,\Delta),$$

$$L(s,F_{20},\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{9\leq i\leq 10} L(s+i,\phi_{20}) \prod_{3\leq i\leq 8} L(s+i,\Delta),$$

$$L(s,F_{22},\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{10\leq i\leq 11} L(s+i,\phi_{22}) \prod_{2\leq i\leq 9} L(s+i,\Delta),$$

$$L(s,F_{23},\mathrm{st}) =L(s,\Delta,\mathrm{Ad}) \prod_{i=1}^{10} L(s+i,\Delta),$$

$$L(s,F_{24},\mathrm{st}) =\zeta(s) \prod_{i=0}^{11} L(s+i,\Delta).$$

- Petersson norms (近似値)

$$
\begin{aligned}
\langle F_2, F_2\rangle &= \langle \Delta, \Delta\rangle \\
\langle F_3, F_3\rangle &= 2^{-9}\cdot 3^{-4}\cdot 5^{-2}\langle \phi_{22}, \phi_{22}\rangle \\
\langle F_4, F_4\rangle &= 2^{-6}\cdot 3^{-5}\langle \phi_{20}, \phi_{20}\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle \\
\langle F_5, F_5\rangle &= 2^{-12}\cdot 3^{-8}\cdot 5^{-2}\cdot 13\cdot 17^{-1}\langle \phi_{20}, \phi_{20}\rangle^2 \\
\langle F_6, F_6\rangle &= 2^{-16}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-1}\cdot 7^{-1}\cdot 13\cdot 19^{-1}\langle \phi_{22}, \phi_{22}\rangle\langle \phi_{18}, \phi_{18}\rangle \\
\langle F_7, F_7\rangle &= 2^{-10}\cdot 3^{-2}\cdot 5^{-1}\cdot 7\cdot 11\cdot 17^{-1}\langle \phi_{20}, \phi_{20}\rangle\langle \phi_{16}, \phi_{16}\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle \\
\langle F_8, F_8\rangle &= 2^{-14}\cdot 3^{-1}\cdot\cdot 5^{-1}\cdot\cdot 7^{-2}\cdot 11\langle \phi_{18}, \phi_{18}\rangle^2\langle \Delta, \Delta\rangle \\
\langle F_9, F_9\rangle &= 2^{-15}\cdot 3^{-6}\cdot 5^{-2}\cdot 7\cdot 13^{-1}\langle \phi_{22}, \phi_{22}\rangle\langle \phi_{16}, \phi_{16}\rangle^2 \\
\langle F_{11}, F_{11}\rangle &= 2^{-21}\cdot 3^{-6}\cdot 5^{-1}\cdot 7^{-3}\cdot 13\langle \phi_{18}, \phi_{18}\rangle^3 \\
\langle F_{12}, F_{12}\rangle &= 2^{-7}\cdot 3^{-4}\cdot 13^{-2}\langle \phi_{16}, \phi_{16}\rangle^3\langle \Delta, \Delta\rangle \\
\langle F_{14}, F_{14}\rangle &= 2^{-7}\cdot 3^{-3}\cdot 7^{-2}\cdot 11\cdot 13^{-1}\cdot 17^{-1}\langle \phi_{20}, \phi_{20}\rangle\langle \phi_{16}, \phi_{16}\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle^2 \\
\langle F_{16}, F_{16}\rangle &= 2^{-17}\cdot 3^{-2}\cdot 5\cdot 7^{-2}\cdot 11\langle \phi_{18}, \phi_{18}\rangle^2\langle \Delta, \Delta\rangle^2 \\
\langle F_{13}, F_{13}\rangle &= 2^{-14}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-2}\cdot 7\cdot 11^{-1}\cdot 13^{-3}\cdot 23^2\langle \phi_{16}, \phi_{16}\rangle^4 \\
\langle F_{17}, F_{17}\rangle &= 2^{-15}\cdot 3^{-7}\cdot 5^{-2}\cdot 7^{-2}\cdot 13\cdot 17^{-1}\langle \phi_{20}, \phi_{20}\rangle^2\langle \Delta, \Delta\rangle^2 \\
\langle F_{18}, F_{18}\rangle &= 2^{-16}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-4}\cdot 7^{-1}\cdot 13\cdot 19^{-1}\langle \phi_{22}, \phi_{22}\rangle\langle \phi_{18}, \phi_{18}\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle^2 \\
\langle F_{20}, F_{20}\rangle &= 2^{-19}\cdot 3^{-6}\cdot 5^{-3}\cdot 7^{-2}\langle \phi_{20}, \phi_{20}\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle^4 \\
\langle F_{22}, F_{22}\rangle &= 2^{-23}\cdot 3^{-7}\cdot 5^{-5}\cdot 7^{-2}\cdot 11^{-1}\langle \phi_{22}, \phi_{22}\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle^4 \\
\langle F_{23}, F_{23}\rangle &= 2^{-11}\cdot 3^{-1}\cdot 5^{-2}\cdot 7^{-2}\cdot 11^{-1}\cdot 23^{-1}\cdot 691^{-1}\langle \Delta, \Delta\rangle^6
\end{aligned}
$$

これらの計算結果を使って予想 A に現れる α の近似値を求めることができる。この計算結果を表にして次に示す。有効数字は精度の悪いものでも少なくとも 30 桁はある。この表を見ると α は実際に r, n, k のみに依っているらしいことがわかる。また $r, n > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\alpha(0,n,k) =& 2kn + 2n - k - 1, \\
\alpha(r,0,k) =& r^2 + 2kr + r - k - 1, \\
\alpha(r,n,k) =& r^2 + 2kr + 2kn + 2rn + 2n + r - k - 2
\end{aligned}
$$

であると考えられる。

• α の近似値

G	g	f	F	r	n	k	α
Δ	Δ	ϕ_{22}	F_3	1	0	11	12
F_3	F_3	ϕ_{20}	F_5	2	0	10	35
F_4	F_4	ϕ_{18}	F_{11}	3	0	9	56
F_5	F_5	ϕ_{16}	F_{13}	4	0	8	75
F_6	F_6	ϕ_{16}	F_{13}	4	0	8	75
F_9	F_9	Δ	F_{24}	6	0	6	107
F_{11}	F_{11}	Δ	F_{24}	6	0	6	107
F_3	1	ϕ_{22}	F_3	0	1	11	12
F_4	Δ	ϕ_{20}	F_5	1	1	10	34
F_6	F_3	ϕ_{18}	F_{11}	2	1	9	55
F_7	F_4	ϕ_{16}	F_{13}	3	1	8	74
F_{14}	F_7	Δ	F_{24}	5	1	6	106
F_{16}	F_8	Δ	F_{24}	5	1	6	106
F_5	1	ϕ_{20}	F_5	0	2	10	33
F_8	Δ	ϕ_{18}	F_{11}	1	2	9	53
F_9	F_3	ϕ_{16}	F_{13}	2	2	8	72
F_{17}	F_5	Δ	F_{24}	4	2	6	104
F_{18}	F_6	Δ	F_{24}	4	2	6	104
F_{11}	1	ϕ_{18}	F_{11}	0	3	9	50
F_{12}	Δ	ϕ_{16}	F_{13}	1	3	8	68
F_{20}	F_4	Δ	F_{24}	3	3	6	100
F_{13}	1	ϕ_{16}	F_{13}	0	4	8	63
F_{22}	F_3	Δ	F_{24}	2	4	6	94
F_{23}	Δ	Δ	F_{24}	1	5	6	86

REFERENCES

[1] S. Böcherer, *Siegel modular forms and theta series*, Proc. Symp. Pure Math. **49-2** (1989), 3–17.

[2] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions , Part 2, (1979) 313–346.

[3] T. Dokchitser, *Computing special values of motivic L-functions*, preprint, math.NT/0207280.

[4] T. Ikeda, *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree* $2n$, Ann. of Math. **154** (2001), 641–681.

[5] T. Ikeda, *Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture*, preprint.

[6] W. Kohnen, *Lifting modular forms of half-integral weight to Siegel modular forms of even genus*, Math. Ann. **322** (2002), 787–809.

[7] W. Kohnen, *On the Petersson norm of a Siegel-Hecke eigenform of degree two in the Maass space*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 96–100.

[8] W. Kohnen and N.-P. Skoruppa, *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*, Invent. Math. **95** (1989), 541–558.

[9] W. Kohnen and D. Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip*, Inv. Math. **64** (1981), 175–198.

[10] I. Miyawaki, *Numerical examples of Siegel cusp forms of degree* 3 *and their zeta functions*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **46** (1992), 307–339.

[11] G. Nebe, homepage, http://samuel.math.rwth-aachen.de/~LBFM/gabi/,

[12] G. Nebe and B. Venkov, *On Siegel modular forms of weight* 12, J. Reine Angew. Math. **531** (2001), 49–60.

[13] H. Yoshida, *Motives and Siegel modular forms*, Amer. J. Math. **123** (2001), 1171–1197.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KITASHIRAKAWA, KYOTO, 606-8502, JAPAN

E-mail address: `ikeda@kusm.kyoto-u.ac.jp`